(21) 有限回転を伴う薄肉弾性シェルの幾何学的非線形理論

○井浦雅司* 平嶋政治**

1. はじめに

薄肉シェルの幾何学的非線形理論は，これまで多くの研究者により展開されており，かなり精密な理論式が得られている。しかしながら，従来の研究の大部分は，当初から微小ひずみの仮定を導入しており，さらに回転量の小さな変形を対象としている。有限回転は幾何学的非線形理論の特徴の一つであるにも拘わらず，既往の研究ではそれ程精確に扱われていない。そのため，Koiter[1]らに代表されるKirchhoff-Love形の薄肉シェル理論においては，幾何学的境界条件式の回転項に関し，線形理論と同一の結果が得られている。また，著名な研究者の名前が付けられた多くの近似式が提案されているが[2]，これは定式化の際に，様々な段階で微小ひずみの仮定を導入しているためであり，非線形項の取扱いに統一性が欠けているものと思われる。そこで本論文では，幾何学的非線形理論に基づき，有限回転を伴う薄肉弾性シェルの平衡方程式および力学的・幾何学的境界条件式を，微小ひずみの仮定を用いることなく誘導し，既往の理論式と比較検討することを目的としている。

シェルの幾何学的非線形理論を定式化する際に，Euler の方法あるいはLagrange の方法が広く利用されている。Eulerの方法による研究はこれまで多く報告されており，その中で，Novozhilov と Shamina[3]，Pietraszkiewicz[4)~7)]，Simmonds と Danielson[8]らの研究は注目される。文献[3]~[7]では，極分解定理を用いてシェル境界上における有限な回転量を厳密に評価し，様々な形の境界条件式を求めている。そこでは，回転項に関する境界条件式はもはや線形理論と異なり，変位成分およびその導関数に関する非線形項で表わされている。文献[8]では，変位成分の代わりに，有限回転ベクトルと応力関数ベクトルを未知数として非線形理論を展開している。このように，Eulerの方法による研究では，かなり精密な平衡方程式と境界条件式が得られている。しかしながら，数値計算を行う場合には，変形前の状態量が既知の場合が多く，Lagrangeの方法による定式化が要求される。

変形前後の状態量は変位成分により関連づけられており，Eulerの方法により得られた基礎式を，変形前の状態量に関して定義された量で表示する研究が報告されている[9),10)]。しかしながら，この方法では回転項に関して正しい結果が得られないことが指摘されている[11]。一方，仮想仕事の原理を用いて基礎式を誘導する研究も報告されている[4)~7),11),12)]。Pietraszkiewicz[4)~7)]は，幾何学的境界条件式として変形後の基底ベクトルにより定義された回転量を用いており，文献[12]では無理数の修正曲率変化テンソルを用いてシェルの平衡方程式を求めているが，幾何学的境界条件式については表示されていない。Pietraszkiewicz と Szwabowicz[11]は，本来無理数である曲率変化テンソルに，微小ひずみの仮定を用いて3次の多項式で表わされる修正曲率変化テンソルを用いている。このようにLagrange の方法により得られた従来の基礎式は，Euler の方法によるものと比較し，その精度はかなり低いものと思われる。

本論文では，Lagrangeの方法により，仮想仕事の原理を用いて，Kirchhoff-Love の仮定に基づく薄肉弾性シェルの平衡方程式および境界条件式を求めている。本研究の第一の特徴は，シェルの平衡方

* 東京電機大学 建設工学科 ** 早稲田大学 土木工学科

程式と境界条件式を誘導する際に，微小ひずみの仮定を用いていないことである。そのため，二次元理論の範囲内において精確な基礎式が得られている。第二としては，内力と外力による仮想仕事を求める時，変位ベクトルの変分を用いていることである。これまで，変位成分の変分を用いていたため，膨大な計算量を必要としたが，変位ベクトルの変分を用いると演算過程が簡明となり，このことも微小ひずみの仮定を必要としない一因となっている。さらに第三の特徴としては，有限回転ベクトルを用いてシェル境界における回転量を厳密に評価していることである。その結果，回転角に関する幾何学的境界条件式は，変位およびその導関数に関する非線形となり，力学的境界条件式は既往の研究で無視されていた非線形項を含んだ形となっている。なお，本論文では総和規約を採用し，ギリシャ文字に関しては 1，2 の値をとるものとする。

2. シェルの幾何学量

本研究で用いる記号は，Pietraszkiewicz[4)〜7)]に準ずるものとし，その主なものを記す．変形前のシェル中央面 M 上における点の位置ベクトルを $\mathbf{r}(\theta^\alpha)$ とおく。ここに，θ^α は M 上における埋込座標であり，基底ベクトル $\mathbf{a}_\alpha$ は，

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} \tag{1}$$

と定義され，単位法線ベクトトルは，

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\in^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta \tag{2}$$

と表わされる．ここに $\in^{\alpha\beta}$ は M 上における交代テンソルである．さらに，M 上における計量テンソル $a_{\alpha\beta}$ と曲率テンソル $b_{\alpha\beta}$ は，

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad , \quad a = |a_{\alpha\beta}| \tag{3. a,b}$$

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{n} \tag{3.c}$$

で与えられる。M 上における変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とし，変形後のシェル中央面を $\overline{M}$ で表わすと，$\overline{M}$ 上における位置ベクトル $\overline{\mathbf{r}}$，基底ベクトル $\overline{\mathbf{a}}_\alpha$，単位法線ベクトル $\overline{\mathbf{n}}$ はそれぞれ，

$$\overline{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \tag{4.a}$$

$$\overline{\mathbf{a}}_\alpha = \overline{\mathbf{r}}_{,\alpha} \tag{4.b}$$

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{1}{2}\overline{\in}^{\alpha\beta}\overline{\mathbf{a}}_\alpha \times \overline{\mathbf{a}}_\beta \tag{4.c}$$

