

(35) 矩形耐力壁を有する骨組構造物の立体解析(面内応力解析)

尾崎 昌凡 ^{*1} ○藤沢 正視 ^{*2} 川田 章夫 ^{*3}
 山崎 一義 ^{*4} 三浦 康秀 ^{*5}

1. 序論 一般に構造物が骨組だけで構成されていることは極めて稀であり、大抵は柱・梁の部材要素とスラブや壁の様な多数の連続体の組合せで構成されている。また、構造物は3次元の立体であり、構造体を考える場合も全体を立体としてとらえなければならない。このため、骨組と連続体を同時に効率良く立体的に解析出来れば非常に便利であり、これまでに多くの研究開発が行われて来ている。本論文では適用例として板と骨組要素で構成された鉄筋コンクリート構造物を想定し、スラブや壁等の直交異方性板の連続体を弾性的に等価な矩形骨組に置換する面内応力解析手法を紹介しながら、立体効果を考慮した立体骨組解析を行っている。

2. 解析方法の概要 直交異方性板を矩形要素に分割し、各矩形要素を弾性的に等価な骨組モデルに置換する。これは次の方法によって行われる。

a) 直交異方性板の微少矩形要素を取り出し、力の釣合式と変形適合条件式から直交異方性板の基本式を誘導する。

b) 4つの部材辺と2つの斜材から構成された矩形骨組モデルを考える。この矩形骨組モデルが相似形に細かく分割されれば、直線的に連続した骨組部材に生ずる応力は連続的に変化すると考え、力の釣合式と変形適合条件式から、骨組モデルの基本式を誘導する。

c) 以上により誘導された直交異方性板と骨組モデルの基本式が全く一致すれば、直交異方性板は弾性的に等価な骨組モデルに置換されることになる。

3. 平面応力系の直交異方性板の基本式 図1に示す様に板の絶対座標系において異方性の主軸方向を“1”，“2”で示し、 θ はス軸と主軸“1”とのなす角度を表わす。

又、 u 方向の変位を u 、 v とおき板の u 、 v 方向の歪度を ε_x 、 ε_y せん断歪度を γ_{xy} とおけば

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' \\ v^o \\ u^o + v' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots \quad (1)$$

ここで “'” は $\frac{\partial}{\partial x}$, “^o” は $\frac{\partial}{\partial y}$ を示す。

図1 板の絶対座標系

垂直応力度 σ_x 、 σ_y とせん断応力度 γ_{xy} を、弾性マトリックス(a)と ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} を用いて表わし、板の応力と歪の関係式は、直交異方性の場合(2)式のようになる。

*1 干葉大学 教授 工学博士

*2 建設省建築研究所 第3研究部 研究員

*3 (株)新潟鉄工所 エンジニアリング事業部

*4 (株)東京ソイルリサーチ 構造物診断室

*5 小田急建設株式会社 建築本部

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = (a) \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{sym} & & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (2)$$

但し、 a_{ij} は弾性マトリックス(a)の要素を表わし、各要素は(3)式のようになる。

$$a_{11} = [C_{11} \cos^4 \theta_0 + C_{22} \sin^4 \theta_0 + 2(C_{12} + 2C_{33}) \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_0]$$

$$a_{12} = [C_{12} + \{C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + 2C_{33})\} \cos^2 \theta_0 \sin \theta_0]$$

$$a_{13} = [C_{22} \cos \theta_0 \sin^3 \theta_0 - C_{11} \cos^3 \theta_0 \sin \theta_0 + (C_{12} + 2C_{33})(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 \sin \theta_0]$$

$$a_{22} = [C_{11} \sin^4 \theta_0 + C_{22} \cos^4 \theta_0 + 2(C_{12} + 2C_{33}) \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_0]$$

$$a_{23} = [C_{22} \cos^3 \theta_0 \sin \theta_0 - C_{11} \cos \theta_0 \sin^3 \theta_0 - (C_{12} + 2C_{33})(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0 \sin \theta_0]$$

$$a_{33} = [C_{33} + \{C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + 2C_{33})\} \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_0]$$

$$C_{11} = E_1 / (1 - \nu_1 \nu_2) \quad C_{12} = \nu_2 E_1 / (1 - \nu_1 \nu_2)$$

$$C_{22} = E_2 / (1 - \nu_1 \nu_2) \quad C_{33} = G_{12} \quad \dots \quad (3)$$

ここに E_1 , E_2 と ν_1 , ν_2 は、"1" と "2" の方向における直交異方性板の材料に対する弾性係数とボアソン比であり、 G_{12} は材料の主軸に対するせん断係数である。この板の板厚を h とすると、単位軸力 N_x , N_y とせん断力 N_{xy} は次式で示される。

