

## §1. 序

不規則波中の浮遊物体には、波の周期で変動する1次波浪外力のほかに、長周期漂流力とよばれる非常にゆるやかに変動する2次波浪外力が作用する。この2次外力は不規則波に含まれる各成分波間の非線形干渉により生ずるもので、大きさは1次外力に比べてかなり小さいが、周期が浮体-係留ライン系の固有周期に一致する場合に、浮体の大振幅運動を誘起し、係留ラインに過大な張力を生じさせる可能性があるため、海洋浮遊構造物の設計上重要な外力要因となる。

不規則波中の浮体に作用する2次波浪外力の決定には、入射波スペクトルの主要周波数域において1次ポテンシャルと1次波浪外力に対する応答が精度良く求められていることが必要である[1]。これらの1次量の解析に今日最も汎用されている方法に「境界積分法」と「ハイブリッド要素法」がある。1次ポテンシャル問題におけるこれらの数値解析法の有効性についてはすでに多くの文献（たとえば文献[2]）に報告されており、前者は Faltinsen & Michelsen[3]、Pinkster & Oortmerssen[4]らによつて、また後者は Molin[5]らによつて、規則波中の浮体に作用する定常漂流力の計算に適用されている。これらの数値的手続きは任意形状の3次元浮体を扱える利点を有する反面、係数マトリックスの形成や大次元連立方程式の解に多大な計算労力を必要とするのが難点である。

現実の海洋構造物、たとえば係留ブイ、浮き貯蔵タンク、半潜水式プラットフォームの浮体要素、石油生産・荷役用の articulated column、波エネルギー装置などには、回転対称形を有するものが多い。このような形状の物体に対しては、幾何学の軸対称性を利用することによつて、より能率的な数値解析手法の定式化が可能である。たとえば、境界積分法にポテンシャルのフーリエ級数展開を併用して Fenton[6] は波浪強制力を、また Eatock Taylor & Dolla[7]、Isaacson[8] は運動流体力および動的応答を計算する手続きを提案している。

本稿では、不規則波中の回転対称浮体に作用する2次波浪外力の有効な数値解析手法を探る目的で、まず規則波中の定常漂流力を境界積分法およびハイブリッド要素法を用いて計算する手続きとその数値例が示され、理論解との比較により、これら2つの数値解析手法の解の精度が検討される。

## §2. 1次ポテンシャル問題

## 2-1. 基礎方程式

Fig.1 に示すような一定水深  $h$  の理想流体中に浮遊する剛な鉛直回転対称物体を考える。自由表面を  $oxy$  に、物体の対称軸を  $oz$  に一致させ、 $z$  の正方向を鉛直上方にとる。物体は  $x$  の正方向に伝播する規則波列に応答して、その平均位置まわりの調和振動を行なっている。物体の運動および波の振幅は微小で、線形重ね合せが成り立つものと仮定する。物体の運動は3自由度の剛体モード、(1) サージ、(2) ヒープ、(3) ピッチの重ね合せによつて表わされる。  $ox$  軸に関する対称性より、スウェーイ、ロール、ヨーのモードは生じない。

k モードで振動する物体の周期運動は次式で表わされる。

$$X_k(t) = \operatorname{Re}\{x_k e^{-i\omega t}\}, \quad k=1, 2, 3 \quad (1)$$

ここに、 $\omega$  は振動数、 $t$  は時間、 $x_k$  は k モードの運動の複素振幅である。

流体の運動は速度ポテンシャルにて記述され、任意点 M において

$$\phi(M, t) = \operatorname{Re}\{\phi(M) e^{-i\omega t}\} \quad (2)$$

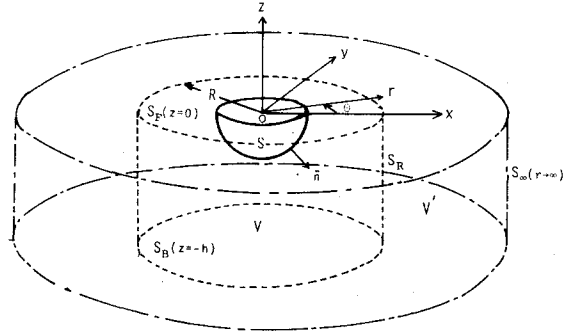


Fig.1 Definition sketch

のように表わされる。ここに、 $\phi$  は複素ポテンシャルである。このポテンシャル関数は連続方程式（ラプラス方程式）、線形化された自由表面条件、および物体表面  $S$ 、底面  $S_b$  における法線速度の連続条件を満足しなければならない。

