

(20) はりの耐荷力に及ぼす初期変形パターンの影響

○西田 進*, 屋名 博文**

1. まえがき

H形断面はりとは断面の強軸まわりの曲げに対して効果的に抵抗するように設計される。しかし、はりの耐荷力実験¹⁾によると、残留応力や初期変形のために小さな荷重段階からはりにわずかなねじりが生じ、荷重の増加と共に面外への変形はしだいに大きくなり、荷重はついにはりの支えうる最高荷重(耐荷力)に到達する。このようなことから、横倒れ座屈をともしうはりの耐荷力の問題は鋼構造物設計の重要な問題の一つになっている。

本研究は、このはりの実挙動を追跡する解析手法を明確にするとともに、はりの耐荷力に及ぼす初期変形パターンの影響について検討するものである。

研究内容としては、まず、断面剛および断面内無応力の仮定より、任意の初期変形を有するはりの変位関数を導き、これと仮想仕事の原理より初期変形を有するはりの基礎微分方程式と境界条件式を導く²⁾。つぎに、外荷重は比例的に増大するという仮定のとともに全ひずみ理論を用いて非弾性状態における剛性評価を行ない、導いた基礎方程式の弾塑性解析(耐荷力解析)を行なう。最後に、横断面方向および部材軸方向の初期変形パターンのはりの耐荷力に及ぼす影響について検討する。

2. 任意の初期変形を有するはりの基礎微分方程式

はりの基礎方程式の誘導は、文献 3) の手法に任意の初期変形を考慮したものであり、以下にその概略を示す。

2.1 ひずみと変位の関係

薄肉断面部材の部材軸方向に z 座標をとり、横断面方向に図-1に示すような2組の部材固定座標系を用いる。その1つは図心 C を原点とする(x, y, z)座標であり、他の1つは(s, n, z)座標である。ここに s は薄肉中心線に沿ってとった座標であり、 n は外向き法線座標である。

有限変位理論によるひずみ-変位の関係は、変位の2次項まで考慮すると次式ようになる。ただし、軸変位 w の2次項を無視し、せん断ひずみ γ_{yz} および γ_{xz} は(s, n)座標に座標変換した。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (1)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (2)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \quad (5)$$

$$\gamma_{nz} = \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial n} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \quad (6)$$

式(1),(2)および(4)に断面剛の仮定($\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$)を適用すると次の変位をえる。

$$u = (u_s + u_0) - (y - y_s) \sin(\varphi + \varphi_0) - (x - x_s) \left\{ 1 - \cos(\varphi + \varphi_0) \right\} \quad (7)$$

* 金沢工業大学 土木工学科 教授

** 金沢工業大学 大学院(修士課程)

$$V = (V_s + V_0) + (x - x_s) \sin(\varphi + \varphi_0) - (y - y_s) \{1 - \cos(\varphi + \varphi_0)\} \quad (8)$$

ここに、 u_s, v_s はせん断中心 S の x, y 方向変位、 φ は S 点まわりのねじり角であり、 u_0, v_0 および φ_0 は同じ位置における初期変形である。

u および v を S, n 方向変位 ξ, η に座標変換する。

$$\xi = l(u_s + u_0) + m(v_s + v_0) + \rho_s \sin(\varphi + \varphi_0) - \rho_n \{1 - \cos(\varphi + \varphi_0)\} \quad (9)$$

$$\eta = m(u_s + u_0) - l(v_s + v_0) - \rho_n \sin(\varphi + \varphi_0) - \rho_s \{1 - \cos(\varphi + \varphi_0)\} \quad (10)$$

ここに、 l および m は方向余弦 $l = \cos(S, x)$ 、 $m = \cos(S, y)$ であり、

$$\begin{aligned} \rho_s &= m(x - x_s) - l(y - y_s) \\ \rho_n &= l(x - x_s) + m(y - y_s) \end{aligned} \quad (11)$$

次に、薄肉断面部材の厚さ方向のせん断ひずみは小さいことより無視すると、 $\tau_{nz} = 0$ より

$$\frac{\partial w}{\partial n} = - \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial n} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (12)$$

上式に式(7)、(8)および(10)を代入し、 n について積分すると

$$\begin{aligned} w &= w^* - \left[m \{ (u'_s + u'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + (v'_s + v'_0) \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} - l \{ (v'_s + v'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) \right. \\ &\quad \left. - (u'_s + u'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} - \rho_n(\varphi' + \varphi'_0) \right] n \quad (13) \end{aligned}$$