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = R \{\sigma\} = R \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (4)$$

板の矩形要素に働く力の釣合い式は、図2より

(5)式となる。

$$N_x' + N_{xy}' + X = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$N_y' + N_{xy}' + Y = 0$$

(5)式 1=(1)~(4)式を代入すると(5)

式の力の釣合い式を変位の関数で表わした(6)

式の様な直交異方性板の基本式が求まる。

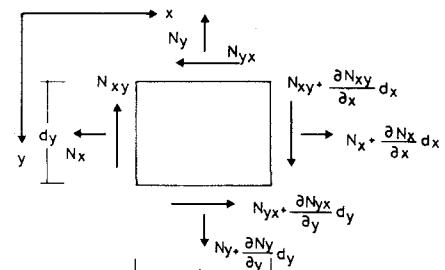


図2 板の矩形要素に働く力

$$\left. \begin{aligned} a_{11} U'' + 2a_{13} U'' + a_{33} U'' + a_{13} V'' + (a_{12} + a_{33}) V'' + a_{23} V'' + X/h = 0 \\ a_{13} U'' + (a_{12} + a_{33}) U'' + a_{23} U'' + a_{33} V'' + 2a_{23} V'' + a_{22} V'' + Y/h = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6)$$

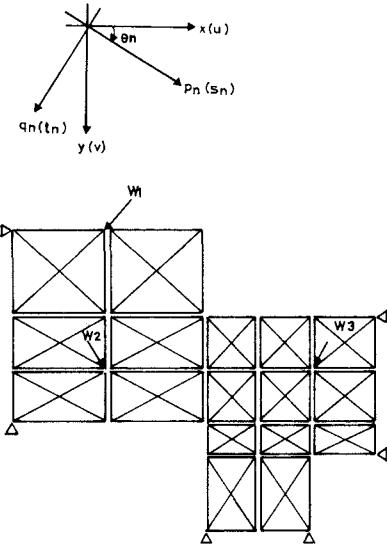
3. 置換骨組モデルの基本式 連続体を図3に示す様な矩形要素に分割し、各矩形要素を弾性的に等価な骨組モデルに置換する。この骨組モデルは4つの辺と2つの斜部材から構成された矩形骨組を用いている。平行に相対している辺材は、等しい断面積 A_n と断面2次モーメント I_{zw} を持つ。斜材は、辺部材と異なった断面積で曲げ剛性を持たない。全ての部材は、矩形骨組モデルの4隅で剛に結合されている。

等価骨組モデルは、平面内の外力 W_w を受けていてその外力は等価な節点力に置換される。又は平面の材端において軸方向力 N_{pn} 、せん断力 Q_{qn} が働いていると考える。もし、板が無限に小さい矩形要素に分割され、等価な骨組に置換されるとすれば、直線的に連続した骨組モデルの材に生ずる応力

は連続的に変化すると考えられる。故に、1つの骨組モデルに対する釣合い式は、部材座標系 P_n , θ_n を用いて次の様に表わされる。

$$\sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_{pn}}{\partial P_n} \Delta P_n \cos \theta_n + \sum_{n=1}^2 \frac{\partial Q_{gn}}{\partial P_n} \Delta P_n \sin \theta_n + \square A \cdot X = 0 \quad (7a)$$

$$\sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_{pn}}{\partial P_n} \Delta P_n \sin \theta_n + \sum_{n=1}^2 \frac{\partial Q_{gn}}{\partial P_n} \Delta P_n \cos \theta_n + \square A \cdot Y = 0 \quad (7b)$$