全ポテンシャル  $\phi(M)$  はつぎのように分解して表わされる。

$$\phi = \phi_0 + \phi_4 - i\omega \sum_{k=1}^3 x_k \phi_k \quad (3)$$

ここに、 $\phi_0$  は入射波ポテンシャル、 $\phi_4$  は散乱波ポテンシャル、 $\phi_k$  は k モードの単位物体運動により生じる発散波ポテンシャルである。

振幅  $A$ 、波長  $\lambda$  の平面進行入射波のポテンシャルは次式によつて与えられる。

$$\phi_0(M) = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{ikr \cos \theta} \quad (4)$$

ここに、 $g$  は重力加速度であり、 $r^2 = x^2 + y^2$ 、 $\tan \theta = y/x$ 、 $k = 2\pi/\lambda$  である。(4) はまた円筒波に分解されて、つぎのようにも表わされる。

$$\phi_0(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \phi_0^n(P) \cos n\theta, \quad \phi_0^n(P) = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} i^n J_n(kr) \quad (5)$$

ここに、 $J_n$  は  $n$  次の第 1 種ベッセル関数を示し、 $\epsilon_0 = 1$ 、 $\epsilon_n = 2$  ( $n \geq 1$ ) である。

入射波ポテンシャルは既知であるから、流体力学の問題は適当な物体表面条件および無限遠における放射条件を満足する散乱波ポテンシャル  $\phi_4$  および発散波ポテンシャル  $\phi_k$  を求める問題に帰着される。

回転対称物体の場合には、ポテンシャルをフーリエ級数に展開して表示すると都合が良い。

$$\phi_k(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \phi_k^n(P) \cos n\theta, \quad k=1, 2, 3, 4 \quad (6)$$

$\phi_k^n$  はつぎの物体表面上の境界条件を満足しなければならない。

$$\frac{\partial \phi_k^n}{\partial n_c} = h_k^n \quad \text{for } k=1, 2, 3; \quad \frac{\partial \phi_4^n}{\partial n_c} = -\frac{\partial \phi_0^n}{\partial n_c} \quad (7)$$

ここに、 $\partial/\partial n_c$  は物体表面  $S$  と  $\theta=0$  平面との交線  $C$  から引かれた外向き単位法線  $\bar{n}_c$  に関する微分

を示す。  $h_k^n$  の非零項は次式によつて与えられる。

$$h_1^1 = \frac{1}{2} n_r, \quad h_2^0 = n_z, \quad h_3^1 = \frac{1}{2} \left[ (z - z_G) n_r - r n_z \right] \quad (8)$$

ここに、  $n_r, n_z$  は  $\bar{n}_c$  の  $r, z$  方向余弦を、  $z_G$  は物体重心（ピッチ回転中心）の  $z$  座標を示す。散乱波ポテンシャルは一般にフーリエ展開次数  $n$  のすべての値をとるが、発散波ポテンシャルは単一の  $n$  の値をとるだけである。たとえば、ヒープ・モード（  $k=2$  ）は  $n=0$  を、サージおよびピッチ・モード（  $K=1, 3$  ）は  $n=1$  をとる。

任意の子午線形状をもつ回転対称物体に対して、（6）で定義されるポテンシャルのフーリエ係数は境界積分法あるいはハイブリッド要素法を適用することによつて求められる。

## 2-2. 境界積分法による定式化

ポテンシャル理論によれば、未知の散乱波および発散波ポテンシャルは、物体の没水表面上に特異点を分布させることによつて、次式のように表わされる [2]。

$$\phi_k(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_k(M_0) G(M/M_0) dS, \quad k=1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