と定義され，ここに $\overline{\in}_{\alpha\beta}$ は $\overline{M}$ 上の交代テンソルである。$\overline{M}$ 上における計量テンソル $\overline{a}_{\alpha\beta}$，曲率テンソル $\overline{b}_{\alpha\beta}$ は，

$$\overline{a}_{\alpha\beta} = \overline{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \overline{\mathbf{a}}_\beta \quad , \quad \overline{a} = |\overline{a}_{\alpha\beta}| \tag{5. a,b}$$

$$b_{\alpha\beta} = \overline{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \cdot \overline{\mathbf{n}} \tag{5. c}$$

となる。以上より，変形前と変形後の基底ベクトルと法線ベクトルとの関係は，

$$\overline{\mathbf{a}}_\alpha = l_{\lambda\alpha}\mathbf{a}^\lambda + \phi_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} \tag{6.a}$$

$$\overline{\mathbf{n}} = n_\alpha \mathbf{a}^\alpha + n\,\mathbf{n} \tag{6.b}$$

と表わされ，ここに，

$$l_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} \tag{7.a}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha) - b_{\alpha\beta}w \tag{7.b}$$

$$\phi_\alpha = w_{,\alpha} + b^\lambda_\alpha u_\lambda \tag{7.c}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\beta|_\alpha - u_\alpha|_\beta) \tag{7.d}$$

$$n_\mu = \sqrt{\frac{a}{\overline{a}}}\in^{\alpha\beta}\in_{\lambda\mu}\phi_\alpha l^{\lambda}_{\cdot\beta} \tag{7.e}$$

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\overline{a}}}\in^{\alpha\beta}\in_{\lambda\mu} l^{\lambda}_{\cdot\alpha} l^{\mu}_{\cdot\beta} \tag{7.f}$$

であり，δ^{α}_{β} はKroneckerのデルタ記号，u^{α}, w は変位ベクトルの成分であり，

$$\boldsymbol{u} = u^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha} + w\boldsymbol{n} \tag{8}$$

となり，$(\ )|_{\alpha}$は M 上における共変微分を示す。なお，シェル内任意点における変位ベクトルは，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u} + \zeta\boldsymbol{\beta} \tag{9}$$

と表わせ，ここに，

$$\boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n} \tag{10}$$

である。

シェルの境界 C を考える。C に沿ったパラメータを s とすれば，境界は $\theta^{\alpha} = \theta^{\alpha}(s)$ と与えられる。C 上における単位接線ベクトルと単位外向き法線ベクトルはそれぞれ，

$$\boldsymbol{t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = \boldsymbol{r}_{,s} \tag{11.a}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} \tag{11.b}$$

と定義される。直交ベクトル $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ を s で微分すると以下の微分公式を得る。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ \boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\end{bmatrix}_{,s} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa_t & -\tau_t \\ -\varkappa_t & 0 & \sigma_t \\ \tau_t & -\sigma_t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\\ \boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\end{bmatrix} \tag{12}$$

ここに，σ_t は法曲率，τ_tは測地的捩率，$\varkappa_t$は測地的曲率である。ここで，シェル境界上の直交ベクトルを用いて，(10)式の $\boldsymbol{\beta}$ ベクトルを，

$$\boldsymbol{\beta} = \beta^{*}_{\nu}\,\boldsymbol{\nu} + \beta^{*}_{t}\,\boldsymbol{t} + \beta^{*}\,\boldsymbol{n} \tag{13}$$

と成分表示しておく。

Kirchhoff-Love の仮定に従うと，シェルの変形は表面ひずみテンソル $\gamma_{\alpha\beta}$ と曲率変化テンソル $\varkappa_{\alpha\beta}$ により表わされ，それぞれ，

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{a}}_{\alpha}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}_{\beta} - \boldsymbol{a}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}_{\beta}) \tag{14.a}$$

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -(\bar{\boldsymbol{a}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{n}) \tag{14.b}$$

と定義される。変位成分で(14)式を表わすと，

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(l^{\lambda}_{\cdot\alpha}\, l_{\lambda\beta} + \phi_{\alpha}\phi_{\beta} - a_{\alpha\beta})$$

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -n(\phi_{\alpha}|_{\beta} + b_{\lambda\beta} l^{\lambda}_{\cdot\alpha}) - n_{\lambda}(l^{\lambda}_{\cdot\alpha}|_{\beta} - b^{\lambda}_{\beta}\phi_{\alpha}) + b_{\alpha\beta} \tag{15.a,b}$$

と表わされる。一般に，$\gamma_{\alpha\beta}$ は変位成分とその導関数に関する2次の多項式で表わされ，$\varkappa_{\alpha\beta}$ は n, n_{λ} を含んでいるため $\sqrt{a/\bar{a}}$ の項が現われ無理数となる。なお，$\sqrt{a/\bar{a}}$ は，

$$\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2\gamma^{\alpha}_{\alpha} + 2(\gamma^{\alpha}_{\alpha}\gamma^{\beta}_{\beta} - \gamma^{\alpha}_{\beta}\gamma^{\beta}_{\alpha})}} \tag{16}$$

となる。既往の研究では，変位成分で表示された(15)式の変分を求めているため，$\gamma_{\alpha\beta}$ と $\varkappa_{\alpha\beta}$ の変分量は複雑な式となり，シェルの基礎式を誘導する際，膨大な計算量を必要とする。そこで本研究では，(14)式の変分を変位ベクトルの変分により表わすこととする。$\delta(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\bar{\boldsymbol{a}}_{\alpha}) = 0$ という関係式を用いると，$\gamma_{\alpha\beta}$ と $\varkappa_{\alpha\beta}$ の変分は，

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta\boldsymbol{u}_{,\alpha}\cdot\boldsymbol{a}_{\beta} + \boldsymbol{a}_{\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{u}_{,\beta}) \tag{17.a}$$