但し、 θ_n は x 軸と部材系とのなす角度、 ΔP_n は各部材長、 $\square A$ は矩形要素の面積とする。

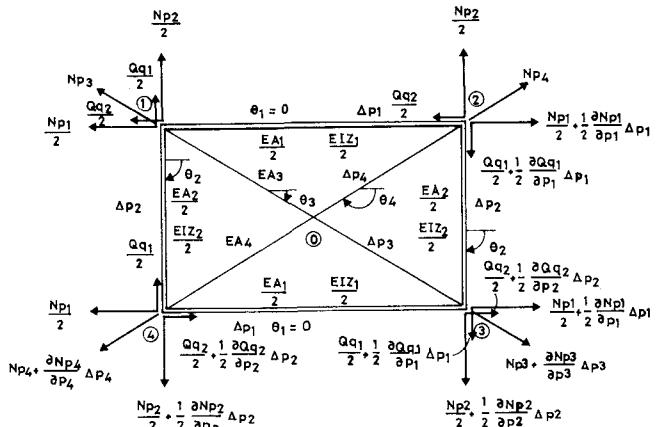


図3 骨組モデルの力の釣合い

部材軸力 N_{pn} を変位の関数で表わすと (8) 式となる。

$$N_{pn} = EA \frac{\partial S_n}{\partial P_n} \quad (n = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

さらに回転を生じないとすると、部材のせん断力 Q_{gn} は (9) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{g1} &= K P_z \\ Q_{g2} &= K P_1 \\ K &= \frac{6 EI z_1}{\Delta P_1^2 \Delta P_n} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{6 EI z_2}{\Delta P_1 \Delta P_2^2} \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(8) 式と (9) 式を (7) 式に代入して、力の釣合い式を変位の関数で表わす (10) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^4 B_n \cos \theta_n \frac{\partial^2 S_n}{\partial P_n^2} + D_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \square A \cdot X &= 0 \\ \sum_{n=1}^4 B_n \sin \theta_n \frac{\partial^2 S_n}{\partial P_n^2} + D_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \square A \cdot Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} B_n &= EA n \Delta P_n \quad (n = 1, 2, 3, 4) \\ D_n &= 6 EI z_n / \Delta P_n \quad (n = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

図4に示す全体座標系 X (U)、 Y (V) に局部座標 P_n 、 θ_n との関係、 $S_n = U \cos \theta_n + V \sin \theta_n$ 、 $\frac{\partial x}{\partial P_n} = \cos \theta_n$ 、

$\frac{\partial y}{\partial P_n} = \sin \theta_n$ より変位 S_n の P_n に関する導関数を求めるときの

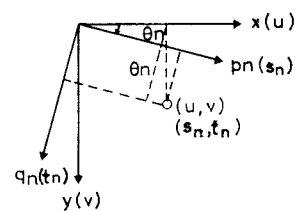


図4 部材座標系と絶対座標系

様になる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_n}{\partial P_n} &= u' \cos^2 \theta_n + (u^\circ + v') \cos \theta_n \sin \theta_n + v^\circ \sin^2 \theta_n \\ \frac{\partial^2 S_n}{\partial P_n^2} &= u'' \cos^3 \theta_n + 2u' \cos^2 \theta_n \sin \theta_n + u^\circ \cos \theta_n \sin^2 \theta_n + v'' \cos^2 \theta_n \sin \theta_n + 2v' \cos \theta_n \sin^2 \theta_n + v^\circ \sin^3 \theta_n\end{aligned}\quad (12)$$

従って、(10)式を変位 u, v の関数で表わすと (13)式となる。

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=1}^4 B_n \cos^4 \theta_n\right) u'' + \left(\sum_{n=1}^4 B_n 2 \cos^3 \theta_n \sin \theta_n\right) u^\circ + \left(\sum_{n=1}^4 B_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \theta_n + D_2\right) v'' + \left(\sum_{n=1}^4 B_n \cos^3 \theta_n \sin \theta_n\right) v^\circ + \square A \cdot X = 0 \\ &\left(\sum_{n=1}^4 B_n \cos^3 \theta_n \sin \theta_n\right) u'' + \left(\sum_{n=1}^4 B_n 2 \cos^2 \theta_n \sin \theta_n + D_1\right) v'' + \left(\sum_{n=1}^4 B_n \cos \theta_n \sin^3 \theta_n\right) u^\circ + \left(\sum_{n=1}^4 B_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \theta_n + D_1\right) v^\circ \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^4 B_n 2 \cos \theta_n \sin^3 \theta_n\right) u^\circ + \left(\sum_{n=1}^4 B_n \sin^4 \theta_n\right) v'' + \square A \cdot Y = 0\end{aligned}\quad (13)$$