ここに、  $M_0$  は没水表面上の 1 点を、  $\sigma_k(M_0)$  は未知の特異点分布を示し、  $G(M/M_0)$  は連続方程式、自由表面条件、底面条件および放射条件を満足するグリーン関数である。このグリーン関数はフーリエ級数に展開されて、つぎのように表現される。

$$G(M/M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n g^n(P/P_0) \cos n(\theta - \theta_0) \quad (10)$$

係数  $g^n$  の表示式は Fenton[6] によつて、次式のように与えられている。

$$g^n = 2\pi i C_0 H_n^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} kr \\ kr_0 \end{smallmatrix} \right) J_n \left( \begin{smallmatrix} kr_0 \\ kr \end{smallmatrix} \right) \cosh k(z+h) \cosh k(z_0+h) \\ + 4 \sum_{m=1}^{\infty} C_m K_n \left( \begin{smallmatrix} \kappa_m r \\ \kappa_m r_0 \end{smallmatrix} \right) I_n \left( \begin{smallmatrix} \kappa_m r_0 \\ \kappa_m r \end{smallmatrix} \right) \cos \kappa_m(z+h) \cos \kappa_m(z_0+h), \quad \left( \begin{smallmatrix} r > r_0 \\ r < r_0 \end{smallmatrix} \right) \quad (11)$$

ここに、  $H_n^{(1)}$  は  $n$  次の第 1 種ハンケル関数を、  $I_n$ 、  $K_n$  はそれぞれ  $n$  次の第 1 種および第 2 種変形ベッセル関数を示し、

$$C_0 = \frac{k^2 - v^2}{k^2 h - v^2 h + v}, \quad C_m = \frac{\kappa_m^2 + v^2}{\kappa_m^2 h + v^2 h - v}, \quad v = \frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh \quad (12)$$

$\kappa_m$  は  $\kappa_m \tanh \kappa_m h + v = 0$  の正実根である（  $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots$  ）。

特異点分布も同様にフーリエ級数に展開されて、つぎのように表わされる。

$$\sigma_k(M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \sigma_k^n(P_0) \cos n\theta_0 \quad (13)$$

（10）、（13）を（9）に代入し、  $\theta_0$  について積分すると、（6）で定義されるポテンシャルのフーリエ係数の線積分表示が、つぎのように導かれる。

$$\phi_k^n(P) = \frac{1}{2} \int_C \sigma_k^n(P_0) g^n(P/P_0) r_0 dC \quad (14)$$

未知の特異点分布は物体表面上の境界条件 (7) を満足するように決定されなければならない。この条件を(14)に適用すると、特異点分布に関するつぎの線積分方程式が得られる。

$$-\sigma_k^n(P) + \int_C \sigma_k^n(P_0) \frac{\partial g^n(P/P_0)}{\partial n_c(P)} r_0 dC = \begin{cases} 2h_k^n & \text{for } k=1, 2, 3 \\ -2 \frac{\partial \phi_0^n}{\partial n_c}(P) & \text{for } k=4 \end{cases} \quad (15)$$

積分方程式(15)は曲線CをN個の小直線要素  $\Delta C_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) に分割することによつて、数値的に解かれることができる。各要素内で一定の特異点分布  $\sigma_{n|j}$  を仮定し、(15)を要素の中央点で代表的に満足させることにすれば、積分方程式(15)はつぎのN個の代数方程式に置換される。

$$-\sigma_k^n|_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \sigma_k^n|_j = B_i \quad \text{ここに、} \quad A_{ij} = \int_{\Delta C_j} \frac{\partial g^n(P_i/P_0)}{\partial n_c(P_i)} r_0 dC \quad (16)$$

(16)を解いて特異点分布が求められると、流体内の任意点のポテンシャルが(14)、(6)を用いて求められる。特に、物体表面上の1点  $P_i$  におけるポテンシャルは次式によつて近似できる。

$$\phi_k^n|_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N C_{ij} \sigma_k^n|_j \quad \text{ここに、} \quad C_{ij} = \int_{\Delta C_j} g^n(P_i/P_0) r_0 dC \quad (17)$$