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = -\left[(\delta\boldsymbol{u}_{,\alpha})|_{\beta} - \bar{a}^{\kappa\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\beta}\,\delta\boldsymbol{u}_{,\kappa}\right]\cdot\bar{\boldsymbol{n}} \tag{17.b}$$

となり，ここに，

$$\gamma_{\lambda\alpha\beta} = \gamma_{\lambda\alpha}|_{\beta} + \gamma_{\lambda\beta}|_{\alpha} - \gamma_{\alpha\beta}|_{\lambda} \tag{18}$$

である。

3. シェル境界上の変形

シェルの変形が，Kirchhoff-Love の仮定に従う場合，変形後のシェル境界 $\bar{C}$ における接線ベクトル $\bar{\boldsymbol{a}}_t$，外向き法線ベクトル $\bar{\boldsymbol{a}}_{\nu}$ は，次式で与えられる。

$$\bar{a}_t = \bar{r}_{,s} = t^\alpha \bar{a}_\alpha \qquad (19.a)$$

$$\bar{a}_\nu = \bar{a}_t \times \bar{n} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\, \nu_\alpha \bar{a}^\alpha \qquad (19.b)$$

$$|\bar{a}_t| = |\bar{a}_\nu| = \bar{a}_t = \sqrt{1+2\gamma_{tt}} \qquad (19.c)$$

$$\gamma_{tt} = \gamma_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \qquad (19.d)$$

極分解定理によれば，ある質点近傍の変形は (i) 剛体移動 (ii) ひずみの主方向に沿った伸縮 (iii) ひずみの主方向の剛体回転に分けることができる。しかしながら，シェル境界上においては，$\mathbf{t}$ と $\boldsymbol{\nu}$ の方向は一般にひずみの主方向と一致しない。そのため，(ii) の変形に伴い $\mathbf{t}$ と $\boldsymbol{\nu}$ の方向に沿った線素は，伸縮の他に回転を生じることになる。よって，直交ベクトル $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}, \mathbf{n}$ の有限全回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_t$ は，剛体有限回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と，(ii) の変形に伴う有限回転ベクトル $\check{\boldsymbol{\Omega}}_t$ とからなることがわかる。Lagrange の記述方法に従う時，直交ベクトル $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}, \mathbf{n}$ から直交ベクトル $\bar{a}_\nu, \bar{a}_t, \bar{n}$ への変換は (i) $\bar{a}_t$ によって示される $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}$ ベクトル方向における線素の伸縮，(ii) $\check{\boldsymbol{\Omega}}_t$ ベクトルによる有限回転，(iii) $\boldsymbol{\Omega}$ ベクトルによる有限回転から成り立っている。有限全回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_t$ を用いて直交ベクトル $\bar{a}_\nu, \bar{a}_t, \bar{n}$ を表わすと，

$$\bar{a}_\nu = \bar{a}_t\left[\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Omega}_t \times \boldsymbol{\nu} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_t \times (\boldsymbol{\Omega}_t \times \boldsymbol{\nu})}{2\cos^2\frac{\omega_t}{2}}\right] \qquad (20.a)$$

$$\bar{a}_t = \bar{a}_t\left[\mathbf{t} + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{t} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_t \times (\boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{t})}{2\cos^2\frac{\omega_t}{2}}\right] \qquad (20.b)$$

$$\bar{n} = \left[\mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{n} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_t \times (\boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{n})}{2\cos^2\frac{\omega_t}{2}}\right] \qquad (20.c)$$

となり，ここに，

$$\sin\omega_t = |\boldsymbol{\Omega}_t| \qquad (21)$$

である。なお，$\boldsymbol{\Omega}, \check{\boldsymbol{\Omega}}_t, \boldsymbol{\Omega}_t$ ベクトルと変位ベクトルとの関係は，本研究では直接必要としないため省略したが，文献[4]～[7]に詳しく述べられている。

(20)式より，$\boldsymbol{\Omega}_t$ ベクトルと $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}, \mathbf{n}$ ベクトルとの内積が次式のように求まる。

$$2\boldsymbol{\Omega}_t \cdot \boldsymbol{\nu} = \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{t} \qquad (22.a)$$

$$2\boldsymbol{\Omega}_t \cdot \mathbf{t} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nu} - \bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{n} \qquad (22.b)$$

$$2\boldsymbol{\Omega}_t \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\nu} \qquad (22.c)$$

ここに，$\bar{\boldsymbol{\nu}}, \bar{\mathbf{t}}$ は単位ベクトルであり，

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\bar{a}_\nu}{\bar{a}_t} \qquad (23.a)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{\bar{a}_t}{\bar{a}_t} \qquad (23.b)$$

と表わされる。

4. 内力による仮想仕事

Lagrange の手法を用いた場合，Kirchhoff－Loveの仮定の下で，内力による仮想仕事は[4)～7)]

$$IVW = \iint_M \left(N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}\delta\varkappa_{\alpha\beta} \right) dA \qquad (24)$$

となり，ここに $N^{\alpha\beta}$ と $M^{\alpha\beta}$ はそれぞれ，対称な断面力テンソル，曲げモーメントテンソル（第2種のPiola－Kirchhoff形のテンソル）である。(17)式を(24)式へ代入し，部分積分を行い整理すると，

$$IVW = -\iint_M \left[(N^{\alpha\beta}\bar{a}_\alpha)|_\beta + (M^{\alpha\beta}\bar{a}^{\varkappa\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\beta}\bar{n})|_\varkappa + (M^{\alpha\beta}\bar{n})|_{\alpha\beta} \right] \cdot \delta u \, dA + \int_c \left[N^{\alpha\beta}\bar{a}_\beta + (M^{\alpha\beta}\bar{n})|_\beta + M^{\varkappa\beta}\bar{a}^{\alpha\lambda}\gamma_{\lambda\varkappa\beta}\bar{n} \right]\nu_\alpha \cdot \delta u \, dS$$
$$- \int_c M^{\alpha\beta} t_\beta \nu_\alpha \bar{n} \cdot \delta u_{,s} \, dS - \int_c M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta \underline{\bar{n}\cdot\delta u_{,\nu}} \, dS \qquad (25)$$