4. 板と置換骨組モデルの等価条件

置換骨組モデルが直交異方性板と等価であるためには、板の基本式 (6) と骨組モデルの基本式 (13) は全く等しくなければならない。従って両式の間には次の様な関係式が成立する。

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=1}^4 B_n \cos^4 \theta_n \\ \sum_{n=1}^4 B_n \cos^3 \theta_n \sin \theta_n \\ \sum_{n=1}^4 B_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \theta_n \\ \sum_{n=1}^4 B_n \cos^2 \theta_n \sin^2 \theta_n + D \\ \sum_{n=1}^4 B_n \sin^4 \theta_n \end{pmatrix} = R \square A \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{13} \\ a_{12} \\ a_{23} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad (14)$$

且し、 $D_1 = D_2 = D$
 $\cos^2 \theta_3 / \sin^2 \theta_3 = a_{12} / a_{23} \geq 0$
 $\Delta P_i = \sqrt{a_{13} / a_{23}} \Delta P_2$

(14)式において、未知数 B_n は簡単に求めることが出来る。さらに (11)式

より等価な骨組モデルの各部材の伸び剛性 ($E A_n$)、面内曲げ剛性 ($E I_{zn}$) を計算することができる。

5. 応力の変換

以上で直交異方性板の等価な骨組モデルへの変換が行なわれたので、これを骨組解析用プログラムで容易に解くことが出来る。次に骨組モデルとして求めた部材内力を板の応力に変換する必要がある。骨組モデルの部材に生じる歪は、(12)式より次のようになる。

$$EP_n = \frac{NP_n}{EA_n} = \frac{\partial S_n}{\partial P_n} = u' \cos^2 \theta_n + (u^\circ + v') \cos \theta_n \sin \theta_n + v^\circ \sin^2 \theta_n \quad (n=1, 2, 3, 4) \quad (15)$$

(15)式と(1)式より矩形要素の中心での歪は(16)式となり 応力は(17)式で表わされる。

$$\{\varepsilon_o\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} \\ \varepsilon_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' \\ v^\circ \\ u^\circ + v' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} NP_1 / EA_1 \\ NP_1 / EA_2 \\ (NP_3 / EA_3 - NP_4 / EA_4) / 2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\{\sigma_o\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x_0} \\ \sigma_{y_0} \\ \gamma_{xy_0} \end{Bmatrix} = [a] \{\varepsilon_o\} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ sym & & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} NP_1 / EA_1 \\ NP_2 / EA_2 \\ (NP_3 / EA_3 - NP_4 / EA_4) / 2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

[参考文献]

- Masakazu Ozaki ; Anisotropic Plane Stress Analysis by Equivalent Framework Method, BRI Research Paper No. 43, October 1970
- 尾崎昌凡, 藤沢正視他; 等価骨組要素法による解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和46年11月
- 尾崎昌凡, 安室博; 矩形耐力壁を有する骨組構造物の構造解析法, 第2回電子計算機利用シンポジウム日本建築学会, 1980年3月

6. 適用例

6.1 建物概要 適用例に用いた建物は、図5および図6に示す基本スパン6.0mからなる6スパン×6スパンの正方形の平面形状を持つ、4層の壁式構造の鉄筋コンクリート造水槽である。ここでは、連続体を等価な弾性の矩形骨組に置換する解析手法を用いているが、図5、図6の平面図および断面図に示すように直交壁が多く見られる建物で、かつ、吹き抜けも存在する建物であるためこれらの効果や特殊性を考慮した解析が可能な立体骨組解析と組み合わせた解析手法を用いた。尚、本適用例では、鉄筋コンクリート造の水槽と言う特殊な機能を持った建物であることから、せん断ひびわれ発生時の水平力を把握することに主眼をおいて弾性解析を行った。