$A_{ij}$ 、 $C_{ij}$  の表示式は Fenton[6]、Isaacson[8] によつて与えられている。

### 2-3. ハイブリッド要素法による定式化

流体領域を物体を囲むのに十分な大きさの仮想鉛直円筒面  $S_R$  で分割し、 $S_R$  の内側の領域を  $V$ 、外側の領域を  $V'$  とする (Fig.1)。 $V$  および  $V'$  内のポテンシャルをそれぞれ  $\phi_k$  および  $\phi_k'$  とする。 $\phi_k'$  を  $V'$  内で連続方程式、自由表面条件、底面条件および放射条件を満たすべく、つぎのように仮定する。

$$\phi_k' = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \phi_k'^n \cos n\theta \quad (18)$$

$$\text{ここに、} \quad \phi_k'^n = \alpha_k^{0n} H_n^{(1)}(kr) \cosh k(z+h) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_k^{mn} K_n(\kappa_m r) \cos \kappa_m(z+h) \quad (19)$$

$S_R$  における圧力および法線速度の連続条件より

$$\phi_k^n = \phi_k'^n, \quad \frac{\partial \phi_k^n}{\partial n_c} = \frac{\partial \phi_k'^n}{\partial n_c} \quad \text{on } S_R \quad (20)$$

連続方程式、自由表面条件、物体表面条件、底面条件および自然境界条件(20)によつて与えられる流体力学的境界値問題は、つぎの汎関数の停留値問題と等価である [2]。

$$J^n(\phi_k^n) = \iint_A \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_k^n}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_k^n}{\partial z} \right)^2 + n^2 \phi_k^n \right] r dA - \frac{\omega^2}{2g} \int_{C_F} (\phi_k^n)^2 r dC_F \\ - \int_C \left( \frac{\partial \phi_k^n}{\partial n_c} \right) \phi_k^n r dC + \int_{C_R} \left[ \frac{1}{2} \phi_k'^n - \phi_k^n \right] \frac{\partial \phi_k'^n}{\partial n_c} R dC_R \quad (21)$$

ここに、 $A$ は流体領域  $V$  と  $\theta=0$  平面との交面を、 $C_F$ 、 $C$ 、 $C_R$  はそれぞれ自由表面  $S_F$ 、物体表面  $S$ 、仮想鉛直円筒面  $S_R$  と  $\theta=0$  平面との交線を示し、 $R$  は  $S_R$  の半径である。

内部流体領域 A を有限要素に分割し、A 内のポテンシャル  $\phi_k^n$  を形状関数を導入して各節点のポテンシャルで表わすと、(21) はつぎのマトリックス形に表示される。

$$J^n(\{\phi_k^n\}, \{\mu_k^n\}) = \frac{1}{2} \{\phi_k^n\}^T [K_A] \{\phi_k^n\} + \frac{1}{2} \{\tilde{\phi}_k^n\}^T [K_F] \{\tilde{\phi}_k^n\} + \frac{1}{2} \{\mu_k^n\}^T [K_D] \{\mu_k^n\} \\ + \frac{1}{2} \{\mu_k^n\}^T [K_C] \{\hat{\phi}_k^n\} + \frac{1}{2} \{\hat{\phi}_k^n\}^T [K_C] \{\mu_k^n\} - \{\mu_k^n\}^T \{\tilde{\phi}_k^n\} \quad (22)$$

ここに、 $\{\phi_k^n\}$  は A 内の各節点のポテンシャルを、 $\{\tilde{\phi}_k^n\}$ 、 $\{\hat{\phi}_k^n\}$  はそれぞれ  $C_F$ 、 $C$ 、 $C_R$  上の各節点のポテンシャルを、また  $\{\mu_k^n\}$  は未定係数  $a_k^{mn}$  ( $m=0,1,2,\dots$ ) を要素とするベクトルである。各節点のポテンシャル  $\{\phi_k^n\}$  および未定係数  $\{\mu_k^n\}$  は、(22) で与えられる汎関数  $J^n$  の最小化  $\delta J^n = 0$  より得られる連立 1 次方程式を解いて求められる。詳細については文献 [2] を参照のこと。