と表わされる。Kirchhoff-Loveの仮定に基づく場合，境界上における仮想仕事は，一般に4個のパラメータの変分量で表わされるが，(25)式に示すように下線部分の項が存在するために，このままの形では4個のパラメータの変分量で境界上の仮想仕事を表わすことはできない。文献[12]では，$\bar{n}\cdot\delta u_{,\nu}$ の項を δu ともう一つのパラメータの変分量で表わすことができないため，幾何学的境界条件式が提示されていず，さらに力学的境界条件式においても下線部分の寄与項が無視されている。このように，既往の研究では，$\bar{n}\cdot\delta u_{,\nu}$ に相当する項に近似がなされており，そのため精確な基礎式が得られていない。

さて，$\bar{n}\cdot\delta u_{,\nu}$ を4個のパラメータの変分量で表わすことを考える。(4.c) 式および，

$$\bar{a}_\alpha = \nu_\alpha \bar{r}_{,\nu} + t_\alpha \bar{r}_{,s} \tag{26}$$

なる関係式[11]を用いると，変形後の法線ベクトルは，

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\left(\bar{r}_{,\nu} \times \bar{r}_{,s}\right) \tag{27}$$

となる。(27)式を(19.b)式に代入すると，

$$\bar{a}_\nu = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\left(\bar{a}_t^2\, \bar{r}_{,\nu} - \bar{b}_t\, \bar{r}_{,s}\right) \tag{28}$$

と表わされ，ここに，

$$\bar{b}_t = \nu^\alpha t^\beta\, \bar{a}_{\alpha\beta} \tag{29}$$

である。(28)式を $\bar{r}_{,\nu}$ について解くと，

$$\bar{r}_{,\nu} = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_t^2}\bar{r}_{,s} + \frac{1}{\bar{a}_t^2}\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\;\bar{a}_\nu \tag{30}$$

と求まる。(30)式および $\bar{a}_\nu, \bar{a}_t, \bar{n}$ ベクトルの直交性を用いると，$\bar{n}\cdot\delta u_{,\nu}$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}\bar{n}\cdot\delta u_{,\nu} &= \bar{n}\cdot\delta\bar{r}_{,\nu}\\ &= \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_t^2}\bar{n}\cdot\delta u_{,s} - \frac{1}{\bar{a}_t}\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\;\bar{\nu}\cdot\delta\bar{n}\end{aligned} \tag{31.a,b}$$

次に(31.b)式の右辺第2項について考える。境界上における変位ベクトルを

$$u = u_\nu \boldsymbol{\nu} + u_t \boldsymbol{t} + w\,\boldsymbol{n} \tag{32}$$

とおくと，変形後の接線ベクトル $\bar{a}_t$ は

$$\bar{a}_t = c_\nu \boldsymbol{\nu} + c_t \boldsymbol{t} + c\,\boldsymbol{n} \tag{33}$$

と表わされ，ここに，

$$c_\nu = u_{\nu,s} + \tau_t w - \kappa_t u_t \tag{34.a}$$

$$c_t = 1 + u_{t,s} + \kappa_t u_\nu - \sigma_t w \tag{34.b}$$

$$c = w_{,s} + \sigma_t u_t - \tau_t u_\nu \tag{34.c}$$

である。(19.b), (23.a), (33)式より，$\bar{\nu}\cdot\delta\bar{n}$ は，

$$\bar{\nu}\cdot\delta\bar{n} = d_\nu\,\delta\beta_\nu^* + d_t\,\delta\beta_t^* + d\,\delta\beta^* \tag{35}$$

となり，ここに，

$$d_\nu = \frac{\{c_t(1+\beta^*) - c\beta_t^*\}}{\bar{a}_t} \tag{36.a}$$

$$d_t = \frac{\{c\beta_\nu^* - c_\nu(1+\beta^*)\}}{\bar{a}_t} \tag{36.b}$$

$$d = \frac{(c_\nu\beta_t^* - c_t\beta_\nu^*)}{\bar{a}_t} \tag{36.c}$$

である。ここで，

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta} = -2\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta} \tag{37}$$

なる関係式が成立することから，$\delta\beta_t^*$ と $\delta\beta^*$ が独立量でなく，$\delta u_{,s}$ と $\delta\beta_\nu^*$ とによって表わされることがわかる。(37)式は(13)式を用いて成分表示すると，

$$(\beta_\nu^*)^2 + (\beta_t^*)^2 + (\beta^*)^2 = -2\beta^* \tag{38}$$

と表わされ，$\delta\beta^*$ について求めると，

$$\delta\beta^* = -\frac{(\beta_\nu^*\,\delta\beta_\nu^* + \beta_t^*\,\delta\beta_t^*)}{1+\beta^*} \tag{39}$$

となる。一方，$\delta\beta_t^* = \delta\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{t}$ より

$$\delta\beta_t^* = -\delta\boldsymbol{u}_{,s}\cdot\bar{\boldsymbol{n}} - \delta\boldsymbol{\beta}\cdot(\bar{\boldsymbol{a}}_t - \boldsymbol{t}) \qquad (40)$$

と表わされ，(33)式を用いると，

$$\delta\beta_t^* = -\delta\boldsymbol{u}_{,s}\cdot\bar{\boldsymbol{n}} - C_\nu\delta\beta_\nu^* - (C_t - 1)\delta\beta_t^* - C\delta\beta^* \qquad (41)$$

と求まる。(39)式を(41)式へ代入し，$\delta\beta_t^*$ についてまとめると，

$$\delta\beta_t^* = f_t\,\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{u}_{,s} + f_\nu\,\delta\beta_\nu^* \qquad (42)$$

