

(27) 任意形状の剛基礎底面に対する動的コンプライアンスの簡易解析法

川上 英二 * 〇田崎 信一 **

§ 1. 緒 言

構造物の震害に対して、地盤の動特性が多大な影響をもたらす事は、従来より指摘されている事であり、地盤上の構造物の動的解析に際しては、構造物—地盤の連成振動系を解析する必要がある。地震を波動現象としてとらえるには、地盤を無限に広がる弾性体と仮定する弾性体理論による解析手法が適しており、この手法は底面下の接触圧の取り扱い方により、次の3つに分類できる。

- 1) 接触圧の分布形状を仮定する手法 (小堀ら¹⁾、田治見²⁾、Bycroft³⁾等)
- 2) 接触圧を未知関数とする積分方程式を解析的に解く手法 (Veletsos・Wei⁴⁾、Luco・Westmann⁵⁾等)
- 3) 接触圧を未知関数とする積分方程式を離散的に解く手法 (Wong・Luco^{6),7)}、北村・桜井⁸⁾等)

接触圧を未知関数とする積分方程式を離散的に解く3)の手法は、

- イ) 仮定した接触圧の分布形状の高振動数域での妥当性、さらには任意形状の底面への適用性などの問題に手法1)のようなあいまいさが無い。
 - ロ) 任意形状の底面に関しても計算が可能である。
 - ハ) 上部構造物の柔性を有限要素法等で考慮して解析できる。
- ニ) 入射波の底面での位相差を考慮できる。

等、多くの利点を持つと考えられる。しかし、欠点は、容易でないGreen関数の計算を要素の対それぞれに対して行なう必要があるため、分割数の増加に伴い膨大な計算量を要する事である。

本論文は、以上のような観点から、任意形状を有する剛基礎底面に対する地盤の動的コンプライアンス、および接触圧を算定するための簡易解析法を提案したものであり、接触圧を未知関数とする積分方程式を離散的に解く従来の手法における計算量の減少化を図ったものである。§2では解析手法を展開し、§3ではこの手法の精度を検討するため、理論解の求まっている円形底面に適用し、コンプライアンス、および接触圧分布を求め、本手法の精度、および計算量を検討した。

§ 2. 解 析 手 法

(1) 既往の研究との比較

構造物の動的問題を解析するに際して、その支持地盤の表面上での点加振力と変位との関係を表現する式が得られれば、これをGreen関数として用いる事により、基礎底面下の接触圧は、次式の第一種Fredholm型積分方程式の解で求められる。

$$u(x; y) = \iint_S [G(x-\bar{x}, y-\bar{y}; \omega, V_s, \nu)] p(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y} \quad \cdots \cdots (1)$$

* 埼玉大学工学部

** 埼玉大学大学院

ただし、直角座標系 $X-Y-Z$ の $X-Y$ 面を地表面とおき (Fig.1 参照)、 $u(x', y')$ は (x', y') での変位ベクトル、 $p(\bar{x}, \bar{y})$ は $(\bar{x}, \bar{y})$ での接触圧ベクトル、

$$u = {}^t(u_x, u_y, u_z) \qquad p = {}^t(p_x, p_y, p_z) \cdots \cdots (2)$$

ω は加振円振動数、 V_s は S 波の速度、 ν はポアソン比 (本解析では $1/3$ を用いた)、 S は基礎の底面積である。さらに、 $[G]$ は $(\bar{x}, \bar{y})$ に単位の大きさの加振力が作用した場合の (x', y') での変位を表す 3×3 要素の Green 関数からなるマトリクス

$$[G] = \begin{Bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{Bmatrix} \cdots \cdots (3)$$