#### 2-4. 波浪強制力および運動流体力

速度ポテンシャルが求められると、任意点に作用する流体圧は、ベルヌーイ式

$$p(M) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{Re} \left\{ i\omega \rho \phi e^{-i\omega t} \right\} \quad (23)$$

より計算される。ここに、 $\rho$  は流体の密度である。(3) を用いると、(23) はつぎのように書かれる。

$$p = p_0 + p_4 + \sum_{k=1}^3 x_k p_k = \text{Re} \left\{ i\omega \rho \left\{ \phi_0 + \phi_4 - i\omega \sum_{k=1}^3 x_k \phi_k \right\} e^{-i\omega t} \right\} \quad (24)$$

$k$  モードに対応する波浪強制力は、入射波および散乱波による流体圧を物体表面上で積分することによつて得られる。

$$F_k(t) = - \iint_S (p_0 + p_4) h_k \, dS = \text{Re} \left\{ -i\omega \rho \iint_S (\phi_0 + \phi_4) h_k \, dS e^{-i\omega t} \right\} \quad (25)$$

ここに、 $h_k = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n h_k^n \cos n\theta$  である。物体の  $j$  モードの単位振幅運動による  $k$  モードに対応する流体力も、同様に与えられる。

$$F_{kj}(t) = - \iint_S p_j h_k \, dS = \text{Re} \left\{ -\omega^2 \rho \iint_S \phi_j h_k \, dS e^{-i\omega t} \right\} \quad (26)$$

これらの表示式は、物体形状の軸対称性とポテンシャルのフーリエ級数表示を利用することによつてさらに簡略化される。すなわち、(5)、(6) を代入し、 $\theta$  について積分すると、

$$F_k(t) = \text{Re} \left\{ -2\pi i\omega \rho \int_C \epsilon_\ell (\phi_0^\ell + \phi_4^\ell) h_k^\ell r \, dC e^{-i\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ f_k e^{-i\omega t} \right\} \quad (27)$$

$$F_{kj}(t) = \text{Re} \left\{ -2\pi \omega^2 \rho \int_C \epsilon_\ell \phi_j^\ell h_k^\ell r \, dC e^{-i\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ f_{kj} e^{-i\omega t} \right\} \quad (28)$$

ここに、サージおよびピッチ・モード ( $k, j=1, 3$ ) に対しては  $\ell=1$  を、ヒープ・モード ( $k, j=2$ ) に対しては  $\ell=0$  をとる。

物体の運動により生じる流体力は、付加質量係数  $a_{kj}$ 、付加減衰係数  $b_{kj}$  を用いて表わされるのが通常である。これらは次式によつて定義される。

$$a_{kj} = \frac{1}{\omega^2} \text{Re}(f_{kj}), \quad b_{kj} = \frac{1}{\omega} \text{Im}(f_{kj}) \quad (29)$$

## 2-5. 運動応答

浮体の運動方程式は、係留索からの反力の線形性を仮定すれば、ニュートンの第2法則より、つぎのように書かれる。

$$\sum_{j=1}^3 \left[ -\omega^2 (m_{kj} + a_{kj}) - i\omega b_{kj} + c_{kj} + c'_{kj} \right] x_j = f_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (30)$$

ここに、 $m_{kj}$  は慣性係数、 $c_{kj}$  は静的復元力係数、 $c'_{kj}$  は係留索の線形化ばね定数である。 $m_{kj}$ 、 $c_{kj}$  の非零項は次式によつて与えられる。

$$m_{11} = m_{22} = m, \quad m_{33} = I_y, \quad c_{22} = \rho g A_w, \quad c_{33} = \rho g I_y + mg(z_B - z_G) \quad (31)$$

ここに、 $m$  は物体の質量、 $I_y$  はビッチ慣性モーメント、 $A_w$  は平均自由水面と交わる物体の断面積、 $z_B$  は浮心の  $z$  座標である。運動方程式 (30) を解くことによつて、周波数領域における浮体の運動応答が決定される。