ここに、 w^* は積分定数であり、 $(S, n=0, z)$ での x 方向変位を表す。

静定せん断流によるせん断ひずみは小さいとして無視し、不静定せん断流 q_I のみによるせん断ひずみを考慮すると、薄肉中心線上のせん断ひずみ τ_{sz}^* は $\tau_{sz}^* = q_I / (Gt)$ より、次式をえる。

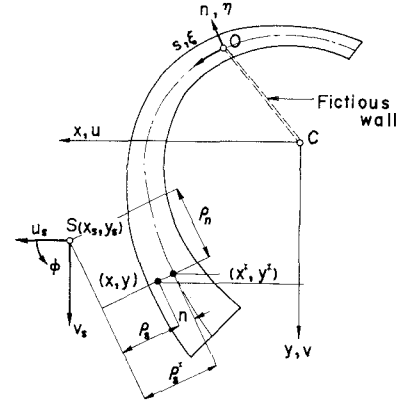


図-1 2つの部材固定座標系

$$\frac{\partial w^*}{\partial S} = \frac{q_I}{Gt} - \frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial u^*}{\partial S} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z} - \frac{\partial v^*}{\partial S} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial z} \quad (14)$$

上式に薄肉中心線上での ξ^*, u^* および v^* を代入して積分すると次式となる。

$$\begin{aligned} w^* &= C(z) - x^* \{ (u'_s + u'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) \\ &\quad + (v'_s + v'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} - y^* \{ (v'_s + v'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) \\ &\quad - (u'_s + u'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} - \Omega_c^*(\varphi' + \varphi'_0) \quad (15) \end{aligned}$$

ここに、 $C(z)$ は積分定数であり、 Ω_c^* は次式に表わされる。

$$\Omega_c^* = \begin{cases} \int_0^S \left(\rho_s^* - \frac{\phi \rho_s^* ds}{\phi \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{1}{t} \right) ds & (\text{閉区間}) \\ \int_0^S \rho_s^* ds & (\text{開区間}) \end{cases} \quad (16)$$

原点 C と S 座標の原点 O の間を図-1に示すようにに仮定の板厚 $t = 0$ なる薄板で結ぶと積分定数 $C(z)$ は図心の軸方向変位 w_c および Ω_c^* を用いて次式のように表わされる。

$$C(z) = w_c + \Omega_c^*(\varphi' + \varphi'_0) \quad (17)$$

式(15)を式(13)に代入して整理すると、

$$w = w_c - x \{ (u'_s + u'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + (v'_s + v'_0) \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} - y \{ (v'_s + v'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) - (u'_s + u'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} - \rho_n(\varphi' + \varphi'_0)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} - y \{ (U'_s + U'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) \\ & - (U'_s + U'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} - \omega_n (\varphi' + \varphi'_0) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } \omega_n &= \Omega^* - \rho_n n - \int_A \Omega^* dA / A, \\ x &= x^* + mn, \quad y = y^* - ln \end{aligned}$$

式(3)に式(7),(8)および(18)を代入し, 初期状態 ($u=v=w=0$) で軸ひずみ $\bar{\epsilon}_z$ が零となるように零点補正を行なうと次のひずみをえる。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_z &= \epsilon_z - \epsilon_z(0) = w'_c + \frac{1}{2} (U_s'^2 + 2U'_s U'_0 + U_0'^2 + 2U'_s V'_0) \\ &+ \left[\left\{ y_s (U'_s + U'_0) - x_s (V'_s + V'_0) \right\} \cos(\varphi + \varphi_0) + \left\{ x_s \right. \right. \\ &\cdot (U'_s + U'_0) + y_s (V'_s + V'_0) \left. \right\} \sin(\varphi + \varphi_0) \right] (\varphi' + \varphi'_0) \\ &- \left\{ (y_s U'_0 - x_s V'_0) \cos \varphi_0 + (x_s U'_0 + y_s V'_0) \sin \varphi_0 \right\} \varphi'_0 \\ &- x \left\{ (U'_s + U'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + (V'_s + V'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \right. \\ &- U'_0 \cos \varphi_0 - V'_0 \sin \varphi_0 \left. \right\} - y \left\{ (U'_s + V'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) \right. \\ &- (U'_s + U'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) - V'_0 \cos \varphi_0 + U'_0 \sin \varphi_0 \left. \right\} \\ &- \omega_n \varphi' + \frac{1}{2} \{ (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 \} (\varphi'^2 + 2\varphi' \varphi'_0) \quad (19) \end{aligned}$$