となり，ここに，

$$f_t = -\frac{1+\beta^*}{\{C_t(1+\beta^*) - C\beta_t^*\}} \qquad (43.a)$$

$$f_\nu = \frac{C\beta_\nu^* - C_\nu(1+\beta^*)}{\{C_t(1+\beta^*) - C\beta_t^*\}} \qquad (43.b)$$

である。(42)式を(39)式に代入し，$\delta\beta^*$ についてまとめると，

$$\delta\beta^* = g_t\,\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{u}_{,s} + g_\nu\,\delta\beta_\nu^* \qquad (44)$$

となり，ここに，

$$g_t = -\frac{f_t\,\beta_t^*}{1+\beta^*} \qquad (45.a)$$

$$g_\nu = -\frac{\beta_\nu^* + f_\nu\beta_t^*}{1+\beta^*} \qquad (45.b)$$

である。以上で，$\delta\beta_t^*$ と $\delta\beta^*$ が4個のパラメータの変分量によって表わされたことになる。(35)式に(42),(44)式を代入して整理すると，

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}\cdot\delta\bar{\boldsymbol{n}} = h_t\,\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{u}_{,s} + h_\nu\,\delta\beta_\nu^* \qquad (46)$$

となり，ここに，

$$h_t = d_t\,f_t + d\,g_t \qquad (47.a)$$

$$h_\nu = d_\nu + d_t\,f_\nu + d\,g_\nu \qquad (47.b)$$

である。(31.b),(46)式を(25)式に代入し，部分積分を行なうと，内力による仮想仕事は，

$$\begin{aligned}\mathrm{IVW} = &-\iint_M\Big\{(N^{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)|_\beta + (M^{\alpha\beta}\bar{a}^{\kappa\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{n}})|_\kappa \\ &+ (M^{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{n}})|_{\alpha\beta}\Big\}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dA + \int_c\Big\{N^{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{a}}_\beta + M^{\kappa\beta}\bar{a}^{\alpha\lambda}\gamma_{\lambda\kappa\beta}\bar{\boldsymbol{n}} \\ &+ (M^{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{n}})|_\beta\Big\}\nu_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{u}\,ds + \int_c\Big[M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\Big\{t_\beta + \Big(\frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_t^2} - h_t\Big)\nu_\beta\Big\}\times \\ &\bar{\boldsymbol{n}}\Big]_{,s}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,ds + \int_c M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta\frac{1}{\bar{a}_t}\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\,h_\nu\,\delta\beta_\nu^*\,ds \\ &+ \sum_k \boldsymbol{R}_k^*\cdot\delta\boldsymbol{u}_k\end{aligned} \qquad (48)$$

と表わされ，ここに，

$$\boldsymbol{R}^* = M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\Big\{\nu_\beta\Big(h_t - \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_t^2}\Big) - t_\beta\Big\}\bar{\boldsymbol{n}} \qquad (49.a)$$

$$\boldsymbol{R}_k^* = \boldsymbol{R}^*(S_k + 0) - \boldsymbol{R}^*(S_k - 0) \qquad (49.b)$$

であり，S_k ($k = 1, 2, \cdots K$) は境界 C 上の隅点 M_k における s 座標を示す。

5. 外力による仮想仕事

シェル中央面に荷重が作用するものと仮定し，分布外力ベクトル $\boldsymbol{P} = P^\alpha\boldsymbol{a}_\alpha + P\boldsymbol{n}$，境界力ベクトル $\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{F}_\nu\boldsymbol{\nu} + \hat{F}_t\boldsymbol{t} + \hat{F}\boldsymbol{n}$，境界モーメントベクトル $\hat{\boldsymbol{K}} = -\hat{K}_t\boldsymbol{\nu} + \hat{K}_\nu\boldsymbol{t} + \hat{K}\boldsymbol{n}$ を考える。これらの外力ベクトルによりなされる仮想仕事は，

$$\mathrm{EVW} = \iint_M \boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dA + \int_c(\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\delta\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{K}}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t)\,ds \qquad (50)$$

と表わされる。[4)〜7)] シェルの変形が Kirchhoff－Love の仮定に基づく限り，外力による仮想仮定も，内力によるものと同様に，4個のパラメータの変分量で表わされる必要がある。そこで(22)式を用いて，(50)式の下線部分について考える。有限全回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_t$ の変分と境界上のベクトル $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$ との内積はそれぞれ，

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t = \frac{1}{2}\delta(\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{t}) \qquad (51.a)$$

$$\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t = \frac{1}{2}\delta(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nu} - \bar{\boldsymbol{\nu}}\cdot\boldsymbol{n}) \qquad (51.b)$$

$$\mathbf{n}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t=\frac{1}{2}\delta(\bar{\boldsymbol{\nu}}\cdot\mathbf{t}-\bar{\mathbf{t}}\cdot\boldsymbol{\nu}) \tag{51.c}$$

と表わされる。ここで，(23.b)，(19)式を用いると，

$$\delta\bar{\mathbf{t}}=\frac{1}{\bar{a}_t}\delta\mathbf{u}_{,s}-\frac{1}{\bar{a}_t^3}\bar{\mathbf{a}}_t(\bar{\mathbf{a}}_t\cdot\delta\mathbf{u}_{,s}) \tag{52}$$

となり，このことを考慮すれば，(51)式は $\delta\mathbf{u}$，$\delta\beta_\nu^*$ を用いて次式のように書き直せる。

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t=\mathbf{q}_\nu\cdot\delta\mathbf{u}_{,s}+q_\nu\delta\beta_\nu^* \tag{53.a}$$

$$\mathbf{t}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t=\mathbf{q}_t\cdot\delta\mathbf{u}_{,s}+q_t\delta\beta_\nu^* \tag{53.b}$$

$$\mathbf{n}\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t=\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{u}_{,s}+q\,\delta\beta_\nu^* \tag{53.c}$$