## §3. 定常漂流力

規則波中の浮体に作用する定常漂流力は丸尾 [9]、Newman [10] の運動量理論あるいは Pinkster & Oortmerssen [4] の流体圧の直接積分のいずれの方法を用いても計算できる。"Far field approach" として知られる前者は、物体を囲む任意の検査面内での運動量変化から、サージ、スウェイ、ヨーの定常漂流力を評価するもので、丸尾らは遠方におけるポテンシャルの漸近表示を用いることによつて定常漂流力の簡潔な表示式を導いている。一方、"Near field approach" とよばれる後者は、運動する物体の瞬間位置に作用する流体圧を直接積分するもので、漂流力の表示式は前者に比べてやや煩雑になるが、6自由度すべての定常漂流力が評価できるほか、不規則波中での長周期漂流力の計算にも適用できる利点をもつ [11]。

### 3-1. Far field approach

Faltinsen & Michelsen [3] は無限水深に対する Newman [10] の式を有限水深に拡張して、つぎのようなサージ定常漂流力の表示式を導いている。

$$D_x = \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \left[ -\frac{\rho\omega A}{2} \operatorname{Im}\{H(0)\} - \frac{\rho k^2}{8\pi} \tanh kh \int_0^{2\pi} |H(\theta)|^2 \cos \theta d\theta \right] \quad (32)$$

ここに、 $H(\theta)$  はいわゆる Kochin 関数で、次式によつて定義される。

$$\phi(r, \theta, z) \Big|_{r \rightarrow \infty} \sim \left[ -\frac{igA}{\omega} e^{ikr \cos \theta} - \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} H(\theta) e^{ikr - i\pi/4} \right] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (33)$$

回転対称浮体の場合には、 $H(\theta)$  はフーリエ級数に展開できて、つぎのように表わされる。

$$H(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n H^n \cos n\theta \quad (34)$$

(34) を (32) に代入して、 $\theta$  について積分すれば、サージ定常漂流力の表示式がつぎのように導かれる。

$$D_x = \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\rho\omega A}{2} H^0 + \sum_{n=1}^{\infty} H^n \left[ i\rho\omega A - \frac{\rho k^2 \tanh kh}{2} H^{n-1} \right] \right\} \quad (35)$$

ここに、\* は複素共役を示す。

1 次ポテンシャル問題の解に境界積分法を用いる場合には、(3)、(4)、(6)、(14) とグリーン関数の漸近展開を用いることによつて、(33)、(34) で定義される Kochin 関数は、つぎのように表わされる。

$$H^n = - \frac{2\pi i C_0 \cosh kh}{k} (-i)^n \int_C \sigma^n(P_0) \cosh k(z_0 + h) J_n(kr_0) r_0 dC \quad (36)$$

ここに、

$$\sigma^n = \sigma_4^n - i\omega \sum_{k=1}^3 x_k \sigma_k^n \quad (37)$$

同様に、ハイブリッド要素法を用いる場合の Kochin 関数は、(3)、(4)、(18) と (19) の漸近展開を用いることによつて、つぎのように表わされる。

$$H^n = - \frac{2 \cosh kh}{k} (-i)^n \alpha^{0n} \quad (38)$$

ここに、

$$\alpha^{0n} = \alpha_4^{0n} - i\omega \sum_{k=1}^3 x_k \alpha_k^{0n} \quad (39)$$

### 3-2. Near field approach

Pinkster & Oortmerssen[4] によれば、規則波中の浮体に作用する定常漂流力およびモーメントは次式によつて与えられる。

$$\bar{D} = - \int_{C_W} \frac{1}{2} \rho g \zeta_R^2 \bar{n} dC_W + \iint_S \frac{1}{2} \rho |\bar{\nabla} \Phi|^2 \bar{n} dS + \iint_S \rho (\bar{x} \cdot \bar{\nabla} \Phi_t) \bar{n} dS + \overline{M \cdot R \cdot \ddot{X}_G} \quad (40)$$

$$\bar{M} = - \int_{C_W} \frac{1}{2} \rho g \zeta_R^2 (\bar{x} \times \bar{n}) dC_W + \iint_S \frac{1}{2} \rho |\bar{\nabla} \Phi|^2 (\bar{x} \times \bar{n}) dS + \iint_S \rho (\bar{x} \cdot \bar{\nabla} \Phi_t) (\bar{x} \times \bar{n}) dS + \overline{I \cdot R \cdot \ddot{\Omega}_G} \quad (41)$$