せん断ひずみの式(5)も, 同様にして次のように整理できる。

$$\bar{\gamma}_{sz} = \frac{1}{2} \theta \varphi', \quad \theta = \begin{cases} \frac{\oint \rho_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \cdot \frac{1}{t} + 2n \quad (\text{閉区間}) \\ 2n \quad (\text{開区間}) \end{cases} \quad (20)$$

外荷重による変位増分も同様にして求まる。

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u - u(0) = u_s - (y - y_s) \{ \sin(\varphi + \varphi_0) - \sin \varphi_0 \} \\ &- (x - x_s) \{ 1 - \cos(\varphi + \varphi_0) + \cos \varphi_0 \} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v - v(0) = v_s + (x - x_s) \{ \sin(\varphi + \varphi_0) - \sin \varphi_0 \} \\ &- (y - y_s) \{ 1 - \cos(\varphi + \varphi_0) + \cos \varphi_0 \} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w - w(0) = w_c - x \{ (U'_s + U'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) \\ &+ (V'_s + V'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) - U'_0 \cos \varphi_0 - V'_0 \sin \varphi_0 \} \\ &- y \{ (V'_s + V'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) - (U'_s + U'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \\ &- V'_0 \cos \varphi_0 + U'_0 \sin \varphi_0 \} - \omega_n \varphi' \quad (23) \end{aligned}$$

2.2 薄肉断面部材のつり合方程式と境界条件

部材に分布して作用する外力と両端に作用する表面力を受け, 空間でつり合っている初期変形のある部材を考えると, 仮想仕事の原理は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_A (\sigma_z \delta \bar{\epsilon}_z + 2\tau_{sz} \delta \bar{\gamma}_{sz}) dA dz \\ &= \int_0^L \int_A (\rho_{xd} \delta \bar{u} + \rho_{yd} \delta \bar{v} + \rho_{zd} \delta \bar{w}) dA dz \\ &+ \left[n \int_A (\bar{\sigma}_z \delta \bar{w} + \bar{\tau}_{sz} \delta \bar{\xi} + \bar{\tau}_{nz} \delta \bar{\eta}) dA \right]_0^L \quad (24) \end{aligned}$$

ここに, ρ_{xd} , ρ_{yd} , ρ_{zd} はそれぞれ基準状態での x , y , z 方向への単位体積あたりの分布外力であり, $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{sz}$, $\bar{\tau}_{nz}$ は両端断面の基準状態での z , s , n 方向への表面力である。

式(24)に式(19)~(23)を代入し, 部分積分を行なうと, $0 < z < L$ において次の基礎微分方程式をえる。

$$N' + \rho_z = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & - \{ M_y \cos(\varphi + \varphi_0) + M_x \sin(\varphi + \varphi_0) \}' + \left[N \{ (U'_s + U'_0) \right. \\ & + \{ y_s \cos(\varphi + \varphi_0) + x_s \sin(\varphi + \varphi_0) \} (\varphi' + \varphi'_0) \left. \right] + \rho_x \\ & - \{ m_y \cos(\varphi + \varphi_0) + m_x \sin(\varphi + \varphi_0) \}' = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ M_x \cos(\varphi + \varphi_0) - M_y \sin(\varphi + \varphi_0) \}' + \left[N \{ (V'_s + V'_0) \right. \\ & - \{ x_s \cos(\varphi + \varphi_0) - y_s \sin(\varphi + \varphi_0) \} (\varphi' + \varphi'_0) \left. \right] + \rho_y \\ & + \{ m_x \cos(\varphi + \varphi_0) - m_y \sin(\varphi + \varphi_0) \}' = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_\omega'' - M_x \{ (U'_s + U'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + (V'_s + V'_0) \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} - M_y \{ (V'_s + V'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) - (U'_s + U'_0) \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} + \left[N \left\{ y_s (U'_s + U'_0) - x_s (V'_s + V'_0) \right\} \right. \\ & \cdot \cos(\varphi + \varphi_0) + \{ x_s (U'_s + U'_0) + y_s (V'_s + V'_0) \} \sin(\varphi + \varphi_0) \left. \right] \\ & + K (\varphi' + \varphi'_0) - N \left[\{ x_s (U'_s + U'_0) + y_s (V'_s + V'_0) \} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos(\varphi + \varphi_0) - \{y_s(u'_s + u'_0) - x_s(v'_s + v'_0)\} \sin(\varphi + \varphi_0) \\ & \cdot (\varphi' + \varphi'_0) + T'_s + m_t \cos(\varphi + \varphi_0) - m_{tn} \sin(\varphi + \varphi_0) \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) + K(\varphi' + \varphi'_0) + m_\omega \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & + m_x \{ (u'_s + u'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + (v'_s + v'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} \\ & + m_y \{ (v'_s + v'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) - (u'_s + u'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) \} \\ & + m'_\omega = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