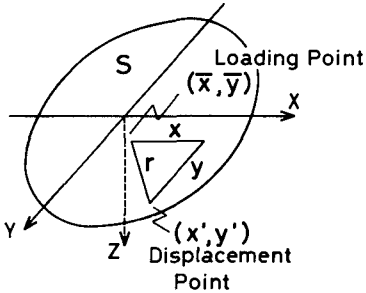


Fig.1 Coordinate System

であり、また本論文では正弦加振問題を考え、時間項 $\exp(i\omega t)$ を省略している。

式(1)を離散化して解く Wong ら⁷⁾ によって提案された従来の手法は、底面を要素分割し、 $p(\bar{x}, \bar{y})$ を各要素内で一定値 p_u (u は uniform の略) として導かれる連立方程式(4)を、底面の剛体変位を境界条件として解くものである。

$$u^{DP} = \sum_{EP=1}^{NE} \iint_{S^{EP}} [G]^{DP-EP} p_u^{EP} d\bar{x}d\bar{y} \qquad (DP = 1 \sim ND) \cdots \cdots (4)$$

ここで、 DP, EP は、それぞれ変位点 (底面の変位の境界条件を表す点)、 および要素の番号であり ND, NE は各々の総数である。なお、添字 DP および EP は、各々 DP, EP での値を示し、添字 $DP-EP$ は、 EP の影響による DP での値を示す。また、 S^{EP} は要素 EP の領域を表し、従来の手法、たとえば^{6), 7), 8)} では、分割要素としては長方形が用いられ、変位点は各要素の中心にとられている。

しかし、上式中の Green 関数の領域 S^{EP} 内での積分値を求めるには、特異点を含む二重積分を数値積分で行なう必要があり、計算量は膨大なものとなる。

一方、本論文では定式化において以下の工夫を行なった。

- イ) Green 関数を実数部、虚数部それぞれについて近似する。ただし、計算する変位点に対し、要素の全領域が近似式の適用範囲内に含まれる場合には近似式を用い、変位点と加振要素とが十分に遠く、近似式の適用範囲外の場合には、要素を構成する 3 節点における Green 関数の値から線形的に内挿した関数を用いる。
- ロ) 分割要素は任意形状の三角形を用いる。
- ハ) 接触圧は各要素内で線形分布とする。
- ニ) 加振点 (加振要素の各頂点)、変位点 (底面の変位の境界条件を表す点) とを分けて考える。
- イ) の近似関数化は、点加振に対する Green 関数が、4 種のなめらかな複素変位関数によって、静的な場合の解を拡張した形で表現できる点⁸⁾に着目して行なったものである。ここで用いる近似式が従来の式と異なる点は、田治見²⁾、北村・桜井⁶⁾が、絶対値、および偏角を近似していたのに対し、本手法では実数部、および虚数部を無次元振動数 $a'_0 (= \omega r / V_s, r$ は加振点と変位点との距離) のべき級数で表し、積分を解析的に可能にした事である。本論文では $a'_0 \leq 2.5$ を近似関数化の対象とし、野嶋ら⁹⁾

の計算法に従い対象域内の数点で求めた厳密解と、 $a'_0 = 0$ での値を通るようにして3次の近似式を求めた。また、本論文では半無限弾性地盤について解析しているが、地盤が粘弾性体でも、また多層地盤でも成層地盤であれば同様な表現が可能である。

このようにGreen関数を実数部、虚数部でべき級数に近似する事の最大の利点は、接触圧分布をも同様に高次べき級数に仮定した場合に、両者の積である被積分関数がべき級数となるため、各要素内で二重積分が解析的に可能となる点である。結局、本手法では、線形分布の接触圧に対し、変位の計算は式(5)、(8)で行なった。

$$u^{DP-EP} = \iint_{S^{EP}} \{ f(x, y) \cdot D \}^{DP-EP} p_\ell^{EP} d\bar{x} d\bar{y} \qquad \cdots \cdots \cdots (5)$$

ただし $D = D_1 + D_2 a'_0 + D_3 a'^2_0 + D_4 a'^3_0 \qquad \cdots \cdots \cdots (6)$

$$p_\ell^{EP} = [C_{P,1}] \bar{x} + [C_{P,2}] \bar{y} + [C_{P,3}] \qquad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$u^{DP-EP} = \iint_{S^{EP}} [G_\ell]^{DP-EP} p_\ell^{EP} d\bar{x} d\bar{y} \qquad \cdots \cdots \cdots (8)$$