ここに，

$$\mathbf{q}_\nu=q_{\nu\nu}^*\boldsymbol{\nu}+q_{\nu t}^*\mathbf{t}+q_{\nu n}^*\mathbf{n} \tag{54.a}$$

$$\mathbf{q}_t=q_{t\nu}^*\boldsymbol{\nu}+q_{tt}^*\mathbf{t}+q_{tn}^*\mathbf{n} \tag{54.b}$$

$$\mathbf{q}=q_\nu^*\boldsymbol{\nu}+q_t^*\mathbf{t}+q_n^*\mathbf{n} \tag{54.c}$$

$$q_t=\frac{\bar{a}_t-C_\nu f_\nu+C_t}{2\bar{a}_t} \tag{54.d}$$

$$q_\nu=-\frac{f_\nu}{2} \tag{54.e}$$

$$q=\frac{C-C_\nu g_\nu}{2\bar{a}_t} \tag{54.f}$$

$$q_{\nu\nu}^*=-\frac{1}{2}\left(\frac{C\,C_\nu}{\bar{a}_t^3}+f_t n^\alpha\nu_\alpha\right) \tag{54.g}$$

$$q_{\nu t}^*=-\frac{1}{2}\left(\frac{C\,C_t}{\bar{a}_t^3}+f_t n^\alpha t_\alpha\right) \tag{54.h}$$

$$q_{\nu n}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{a}_t}-\frac{C^2}{\bar{a}_t^3}-f_t n\right) \tag{54.i}$$

$$q_{t\nu}^*=\frac{1}{2}\left\{-\frac{C_\nu f_t n^\alpha\nu_\alpha}{\bar{a}_t}-\frac{\beta_t^*}{\bar{a}_t}+\frac{C_\nu(C_\nu\beta_t^*-C_t\beta_\nu^*)}{\bar{a}_t^3}\right\} \tag{54.j}$$

$$q_{tt}^*=\frac{1}{2}\left\{-\frac{C_\nu f_t n^\alpha t_\alpha}{\bar{a}_t}+\frac{\beta_\nu^*}{\bar{a}_t}+\frac{C_t(C_\nu\beta_t^*-C_t\beta_\nu^*)}{\bar{a}_t^3}\right\} \tag{54.k}$$

$$q_{tn}^*=\frac{1}{2}\left\{-\frac{C_\nu f_t n}{\bar{a}_t}+\frac{C(C_\nu\beta_t^*-C_t\beta_\nu^*)}{\bar{a}_t^3}\right\} \tag{54.l}$$

$$q_\nu^*=\frac{1}{2}\left[-\frac{2+\beta^*}{\bar{a}_t}-\frac{C_\nu\{C\beta_\nu^*-C_\nu(2+\beta^*)\}}{\bar{a}_t^3}-\frac{C_\nu g_t n^\alpha\nu_\alpha}{\bar{a}_t}\right] \tag{54.m}$$

$$q_t^*=\frac{1}{2}\left[-\frac{C_t\{C\beta_\nu^*-C_\nu(2+\beta^*)\}}{\bar{a}_t^3}-\frac{C_\nu g_t n^\alpha t_\alpha}{\bar{a}_t}\right] \tag{54.n}$$

$$q_n^*=\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_\nu^*}{\bar{a}_t}-\frac{C\{C\beta_\nu^*-C_\nu(2+\beta^*)\}}{\bar{a}_t^3}-\frac{C_\nu g_t n}{\bar{a}_t}\right] \tag{54.o}$$

である。(53)式を(50)式へ代入し，部分積分を行ない整理すると，外力による仮想仕事は，

$$EVW=\iint_M\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\,dA+\int_{C_1}(\widehat{\mathbf{F}}^*\cdot\delta\mathbf{u}+\widehat{M}^*\delta\beta_\nu^*)\,ds+\sum_j\widehat{\mathbf{R}}_j^*\cdot\delta\mathbf{u}_j \tag{55}$$

となり，ここに，

$$\widehat{\mathbf{F}}^*=\widehat{\mathbf{F}}-(\widehat{K}_\nu\mathbf{q}_t)_{,s}+(\widehat{K}_t\mathbf{q}_\nu)_{,s}-(\widehat{K}\mathbf{q})_{,s} \tag{56.a}$$

$$\widehat{M}^*=\widehat{K}_\nu q_t-\widehat{K}_t q_\nu+\widehat{K}q \tag{56.b}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}^*=\widehat{K}_\nu\mathbf{q}_t-\widehat{K}_t\mathbf{q}_\nu+\widehat{K}\mathbf{q} \tag{56.c}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_j^*=\widehat{\mathbf{R}}^*(s_j+0)-\widehat{\mathbf{R}}^*(s_j-0) \tag{56.d}$$

であり，C_1 は $\widehat{\boldsymbol{F}}^*$ または $\widehat{M}^*$ の中で，少なくとも一つの成分が規定されている境界を示している。

6. 平衡方程式と境界条件式

仮想仕事の原理より，$IVW=EVW$ が成り立ち，これより Kirchhoff-Love の仮定に基づく薄肉シェルの平衡方程式が，

$$\mathbf{T}^\beta|_\beta+\mathbf{P}=0 \tag{57}$$

と求まり，ここに，

$$\mathbf{T}^\beta=T^{\alpha\beta}\bar{\mathbf{a}}_\alpha+Q^\beta\bar{\mathbf{n}} \tag{58.a}$$

$$T^{\alpha\beta}=N^{\alpha\beta}-M^{\kappa\beta}\bar{b}_\kappa^\alpha \tag{58.b}$$

$$Q^{\beta}=M^{\alpha\beta}|_{\alpha}+M^{\alpha\kappa}\bar{a}^{\beta\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\kappa} \qquad (58.c)$$