また、 $z = 0$ および l における条件から両端での境界条件式が次のようにえられる。

$$w_c = C_1 \quad \text{または} \quad n \bar{N} = N \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & u_s = C_2 \quad \text{または} \quad n \bar{V}_x = -\{M_y \cos(\varphi + \varphi_0) \\ & + M_x \sin(\varphi + \varphi_0)\}' + N \left[(u'_s + u'_0) + \{y_s \cos(\varphi + \varphi_0) \right. \\ & + x_s \sin(\varphi + \varphi_0)\} (\varphi' + \varphi'_0) \left. \right] - \{m_y \cos(\varphi + \varphi_0) \\ & + m_x \sin(\varphi + \varphi_0)\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & u'_s = C_3 \quad \text{または} \quad n \{ \bar{M}_y \cos(\varphi + \varphi_0) + \bar{M}_x \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} = M_y \cos(\varphi + \varphi_0) + M_x \sin(\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & v_s = C_4 \quad \text{または} \quad n \bar{V}_y = \{M_x \cos(\varphi + \varphi_0) \\ & - M_y \sin(\varphi + \varphi_0)\}' + N \left[(v'_s + v'_0) - \{x_s \cos(\varphi + \varphi_0) \right. \\ & - y_s \sin(\varphi + \varphi_0)\} (\varphi' + \varphi'_0) \left. \right] + \{m_x \cos(\varphi + \varphi_0) \\ & - m_y \sin(\varphi + \varphi_0)\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & v'_s = C_5 \quad \text{または} \quad n \{ \bar{M}_x \cos(\varphi + \varphi_0) - \bar{M}_y \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} = M_x \cos(\varphi + \varphi_0) - M_y \sin(\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \varphi = C_6 \quad \text{または} \quad n \left[\bar{T} \cos(\varphi + \varphi_0) - \bar{T}_n \right. \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) + \bar{M}_x \{ (u'_s + u'_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + (v'_s + v'_0) \\ & \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \} - \bar{M}_y \{ (u'_s + u'_0) \sin(\varphi + \varphi_0) - (v'_s + v'_0) \\ & \cdot \cos(\varphi + \varphi_0) \} \left. \right] = T_s + M'_\omega + N \left[\{ (u'_s + u'_0) y_s \right. \end{aligned}$$

3. 等価換算断面法による薄肉部材の剛性評価

はりに作用する荷重の増加にとめない、断面内に塑性域が生じ、この塑性化により部材の剛性が低下する。この章では、剛性の低下を考慮した非弾性域における剛性の評価法について検討する。

解析において用いる材料の応力・ひずみ関係として図-2に示す完全弾塑性ひずみ硬化体のもを用いる。

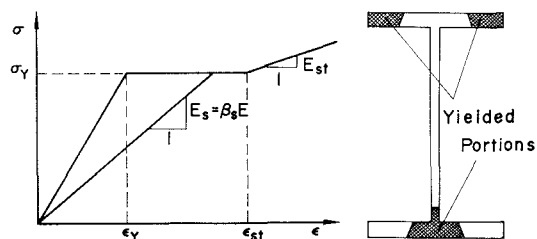


図-2 材料の応力・ひずみ関係と降伏断面

鉄筋コンクリート部材の応力計算に用いられるヤング係数比の考え方を、図-2に示す非弾性状態にある薄肉断面部材に適用すると、全ひずみ理論による非弾性域のヤング係数 E_s はヤング係数比 n に相当する β_s を用いて表わすことができる。これより、

$$\sigma_z = \beta_s E \epsilon_z, \quad \tau_{sz} = 2 \beta_g G \gamma_{sz} \quad (36)$$