ただし $[G_\ell]^{DP-EP} = [C_{G,1}] \bar{x} + [C_{G,2}] \bar{y} + [C_{G,3}] \cdots \cdots \cdots (9)$

式(5)は、要素EPが変位点DPに対して近似式の適用範囲内の場合の計算式、式(8)は、適用範囲外の場合の計算式である。式(5)、および式(8)の〔 〕は要素内のGreen関数の値を示し、前者におけるDは複素変位関数であり、 a'_0 のべき級数による近似式（式(6)）で表され、後者は $(\bar{x}, \bar{y})$ の線形近似式（式(9)）によって表される。また、 p_ℓ （ ℓ は linear の略）は、要素内の線形接触圧分布を表す式であり、 $(\bar{x}, \bar{y})$ の一次式（式(7)）となる。

以上の式は、三角関数の多項式に展開され（§ 2、(2)参照）、積分が解析的に可能になるため計算時間は短縮される。また本手法ではロ）の工夫により任意形状の底面への適用および接触圧の急変する部分でのみの細分割が容易なため、計算量の大幅な減少化をもたらす。さらにはハ）の工夫により接触圧を精度よく近似する事が可能となる。

以上の離散的手法の違いを直観的にまとめたものを、Fig.2 に示す。

Wong ら^{6), 7)}は、Green 関数と接触圧を、それぞれ厳密式、要素内一定値とした。また、北村・桜井⁸⁾は、変位点が载荷要素内ではそれぞれ近似式と一定値、载荷要素外ではそれぞれ厳密式および集中力とした。それに対し、本手法では、それぞれ近似式、線形関数と仮定し、精度の向上、および計算時間の短縮を図った。

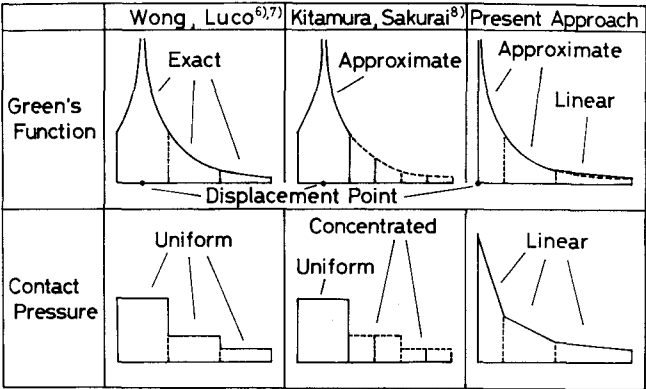


Fig.2 Comparison among Three Techniques

(2) 影響係数

要素EPの全領域が変位点DPに対する近似式の適用範囲に含まれる場合の変位 u^{DP-EP} は式(5)の二

重積分を行なう事により式 (10) で表される。その際、要素を構成する 3 つの加振点の番号を $EP(k)$ 、

($k = 1, 2, 3$) と置き (Fig.3 参照)、変位点を原点とする直角座標 $(\xi, \eta) = (\bar{x} - x', \bar{y} - y')$ 、および極座標 (r, θ) を考えた。積分は、積分領域 S^{EP} を 3 つの領域 ($m = 1, 2, 3$) に分け、 r に関しては $r = 0 \sim l_m / \cos(\theta - \theta_m)$ 、 θ に関しては $\theta = \theta_1 \sim \theta_2$ 、 $\theta_2 \sim \theta_3$ 、 $\theta_3 \sim \theta_1$ の区間で行なった。