構造部材寸法

・壁板厚さ	1階	25 cm
	2~4階	20 cm
・床板厚さ	R階	12 cm
	4階	50 cm

(但し、2階、3階には床板がなく、水平ばりおよびタイピームが6mグリッドに配置されている。)

・梁断面	R階	$b \times D = 35\text{cm} \times 50\text{cm}$	3.2階水平ばり $b \times D = 150\text{cm} \times 50\text{cm}$
	4階	$b \times D = 30\text{cm} \times 400\text{cm}$	3.2階タイピーム $b \times D = 30\text{cm} \times 40\text{cm}$

6.2 計算仮定

a) 材料定数 適用例に用いた建物から得られた材料定数を用いる。

$$\begin{aligned} \cdot \text{コンクリート強度 } F_c &= 374 \text{ kg/cm}^2 & \cdot \text{ポアソン比 } V &= \frac{1}{6} \\ \cdot \text{ヤング係数 } E &= 1.92 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

b) 骨組モデルへの置換 本解析手法を用いて、精度の高い解析を行う場合、板の骨組モデルのグリッドを細分化する事が必要であるが、本適用例の場合、壁板の縦方向の分割は4層分に4階の

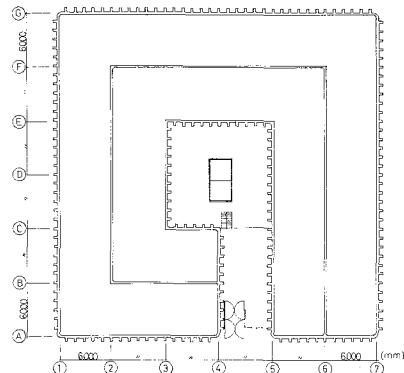


図5 基準平面図

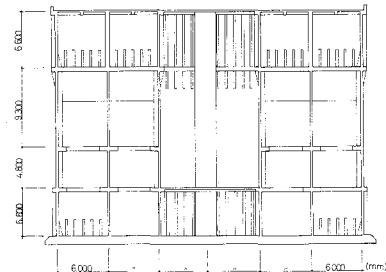


図6 断面図

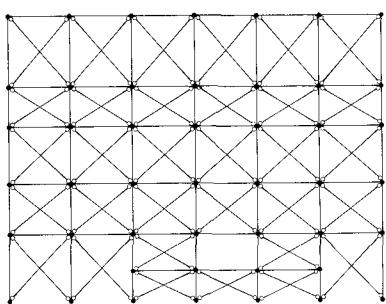


図7. A構面モデル図

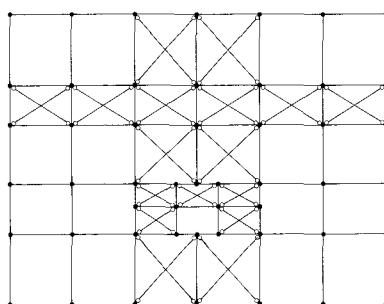


図8. 3構面モデル図

壁ばりを加えた5層に分割し、横方向は、6mグリッドによる分割を行っている。図7および図8は壁板の骨組モデルへの置換を示したものであり、後で述べる解析結果に用いたX、Y各方向の代表的な構面である。

床板は、X、Y両方向共、6mグリッドによる分割となっている。

以上の結果、本適用例の立体骨組モデルの全節点数は322、全部材料は、1562となっている。図9は、骨組に置換された立体モデル図を示している。

また本解析例では、板の面内剛性に、直交材を有効中分考慮しており、面外剛性は無視した。

c) 使用プログラム 適用例に用いた建物は、多数の連続体を含む壁式構造である事から、節点数・部材数が一般の建物よりも多くなっている。そのため、解析に用いた立体架構解析プログラムは多節点数・多部材数の立体解析が可能な、STRUDL-IIを使用した。

d) 荷重・外力 適用例における応力解析は、水平荷重時応力解析を行った。加力の方法としては、鉛直方向荷重を各節点に振り分け、等分布とAレ分布の2ケースについて水平方向加力を行った。各階のAレは図10に示す値を用いた。