をえる。ここに、 $\beta_g = 2(1 + \nu_e) / (2 + 2\nu_p + \epsilon_p / \epsilon_y)$ 。

薄肉断面部材の基礎方程式を導いたさいに用いた断面力の定義式に、式(36)の関係を適用すると次式をえる。

$$N = \int_A \sigma_z dA = \int_A \beta_s E \left\{ \tilde{w}'_c - x \tilde{u}''_s - y \tilde{v}''_s - \omega_n \varphi' + \frac{1}{2} \rho_{sn} (\varphi'^2 + 2\varphi'\varphi'_0) \right\} dA$$

$$\therefore N = EA^* \tilde{w}'_c - EG_y^* \tilde{u}''_s - EG_x^* \tilde{v}''_s - EG_\omega^* \varphi' + \frac{1}{2} EG_p^* (\varphi'^2 + 2\varphi'\varphi'_0) \quad (37)$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA = -EG_y^* \tilde{w}'_c + EI_y^* \tilde{u}''_s + EI_{xy}^* \tilde{v}''_s + EI_{\omega y}^* \varphi' - \frac{1}{2} EI_{py}^* (\varphi'^2 + 2\varphi'\varphi'_0) \quad (38)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = EG_x^* \tilde{w}'_c - EI_{xy}^* \tilde{u}''_s - EI_x^* \tilde{v}''_s - EI_{\omega x}^* \varphi' + \frac{1}{2} EI_{px}^* (\varphi'^2 + 2\varphi'\varphi'_0) \quad (39)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma_z \omega_n dA = EG_\omega^* \tilde{w}'_c - EI_{\omega y}^* \tilde{u}''_s - EI_{\omega x}^* \tilde{v}''_s - EI_\omega^* \varphi' + \frac{1}{2} EI_{p\omega}^* (\varphi'^2 + 2\varphi'\varphi'_0) \quad (40)$$

$$K = \int_A \sigma_z \{ (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 \} dA = EG_p^* \tilde{w}'_c - EI_{py}^* \tilde{u}''_s - EI_{px}^* \tilde{v}''_s - EI_{p\omega}^* \varphi' + \frac{1}{2} EI_p^* (\varphi'^2 + 2\varphi'\varphi'_0) \quad (41)$$

$$T_s = \int_A \tau_{sz} \Theta dA = \int_A 2\beta_\Theta G \Theta \left(\frac{1}{2} \Theta \varphi' \right) dA = GK_T^* \varphi' \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } \tilde{w}'_c = w'_c + \frac{1}{2} (u_s'^2 + 2u_s' u_o' + v_s'^2 + 2v_s' v_o') + \left[\{ y_s (u_s' + u_o') - x_s (v_s' + v_o') \} \cos(\varphi + \varphi_0) \right. \\ \left. + \{ x_s (u_s' + u_o') + y_s (v_s' + v_o') \} \sin(\varphi + \varphi_0) \right] (\varphi' + \varphi'_0) - \{ (y_s u_o' - x_s v_o') \cos \varphi_0 \\ + (x_s u_o' + y_s v_o') \sin \varphi_0 \} \varphi' \end{aligned} \quad (43)$$

$$\tilde{u}''_s = (u_s'' + u_o'') \cos(\varphi + \varphi_0) + (v_s'' + v_o'') \sin(\varphi + \varphi_0) - u_o'' \cos \varphi_0 - v_o'' \sin \varphi_0 \quad (44)$$

$$\tilde{v}''_s = (v_s'' + v_o'') \cos(\varphi + \varphi_0) - (u_s'' + u_o'') \sin(\varphi + \varphi_0) - v_o'' \cos \varphi_0 + u_o'' \sin \varphi_0 \quad (45)$$

また, $A^* \sim I_p^*$ は等価換算断面定数である。その定義式は文献 2) とほぼ同様であるので, 以下にその代表的な値についてのみ示す。

$$\begin{aligned} A^* = \int_A \beta_s dA, \quad G_y^* = \int_A \beta_s x dA, \quad I_x^* = \int_A \beta_s y^2 dA, \quad I_{\omega y}^* = \int_A \beta_s x \omega_n dA \\ K_T^* = \int_A \beta_\Theta \Theta^2 dA, \quad G_\omega^* = \int_A \beta_s \omega_n dA, \quad I_\omega^* = \int_A \beta_s \omega_n^2 dA, \quad I_p^* = \int_A \beta_s \rho_{sn}^2 dA \end{aligned} \quad (46-a \sim h)$$