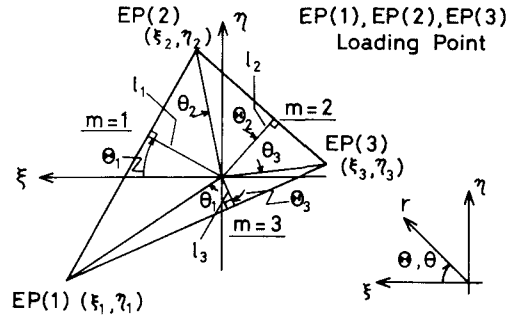


Fig.3 Local Coordinate System

$$u^{DP-EP} = \left[\begin{bmatrix} [I_1] & [I_2] & [I_3] \end{bmatrix} [XY] \right]^{DP-EP} p^{EP\Delta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし $p^{EP\Delta} = \{ p^{EP(1)} \quad p^{EP(2)} \quad p^{EP(3)} \} \quad \dots\dots\dots (11)$

式 (10) 中、 $[XY]$ は (ξ, η) の関数、また $[I_i]$ ($i = 1, 2, 3$) は次式の形 (α, β, r は定数) の積分の線形和で表され、すべて解析的に不定積分する事が可能である。¹⁰⁾

$$\int_1 \frac{\sin^\beta(t + \theta_m)}{\cos^\alpha t} \cos^r(t + \theta_m) dt \quad (t = \theta - \theta_m) \quad \dots\dots\dots (12)$$

一方、変位点 DP に対する近似式の適用範囲外に加振点の 1 つ以上が存在する場合、変位 u^{DP-EP} は式(8)の二重積分を解析的に行なう事により式 (10) と同様な式が導かれる。

結局、底面を加振する事による変位は、式(5)、(8)を全加振要素について重ね合わせる事により、次式に変形できる。

$$u^{DP} = \sum_{LP=1}^{NL} [\bar{G}]^{DP-LP} p^{LP} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、LP を加振点の番号、NL をその総数とする。ここで $[\bar{G}]$ の各要素は影響係数⁸⁾に相当し、接触面の動特性を離散的に表すものである。さらに、コンプライアンスの定式化にあたっては、Wong ら⁷⁾の解法に基づき、接触圧分布を各要素内で線形とするように改良して用いた。

§ 3. 計算結果と考察

本章では、§ 2 で提案した手法の精度を検討するため、理論解の求まっている半無限弾性地盤上の円形剛基礎底面に本手法を適用し、コンプライアンスおよび接触圧分布の本手法と理論解との比較を行なった。さらに従来手法との精度の比較を行なう事により、計算量の減少化を確認した。

(1) 分割方法の影響

円形底面のコンプライアンスの解析解としては、Veletsos ら⁴⁾、Luco ら⁵⁾等による解があるが、ここでは、すべての振動モードについて求められている Luco らの解と比較し、本手法の精度を検討した。

底面の分割に際しては、半径および円周の 2 方向について考慮する必要があるが、まず円周方向の分割を一定とする 8 角形底面を用い、半径方向の分割方法の影響を検討した。解析モデルとしては、Fig.4 に示す C-1, 2, 3a, 4 を用いた。ここで、C-2 は半径の 9 割、C-3a は 9、7 割、C-4 は 9、7、5 割の位置で分割したものである。また、加振点、変位点は共に各要素の頂点にとった。

C-4の値を基準とした、各モデルのコンプライアンス ((a) Rocking, (b) Torsion) の値の比を無次元振動数 a_0 ($= \omega R / V_s$, R は半径) $= 0, 0.8, 1.6, 2.4$ をパラメータとして Fig. 5 に示す。この図からわかるように、コンプライアンスは C-3a でほぼ収束しており、半径の 9, 7 割の他、さらに 5 割の位置で分割する事の影響は少ない。

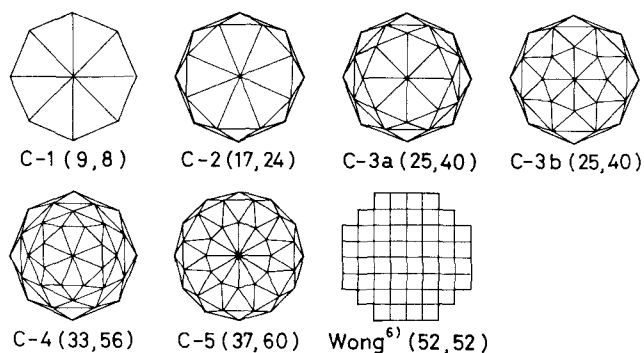


Fig. 4 Analytical Models

(NL, NE) = (Number of Loading Points, Number of Elements)