また解析時のベースジャーカ系係数 C_0 は1.0としている。

6.3 解析結果 立体架構解析の結果を、X、Y各方向の代表構面において示す。図11および図12に変位図を、図13および図14には、骨組モデルにおける置換柱のせん断力と、置換プレースの軸方向力を示している。また図15および図16には、立体解析である事から代表的直交構面の骨組モデルにおける置換柱のせん断力と置換プレースの軸方向力を示した。また表1には、ベースジャーカ系係数 $C_0=0.2$ における4階と1階の各構面の負担せん断力とせん断応力度を示した。

7. まとめ 連続体を等価な矩形骨組に置換する本解析手法は、従来のFRANやSTRUDL等で代表される様な骨組解析用プログラムに、約250ステップのサブルーチンを追加するだけですみ、有限要素法を組み込むより簡単に修正出来る。また、電子計算機の使用が日常的になつた今日では、本解析法と立体骨組を組み合わせることにより、適用例のような特殊形状、特殊用途の構造物を容易に解析することが出来る。

*STRUDL-II : MITにおいて開発された構造解析プログラムで、2次元・3次元の骨組構造の応力解析が可能である。本解析手法は一般使用されている立体ランゲンの応力解析プログラムに順用する事が可能である。

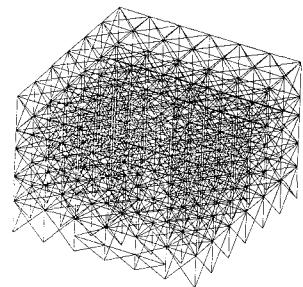


図9 立体モデル図

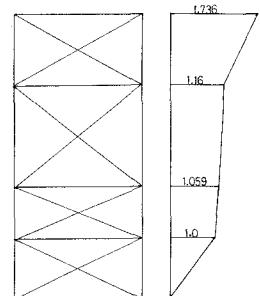


図10. Aレ分布

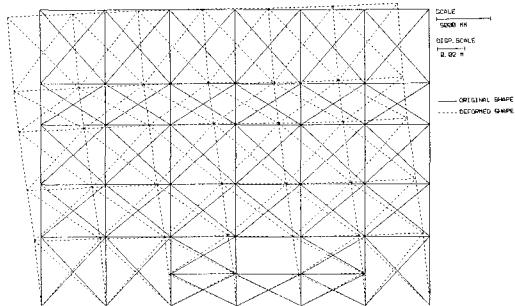


図11. A構面変位図

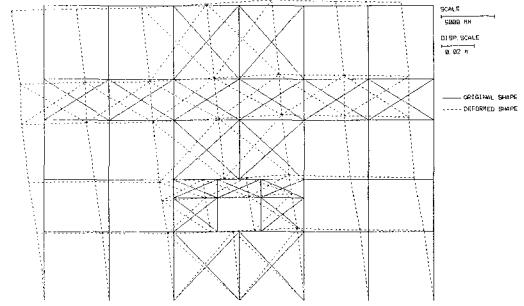


図12. 3構面変位図

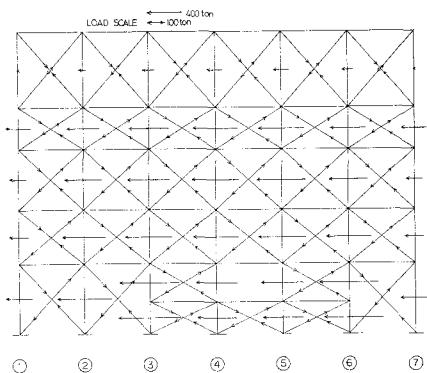


図13. A構面応力図

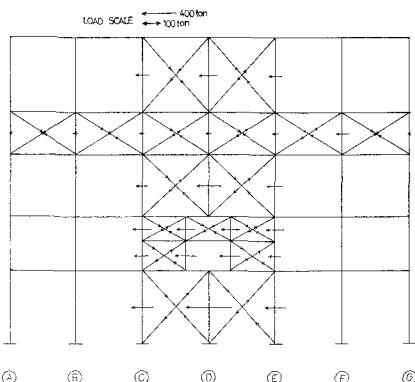


図14. 3構面応力図

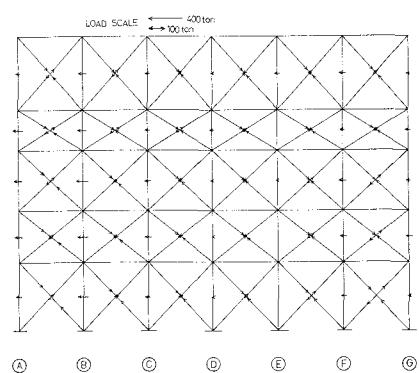


図15. 7構面応力図(直交面)

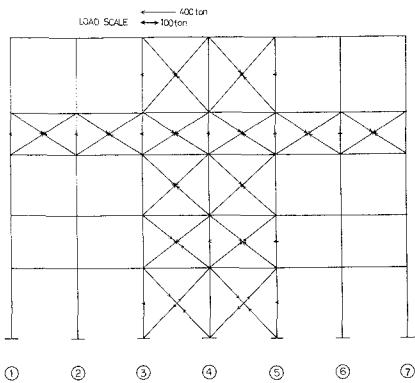


図16. E構面応力図(直交面)

Story	柱	X-DIRECTION					
		A	B	C	E	F	G
4	Q(kN/m)	217.0		124.9	125.9		222.2
	Aw(kN/m²)	72.0		24.0	24.0		72.0
	J(kN·m²)	3.02		5.20	5.25		3.09
1	Q(kN/m)	930.8	372.4	204.4	353.3	634.6	819.2
	Aw(kN/m²)	75.0	21.0	15.0	30.0	60.0	90.0
	J(kN·m²)	12.41	17.73	13.63	11.70	10.56	9.10

Story	柱	Y-DIRECTION					
		1	2	3	4	5	6
4	Q(kN/m)	196.0		136.3		163.4	
	Aw(kN/m²)	72.0		24.0		24.0	
	J(kN·m²)	2.72		5.08		6.01	
1	Q(kN/m)	682.5	493.8	262.1	239.4	467.0	556.9
	Aw(kN/m²)	90.0	60.0	30.0	30.0	60.0	90.0
	J(kN·m²)	7.56	6.23	6.74	7.40	7.79	7.45

表1 各構面の負担せん断力とせん断応力度 ($C_0 = 0.2$)

ANALYSIS FOR THE SPACE FRAMED STRUCTURES WITH RECTANGULAR
ORTHOTROPIC SHEARING WALLS

Masakazu OZAKI^{*1} Masami FUJISAWA^{*2} Akio KAWADA^{*3}