4. 伝達マトリックス法による耐荷力解析

薄肉断面部材の基礎微分方程式を直接解くことは不可能なので, 以下の解析では面内曲げが支配的な初期不整ばりの耐荷力解析に限定する。

I 形ばりの耐荷力実験¹⁾によればはりの初期変形およびはりの支えうる最

高荷重近傍での面外変形 u および φ は, 面内変形 v に比べて十分小さいことが

報告されている。このことより, 解析では鉛直変形 v の 2 次項以外の高次項は全て小さいとして無視できる。この仮定を断面力と変形の関係式に適用すると式 (47) および (48) をえる。

$$\tilde{w}' = w' + \frac{1}{2} v'^2, \quad \tilde{u}'' = u'' + v''(\varphi + \varphi_0), \quad \tilde{v}'' = v'' \quad (48)$$

面内荷重が支配的

なはりの耐荷力解析を行なうことより、式(25)~(35)において面内に関する断面力の2次項以外の高次項は小さいとして無視できる。この近似を行った基礎方程式および境界条件式と式(48)を1階の常微分方程式系に表示すると右記のマトリックスをえる。

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} w \\ N \\ u \\ \theta_y \\ M_y \\ V_x \\ v \\ \theta_x \\ M_x \\ V_y \\ \varphi \\ p \\ M_z \\ M_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{EA^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\theta_x}{2} & 0 & 0 & \frac{G_y^*}{A^*} u' & 0 & 0 & 0 & w' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y^*} & 0 & 0 & -\frac{G_x^*}{I_y^*} \frac{\theta_x}{2} & 0 & 0 & -v' & 0 & 0 & 0 & \theta_{y1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\varphi' + \varphi_0') 2(\beta + \varphi_0') - \beta_0' & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\beta_0' + \beta_0' \varphi_0') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_x^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_x^*}{I_x^*} \frac{\theta_x}{2} & \frac{1}{EI_x^*} & 0 & \frac{I_{xy}^*}{I_x^*} u' & 0 & 0 & 0 & \theta_{x1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_w^*}{I_w^*} \frac{\theta_x}{2} & 0 & 0 & -\frac{I_{wx}^*}{I_w^*} u' & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_w^*} p' & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (u' + u_0') & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GK^* & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ N \\ u \\ \theta_y \\ M_y \\ V_x \\ v \\ \theta_x \\ M_x \\ V_y \\ \varphi \\ p \\ M_z \\ M_w \end{Bmatrix} \quad (49)$$

$$w' = \frac{G_y^*}{A^*} (u' + v' \varphi_0') + \frac{G_x^*}{A^*} v' + \frac{G_w^*}{A^*} \varphi'$$

$$\theta_{y1} = \frac{G_y^*}{I_y^*} w' - \left(\frac{I_{xy}^*}{I_y^*} + \varphi_0' \right) u' - \frac{I_{wy}^*}{I_y^*} \varphi'$$

$$\theta_{x1} = -\frac{G_x^*}{I_x^*} w' + \frac{I_{xy}^*}{I_x^*} (u' + v' \varphi_0') + \frac{I_{wx}^*}{I_x^*} \varphi'$$

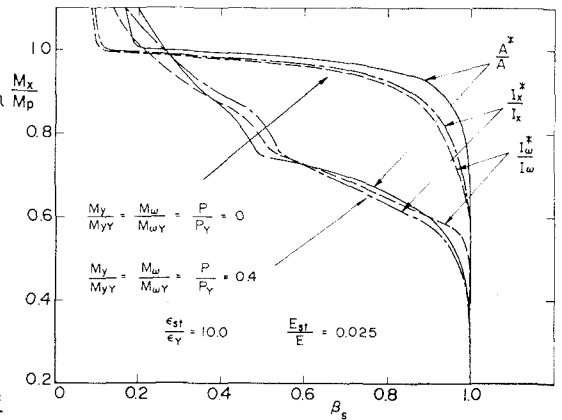
$$p' = \frac{G_w^*}{I_w^*} w' - \frac{I_{wx}^*}{I_w^*} (u' + v' \varphi_0') - \frac{I_{wy}^*}{I_w^*} u'$$