次に、本手法の利点である分割位置を任意にとれる事の有効さを示す一例として、C-2を用い、半径方向に 2 分割するのみのモデルにおける分割位置の影響を調べた。Fig. 6 は、分割位置 (分割点の底面中心からの距離 r_0 / 底面半径 R) を変化させた場合のコンプライアンスの値と解析解⁵⁾との比の変化を示したものである。図より $r_0 / R \approx 0.8$ で精度がよく、先の結果と同様、周辺部分での細分割が計算の能率上、非常に有効である事が判断できる。このような底面の輪郭曲線を考慮した周辺部分での細分割は、従来の手法で用いられている長方形要素では不可能であり、任意の形状、および大きさの三角形要素の使用を容易にした本手法の分割方法により可能となったものである。

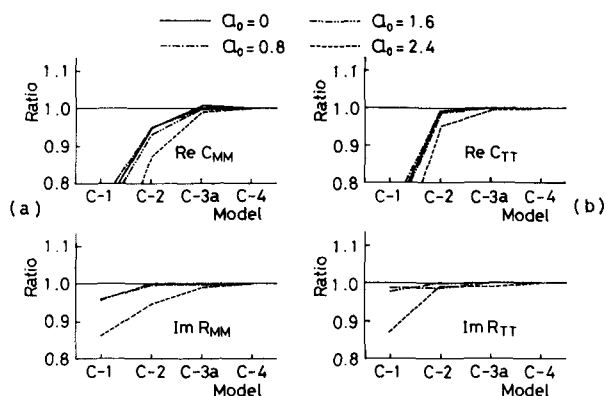


Fig. 5 Accuracy of Compliance for Various Models

(a) Rocking Compliance (b) Torsional Compliance

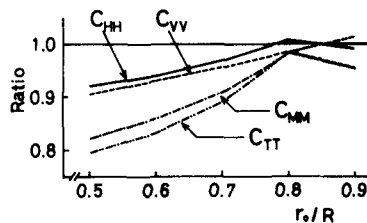


Fig. 6 Location of Mesh Division and Accuracy of Compliance Values

(2) 精度の検討

本手法で得られた 6 つのモードに対するコンプライアンスを Fig. 7 に示す。なお、同じ分割パターンとして C-3a と C-3b の 2 種類を用いたのは、メッシュの粗さと振動数との関係を調べるためであり、C-3b は、半径の 9 割と 5 割の位置で分割したものである。また、C-5 は C-3b と半径方向の分割方法は同一とし、円周方向の分割を 8 分割から 12 分割に増大させたものである。図より、 C_{HM} , C_{MH} 以外では、誤差は $a_0 \leq 3$ の低振動数の領域で数パーセント以内であり、ほぼ満足しうる値と考える。さらに、C-3a と C-3b を比較すると、C-3b では、高振動数域における誤差が小さい事が認められる。また、離散的な手法による C_{HM} , C_{MH} の値が示されていない^{6)~9)}ので本手法の優劣を評価する事ができないが、 C_{HM} , C_{MH} の場合には、コンプライアンスの大きさそのものが他のモードに比較して 1-order 小さい値であり、しかも定性的には類似した結果が得られている事がわかる。他の 4 つのモードの誤差は、かなり小さく、本手法のモデル C-3a,

C-3b、C-5 によつて、円形底面を十分精度よく近似表現していると考えられる。

次に、従来の手法に対する本手法の精度を比較する。従来のような同一形状の矩形要素を用いた離散的手法としては、底面形状の円形を矩形要素で近似表現する事の困難さから円形底面への適用例は少ない。ここでは、