である。一方，力学的境界条件式は，

$$\mathbf{F}^*=\hat{\mathbf{F}}^* \quad \text{and} \quad M^*=\tilde{M}^* \quad \text{on} \quad C_1 \qquad (59.a)$$

$$\mathbf{R}_j^*=\hat{\mathbf{R}}_j^* \quad \text{at each} \quad M_j\in C_1 \qquad (59.b)$$

となり，ここで，

$$\mathbf{F}^*=\mathbf{T}^{\beta}\nu_\beta+\left[M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\left\{t_\beta+\nu_\beta\left(\frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_t^2}-\hbar_t\right)\right\}\bar{\mathbf{n}}\right]_{,s} \qquad (60.a)$$

$$M^*=M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta\frac{1}{\bar{a}_t}\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\,\hbar_\nu \qquad (60.b)$$

である。幾何学的境界条件式は，

$$\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}} \quad \text{and} \quad \beta_\nu^*=\tilde{\beta}_\nu^* \quad \text{on} \quad C_2 \qquad (61.a)$$

$$\mathbf{u}_j=\hat{\mathbf{u}}_j \quad \text{at each} \quad M_i\in C_2 \qquad (61.b)$$

と求まり，ここに，C_2 は $\hat{\mathbf{u}}$ または $\tilde{\beta}_\nu^*$ の中で，少なくとも一つの成分が規定されている境界を示している。

ここで，ベクトル表示された方程式を，変形前のベクトル方向について成分表示することを考える。まず，平衡方程式について考え，(57)式を $\mathbf{a}_\alpha$，$\mathbf{n}$ ベクトル方向に分解して成分表示すると，

$$(l^{\alpha}_{\cdot\kappa}T^{\kappa\beta}+n^\alpha Q^\beta)|_\beta-b^\alpha_\beta(\phi_\kappa T^{\kappa\beta}+nQ^\beta)+P^\alpha=0$$

$$(62.a,b)$$

$$b_{\alpha\beta}(l^\alpha_{\cdot\kappa}T^{\kappa\beta}+n^\alpha Q^\beta)+(\phi_\kappa T^{\kappa\beta}+nQ^\beta)|_\beta+P=0$$

となる。力学的境界条件式については，C 上の直交ベクトル $\boldsymbol{\nu}$，$\mathbf{t}$，$\mathbf{n}$ 方向に分解して成分表示すると，シェル境界の隅点における境界条件式は省略することとし，(59.a)式より，

$$(T^{\alpha\beta}l^{\kappa}_{\cdot\alpha}\nu_\beta+Q^\beta n^\kappa\nu_\beta+T_{n,s}n^\kappa-T_n\bar{b}^\kappa_\mu t^\mu)\nu_\kappa$$

$$=\tilde{F}_\nu+I_{1,s}-\kappa_t I_2+\tau_t I_3 \qquad (63.a)$$

$$(T^{\alpha\beta}l^{\kappa}_{\cdot\alpha}\nu_\beta+Q^\beta n^\kappa\nu_\beta+T_{n,s}n^\kappa-T_n\bar{b}^\kappa_\mu t^\mu)t_\kappa$$

$$=\tilde{F}_t+I_{2,s}+\kappa_t I_1-\sigma_t I_3 \qquad (63.b)$$

$$T^{\alpha\beta}\phi_\alpha\nu_\beta+Q^\beta n\nu_\beta+T_{n,s}n=\tilde{F}+I_{3,s}-\tau_t I_1+\sigma_t I_2 \qquad (63.c)$$

と表わされ，ここに，

$$T_n=M^{\alpha\beta}\nu_\alpha\left\{t_\beta+\nu_\beta\left(\frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_t^2}-\hbar_t\right)\right\} \qquad (64.a)$$

$$I_1=-\tilde{K}_\nu\, q^*_{t\nu}+\tilde{K}_t\, q^*_{\nu\nu}-\hat{K}\, q^*_\nu \qquad (64.b)$$

$$I_2=-\tilde{K}_\nu\, q^*_{tt}+\tilde{K}_t\, q^*_{\nu t}-\hat{K}\, q^*_t \qquad (64.c)$$

$$I_3=-\tilde{K}_\nu\, q^*_{tn}+\tilde{K}_t\, q^*_{\nu n}-\hat{K}\, q^*_n \qquad (64.d)$$

である。なお，幾何学的境界条件式の変位に関する項は，(8) 式あるいは(32)式を用いて容易に成分表示することができる。

7. 考察

本論文では，微小ひずみの仮定を用いずに，薄肉シェルの平衡方程式および境界条件式を，仮想仕事の原理を用いて誘導した。その際，曲率変化テンソルに何の近似も行なわないため，(14.b)式は無理数となっている。一方，文献[11]では，変位およびその導関数に関する3次の多項式で表わされる新たな曲率変化テンソル

$$\chi_{\alpha\beta}=-\left(\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\,\bar{b}_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta}\right)+b_{\alpha\beta}\gamma^\kappa_\kappa \qquad (65)$$

を導入し，シェルの基本式を誘導している。しかしながら，文献[11]においても述べられているように，厳密な曲率変化テンソルとは線形項が一致するのみであり，$\chi_{\alpha\beta}$ を用いる限り新たな曲率変化テンソルの導入段階において，既に微小ひずみの仮定を導入したこととなる。文献[12]においては，Budiansky[13]により導入された修正曲率変化テ

ンソル $\rho_{\alpha\beta}=\varkappa_{\alpha\beta}+(b^{\kappa}_{\alpha}\gamma_{\kappa\beta}+b^{\kappa}_{\beta}\gamma_{\kappa\alpha})/2$ を用いてシェルの基本式を求めている。しかしながら，文献[12]においては(25)式の下線部分 $\vec{n}\cdot\delta u_{,\gamma}$ に相当する項が最後まで残り，仮想仕事が4個のパラメータの変分量で表わされていない。