式(49)をルンゲ・クッタ法を用いて数値積分すると格間伝達マトリックス F がえられる。伝達マトリックス法によるはりの具体的な計算方法は文献 4) に詳細に述べられており、ここではその説明を省略する。なお数値計算においては、式(49)のマトリックス内に変形量および曲率を含むため、与えられた初期値に対して断面力および変形量を求め、次に式(47)より曲率を求める。この値を格間伝達マトリックス内に代入して変形量および断面力の第2近似値を求め、スパン中央部のねじり角 $\varphi_{1/2}$ が与えられた精度に収束するまで繰り返し計算を行なう。

5. 数値計算例および考察

数値計算に用いた断面はH-200×100×5.5×8mmのH形断面であり、ヤング係数、ポアソン比および降伏応力として $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 2800 \text{ kgf/cm}^2$ を用いた。なお面内初期たわみ v_0 および材料のひずみ硬化はこれを無視した。

図-3は、はり部材に面内曲げのみが作用する場合および面内曲げに加えて $M_y/M_{yY} = M_w/M_{wY} = P/P_Y = 0.4$ なる荷重が加わる場合の非弾性剛性値 A^*/A , I_x^*/I_x および I_w^*/I_w の変化を示す。



図からわかるように、等価換算断面法を用いると荷重の増加によるはりの剛性低下は弾性域のみ有効とする接線係数理論による場合の剛性低下よりも極端に小さい。したがって、この剛性値を用いてはりの耐荷力解析を行なえば耐荷力値近傍での解の収束性がよい。この図のみひずみ硬化を考慮した。

図-4は $\sin$, 放物線および円弧形状の初期面外変形を有するはりの弾性解析において、はりに生じる最大応力が降伏応力に等しくなる弾性限界モーメントと正規化した細長比との関係を示す。図よ

り、最大初期変位が同じなら三者間の強度差はほぼ無視できることがわかる。

図-5の太線は3種の横断面方向の初期変形パターンを有するはりの耐力値を示し、細線は弾性限界モーメントを示す。ただし、圧縮フランジの最大初期面外変位を $L/1000$ とし、部材軸方向変形は $\sin$ 半波形状とする。図より、いずれの解析においても初期ねじりを有する場合が最も危険側となっている。なお、 $\lambda=1.0$ 近傍で、無次元化した弾性限界モーメント M_{max}/M_y と耐力力 M_u/M_p の差が大きいのは、変形と断面の塑性化の相乗作用によってはりの耐力値が大きく低下するためと思われる。

図-6は、最大初期面外変位が同一で、部材軸方向の実測初期面外変形をモデル化した3種の初期変形パターンに対する計算例で、細線は弾性限界モーメントを、太線は耐力力値を示す。図では $\sin$ 半波形状の初期変形を有する場合が最も危険側となっている。しかし、その強度差は無視できるほど小さい。

6. まとめ

はりの耐力解析の基本である両端単純支持かつ等曲げが作用するはりの耐力挙動に及ぼす初期変形の影響について若干の数値計算を行った。その結果は、次のようにまとめることができる。

- (1) はりの横断面方向の初期変形パターンの耐力におよぼす影響は、その最大値が同じなら、初期ねじりの方が初期面外変形よりやや大きい。
- (2) はりの部材軸方向の初期変形パターンは、 $\sin$ の半波長で代表させることができる。

参考文献

- 1) Fukumoto, Y. et al.: Strength Variation of Laterally Unsupported Beams, Proc. of ASCE, Vol. 106, No. ST1, pp. 165~181, Jan. 1980.
- 2) 山崎徳也, 彦坂 照: 構造解析の基礎, 共立出版, 1978年.
- 3) 西野文雄, 他3名: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, pp. 1~15, 1974年5月.
- 4) 成岡昌夫, 遠田良喜: 伝達マトリックス法 I-2-B, 培風館, 1970年.