Wong⁶⁾がFig.4 に示すモデルを用いて計算し、 C_{HH} 、 C_{VV} を数値で報

告しているの、この値とC-3bの値との比較を、解析解に対する比の形でFig.8に示す。同図より、本手法とWong⁶⁾の手法とは、ほぼ同精度と考えられる。しかし、ここで重要な事は、要素分割においてWong⁶⁾のモデルでは加振点数 $NL=52$ であり、このような矩形要素を用いたモデルでは円形を表現するのに最低限必要な (Fig.4 参照) 分割数であったのに対して、本手法のC-3bでは $NL=25$ である。計算量は加振点数の2乗にほぼ比例する事を考えると、本手法は、従来の手法に比べて約3割の計算量に減少化されている事がわかる。

さらに、本手法では接触圧分布も精度よく求められる。一例として、静的な場合の強制鉛直変位 Δz 、または強制回転変位 ϕ_x に伴う接触圧の鉛直成分 ($p_z - \Delta z$ 、 $p_z - \phi_x$)

を理論解と共にFig.9に示す (ただし、 $p_z - \phi_x$ は、Y軸上の値)。同図から、本手法により局所的に急変する接触圧が十分に精度よく求められている事がわかる。

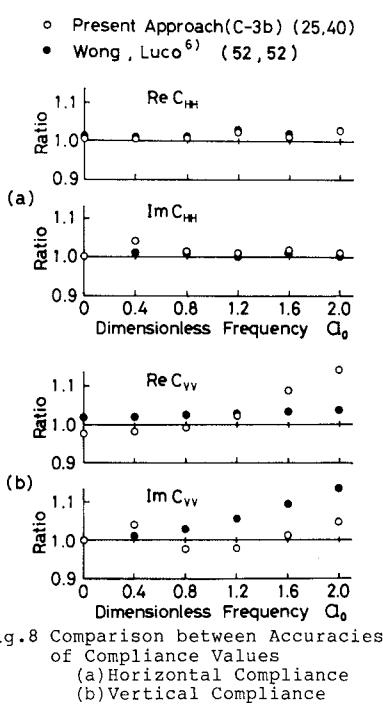


Fig.8 Comparison between Accuracies of Compliance Values
(a) Horizontal Compliance
(b) Vertical Compliance

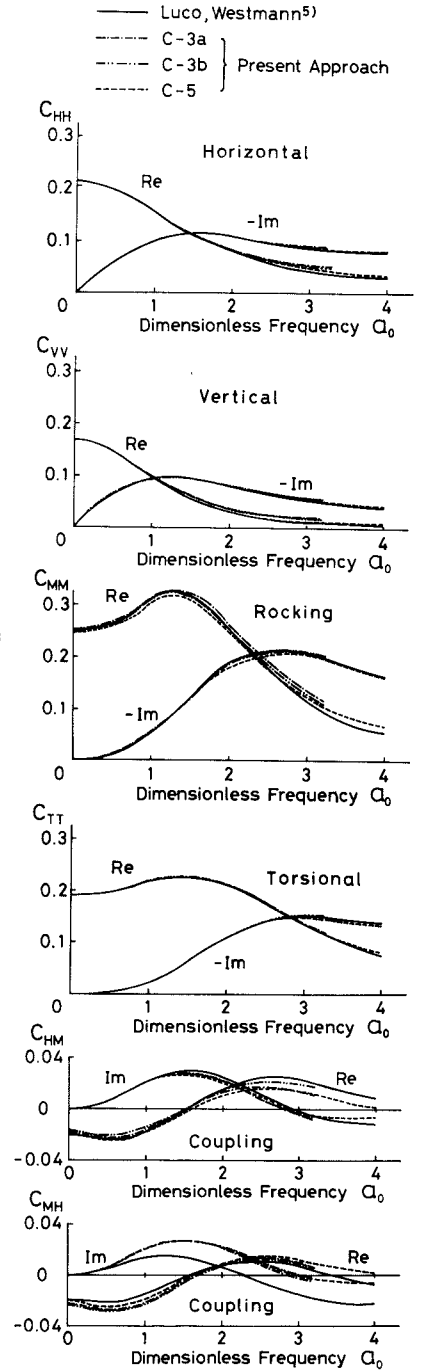
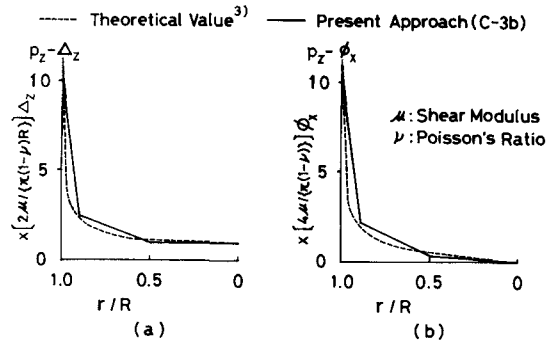