本研究により得られた平衡方程式は，文献[4]~[7]における結果と一致しており，また文献[12]において，$\rho_{\alpha\beta}$ の付加項を除いて考えると，本結果と一致することから，Kirchhoff-Love の仮定に基づき，有限回転を伴う薄肉シェルの非線形理論において，(62)式は精確な平衡方程式であると考えられる。なお，文献[11]においては，$\varkappa_{\alpha\beta}$ を用いているために，T^{β} に相当する項において，無理数 n, n_{λ} が含まれておらず，精確な平衡方程式となっていない。次に，力学的境界条件式について既往の研究と比較検討する。文献[4]~[7]，[12]では，モーメントの条件式が線形理論と一致しているが，これは $\vec{n}\cdot\delta u_{,\nu}$ の寄与項を無視しているためであり，正しく評価すれば(60.b)式に示すように非線形の境界条件式となる。また，モーメント以外の条件式においても，$\vec{n}\cdot\delta u_{,\nu}$ の寄与項が考慮されていない。文献[11]では，類似した条件式が得られているものの，非線形項において差異が見られ，これは $\varkappa_{\alpha\beta}$ を用いたことに由来するものと思われる。幾何学的境界条件式に関しては，本論文と文献[11]の結果は一致しており，変位ベクトル u と回転成分 β^{*}_{ν} が境界上で規定されている。回転成分 β^{*}_{ν} を変位成分を用いて書き直すと，$\beta^{*}_{\nu}=\sqrt{a/\bar{a}}\,\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu}\nu^{\mu}(w_{,\alpha}+b^{\kappa}_{\alpha}u_{\kappa})(\delta^{\lambda}_{\beta}+u^{\lambda}|_{\beta}-b^{\lambda}_{\beta}w)$ となり，$\sqrt{a/\bar{a}}$ があるために無理数となることがわかる。文献[4]~[7]では，変形後の $\bar{\nu}$ ベクトルに関して定義された回転量 β_{ν} が用いられており，他の Lagrange 表現式と矛盾するものと思われる。なお，文献[12]では幾何学的境界条件式は示されていない。また，文献[14]においては，回転量の大きさに応じて，Order評価の基準を4段階に分けて設定しており，有限回転の場合には本論文の結果と一致している。

<参考文献>

1) Koiter,W.T.:On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Proc. K.N.A.W.,Ser.B, 69, 1966.

2) 古賀達蔵：シェル理論の現状，日本航空宇宙学会誌，第26巻，第291号，(1978年).

3) Novozhilov,V.V. et al.:Kinematic Boundary Conditions in Nonlinear Elasticity..., Mech. of Solids, 5, 1975.

4) Pietraszkiewicz,W.:Finite Rotations and Lagrangian....., Polish Scientific Publishers, Warszawa-Poznań 1979.

5) Pietraszkiewicz,W.:Introduction to the Nonlinear Theory..., Ruhr-Univ. Bochum, Mitt.Inst.für Mech.,10, 1977.

6) Pietraszkiewicz,W.:Finite Rotations in the Nonlinear..., In Thin Shell Theory, CISM Courses and Lect., No.240.

7) Pietraszkiewicz,W.:Finite Rotations in Shells, In Theory of Shells, Proc. 3rd IUTAM Symp. TBILISI 1978.

8) Simmonds,J.G. et al.:Nonlinear Shell Theory with a Finite Rotation Vector, Proc. K.N.A.W.,Ser.B, 73,1970.

9) Shrivastava,J.P. et al.:Lagrangian Formulation of Static of Shells, Proc. of ASCE, Vol.96, No.EM5, 1970.

10) 登坂宣好 他：曲面板の非線形理論，日本建築学会論文報告集，第235号，1975年.

11) Pietraszkiewicz,W. et al.:Entirely Lagrangian Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells,Arch. Mech.,33,2,1981.

12) Pietraszkiewicz,W.:Lagrangian Nonlinear Theory of Shells, Arch. Mech., 26, 2, 1974.

13) Budiansky,B.:Notes on Nonlinear Shell Theory, J. Appl. Mech., Trans. ASME, E35, 2, 1968.

14) Pietraszkiewicz,W.:On the Consistent Approximation in ...., Ruhr-Univ. Bochum, Mitt.Inst. für Mech.,26,1981.

GEOMETRICALLY NONLINEAR THEORY OF THIN ELASTIC SHELLS WITH FINITE ROTATIONS

Masashi IURA* and Masaharu HIRASHIMA**

In the nonlinear theory of thin elastic shells, it is often desirable to employ the Lagrangian formulation rather than the Eulerian formulation. However, to the best of our knowledge, no one has succeeded as yet in deriving the consistent fully Lagrangian nonlinear theory of shells undergoing finite rotations without using small strain assumptions.

In the present paper, the Lagrangian formulation is used to develop the geometrically nonlinear theory of thin elastic shells under the Kirchhoff-Love hypotheses. Attention will be paid mainly to derive the two-dimensionally exact equilibrium equations and boundary conditions of the shell. When we obtain the equilibrium equations and the associated geometric and static boundary conditions of the shell utilizing the principle of virtual work, we do not use the small strain assumptions, nor restrict the magnitude of rotations of the shell. The introduction of variations of displacement vectors instead of those of displacement components make it possible to reduce computational efforts for deriving the shell equations. The internal virtual work is evaluated using the exact nonrational tensor of change of curvature. The external virtual work for the couple on the shell boundary is expressed by the inner product of the total finite rotation vector and the boundary couple vector. Consequently the effects of finite rotations at the shell boundary are exactly taken into account.

The resulting equilibrium equations are found accurate within the range of the two-dimensional theory. The present equation of geometric boundary condition for the couple is expressed in terms of the nonlinear terms with respect to the displacements and their derivatives. The nonlinear equations of static boundary conditions obtained in this paper contain the higher order terms which have been neglected in the existing literature.

* Department of Civil and Structural Engineering, Tokyo Denki University

** Department of Civil Engineering, Waseda University