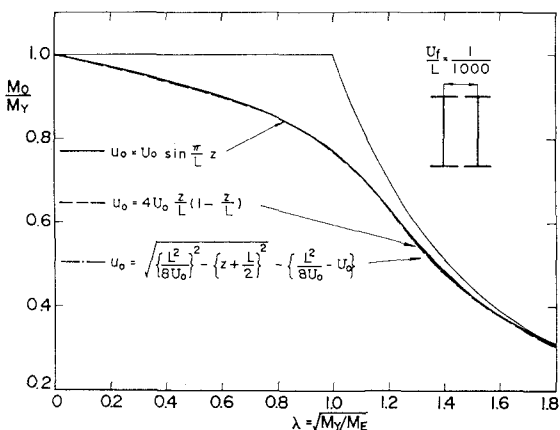


図-4 面外初期変形マ状の限界強度への影響

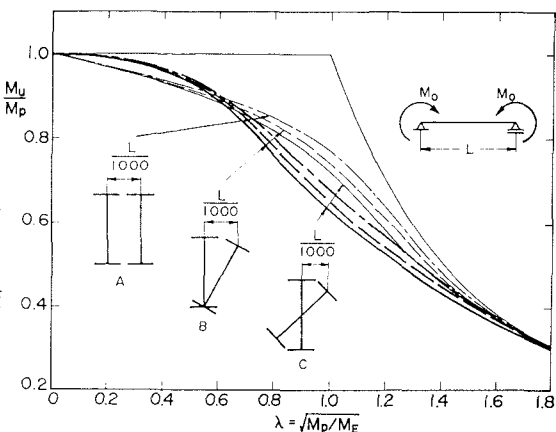


図-5 横断面方向の変形パターンの耐力力への影響

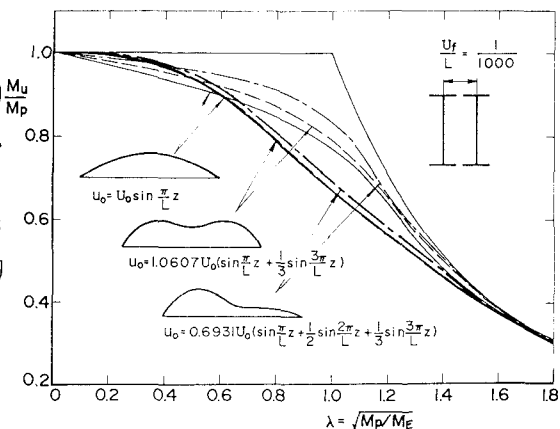


図-6 部材軸方向の変形パターンの耐力力への影響

The Influence of Initial Deformations on the Ultimate Strength of Beams

Susumu Nishida* and Hirofumi Hoshina*

1. Introduction

In the presence of initial imperfections, deflections grow continuously with load and equilibrium of beams is stable. The phenomenon of buckling appears as the indefinite growth of deflections as the load approaches its ultimate strength. The initial deflections and residual stresses may severely weaken the ultimate strength of beams.

Thus, there is need to analyze the buckling of beams with initial imperfections.

2. Differential Equations, Boundary Conditions and Inelastic Stiffnesses

The following assumptions are used: (1) the length is considerably larger than the cross sectional dimensions; (2) the cross sections are not distorted; (3) the shear strain due to shear in equilibrium with the change of normal stress is small and can be neglected; and (4) the shear strain in the middle surface for open intervals of cross section and in the planes normal to that of thin walls is small and can be neglected.

In view of the above assumptions, the three-dimensional expressions of strain-displacement relationships are reduced to one-dimensional expressions and the virtual work principle is used to derive all the equilibrium equations and associated boundary conditions.

A primary source of difficulty in the inelastic analysis of beams is that the normal elastic reference axes lose their significance after the advent of yielding. For the ideal elastic-plastic stress-strain relationship, the inelastic stiffness may be derived using the total strain theory.

3. Transfer Matrix Method

The equilibrium equations, the boundary conditions and the force-displacement relations may be represented by the field transfer matrix. A computer program was developed here to provide the numerical results utilizing the successive approximation method for the solution of nonlinear equations.

4. Numerical Results and Remarks

Ultimate strength of the beams with initial deflections is computed subjected to a uniform bending moment. The boundary conditions are simply supported in vertical, lateral and torsional displacements and free in warping at the both ends. Ultimate strength of the beams considerably decreases with initial deflection. If the maximum initial displacement is equal to the each beams, the small effect of the deformed pattern of initial deflections can be recognized for all range of normalized slenderness ratio.

5. Conclusion

From the numerical examples of the simple supported beams, the effect of the deformed pattern of initial deflections were discussed. Then, it was found that the typical initial deflection of beams can be stand for the first term of Fourier series.

* Department of Civil Engineering, Kanazawa Institute of Technology