Kazuyoshi YAMAZAKI^{*4} Yasuhide MIURA^{*5}

This paper deals with an analytical method for structures constructed of framed structures and rectangular orthotropic shearing walls. In this method, a rectangular orthotropic shearing wall is replaced by the statically equivalent rectangular framework model which consists of four side members and two diagonal members. Therefore, extremely large problems in the analysis for framed structures with rectangular orthotropic shearing walls can be effectively handled with a single digital computer program for the analysis of space framed structures.

In its formulation, the fundamental differential equations for a framework model are derived after setting up the equations of equilibrium and compatibility by assuming that the stresses and strains in the members of the framework model arranged in linear continuation are to vary continuously. For the framework model to be equivalent to the rectangular orthotropic shearing wall, the fundamental differential equations for the framework model are required to be identical with those for the rectangular orthotropic shearing wall. Consequently, the framework model derived herein represents the statically equivalent rectangular orthotropic shearing wall.

In addition, the distribution of shearing forces and deformation for a framed structure with rectangular shearing walls is investigated by utilizing a story reinforced concrete building model with rectangular shearing walls subjected to seismic horizontal design force for each floor level of the building model.

*1 Professor, Faculty of Engineering, Chiba University

*2 Structural Dynamics Div. Building Research Institute

*3 Niigata Engineering

*4 Tokyo Soil Reserch

*5 Odakyu Construction