Fig.7 Compliance Values

§ 4. 結 論

任意形状を有する剛基礎底面に対するコンプライアンスおよび接触圧を離散的に求める解析方法における計算量の減少化を図る手法を提案した。本手法を用いると、任意形状の底面の輪郭曲線の表現、および応力集中部分のみでの細分割が容易であり、しかも接触圧を各要素内で線形分布としたため、急変する接触圧が表現可

能となり、コンプライアンスの精度が向上した。Fig.9 Contact Pressure under Circular Foundation
さらには、解析的に積分可能なGreen関数の近似式を用いた事により、計算時間の大幅な減少が可能となった。



謝 辞

本論文をまとめるにあたり、埼玉大学工学部 久保 慶三郎先生、渡辺 啓行先生に貴重な御助言を頂きました。また、文部省科研費（一般研究（A）、奨励研究（A）、58年度）の援助を受けました。記して深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小堀・南井・鈴木：成層構造をもつ基礎地盤の動特性、京都大学防災研究所年報、第19号B、1976
- 2) 田治見：耐震理論に関する基礎的研究、東京大学生産研究所報告、第8巻、第9号、1959
- 3) Bycroft：Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum, Philosophical Trans. of the Royal Society of London, Vol. 248, Series A, 1956
- 4) Veletsos, Wei：Lateral and Rocking Vibrations of Footings, SM, ASCE, Vol. 97, 1971
- 5) Luco, Westmann：Dynamic Response of Circular Footings, EM, ASCE, Vol. 97, 1971
- 6) Wong, Luco：Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape, Earthq. Engng. Struct. Dyn., Vol. 4, 1976
- 7) Wong, Luco：Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves, Earthq. Engng. Struct. Dyn., Vol. 6, 1978
- 8) 北村・桜井：剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法、土論集、第290号、1979
- 9) 野嶋・田治見・市川：建物と地盤の相互作用に関する基礎的研究、竹中技術研究所報告、第9号、1973
- 10) 森口・宇田川・一松：数学公式 I、岩波書店、1956

Simplified Numerical Method for Dynamical Ground
Compliance for Arbitrary-Shaped Rigid Foundation

by Hideji Kawakami* , Shinichi Tasaki**

This paper presents an approximate numerical procedure for calculation of the dynamical ground compliance for an arbitrary-shaped rigid foundation resting on an elastic half space. The proposed method is based on a reduction of Fredholm integral equations of the first kind to linear algebraic equations by subdividing the contact area between the foundation and the elastic medium into subregions.

Following points are mainly improved:

- (1) In order to enable analytical integration, Green's functions are represented by the sum of the real and imaginary parts, each of which is approximated to power series or linear functions;
- (2) contact area is subdivided into arbitrary triangular-shaped subregions;
- (3) linear distribution of contact pressure is assumed in each subregion; and
- (4) displacement points can be separated from loading points.

In order to discuss an accuracy of this method, circular foundations resting on an isotropic homogeneous elastic half-space are examined.

The result shows that this method reduces computation time drastically because it

- (1) enables analytical integration in each subregion instead of numerical one;
- (2) is adequate to subdivide the arbitrary-shaped foundation with small number of elements; and
- (3) is excellent in expressing the distribution of the contact pressure that changes sharply near the foundation fringe.

* Faculty of Engineering, Saitama University

** Graduate Student, Faculty of Engineering, Saitama University