ここに、 $C_W$  は平均自由水面と物体表面との交線、 $\zeta_R$  は 1 次相対波高、 $\bar{n}$  は平均位置における物体没水面  $S$  からの外向き単位法線ベクトル、 $\bar{x}$  は  $S$  上の 1 点の物体重心に関する位置ベクトル、 $\bar{x}$  は  $S$  上の 1 点の 1 次変位ベクトル、 $\ddot{X}_G$ 、 $\ddot{\Omega}_G$  はそれぞれ物体重心の 1 次加速度ベクトルおよび 1 次角加速度ベクトル、 $R$  は物体重心を通る直交座標軸まわりの 1 次回転を要素とするマトリックス、 $M$ 、 $I$  はそれぞれ物体の質量および慣性モーメントを要素とするマトリックスであり、下添字  $t$  は時間微分を、 $\overline{\quad}$  は時間平均を示す。マトリックス  $M$ 、 $I$ 、 $R$  の要素は次式によつて与えられる。

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \dot{\Omega}_y \\ \Omega_z & 0 & -\dot{\Omega}_x \\ -\dot{\Omega}_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここに、 $\Omega_x$ 、 $\Omega_y$ 、 $\Omega_z$  は物体重心を通る直交座標軸まわりの 1 次回転 (ロール、ピッチ、ヨー)、

$I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$  は慣性モーメント、 $I_{xz}$ 、 $I_{zx}$  は相乗慣性モーメントである。

(40)、(41) は浮体形状の軸対称性と (2)、(3)、(5)、(6) より得られるポテンシャルのフーリエ級数展開

$$\phi(M, t) = \text{Re} \left\{ \phi(M) e^{-i\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \phi^n(P) \cos n\theta e^{-i\omega t} \right\} \quad (43)$$

を利用することによつてさらに簡単化される。

(43) より 1 次ポテンシャルの微分は次式のように表わされる。

$$\bar{\nabla}\phi = \text{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n <\frac{\partial\phi^n}{\partial r} \cos n\theta, \quad -\frac{n}{r}\phi^n \sin n\theta, \quad \frac{\partial\phi^n}{\partial z} \cos n\theta> e^{-i\omega t}\right\} \quad (44)$$

ここに、 $< >$  は円筒座標系  $(r, \theta, z)$  におけるベクトル成分を示す。

浮体の運動はサージ、ヒーブ、ピッチの 3 自由度で表わされ、次式のように書かれる。

$$\bar{X} = <[X_1 + X_3(z - z_G)] \cos \theta, \quad -[X_1 + X_3(z - z_G)] \sin \theta, \quad X_2 - X_3 r \cos \theta> \quad (45)$$

1 次相対波高は浮体の鉛直運動を考慮して次式のように表わされる。

$$\zeta_R = \zeta - (X_2 - X_3 r_W \cos \theta) = -\frac{1}{g} \frac{\partial\phi(M_W, t)}{\partial t} - (X_2 - X_3 r_W \cos \theta) \quad (46)$$

ここに、 $\zeta$  は波振幅、 $r_W$  は平均自由水面と物体表面との交線  $C_W$  の半径、 $M_W$  は  $C_W$  上の 1 点である。(1)、(2)、(43) を用いると、 $\zeta_R$  はフーリエ級数に展開されて、つぎのように表わされる。

$$\zeta_R = \text{Re}\left\{\eta_R e^{-i\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \eta_R^n \cos n\theta e^{-i\omega t}\right\} \quad (47)$$

$$\text{ここに、} \quad \eta_R^0 = \frac{i\omega}{g} \phi^0(P_W) - x_2, \quad \eta_R^1 = \frac{i\omega}{g} \phi^1(P_W) + \frac{1}{2} x_3 r_W, \quad \eta_R^n = \frac{i\omega}{g} \phi^n(P_W) \quad (n \geq 2) \quad (48)$$

$P_W$  は曲線  $C_W$  と  $\theta = 0$  平面との交点である。

定常漂流力の表示式にあらわれる時間平均は、つぎの関係式を用いて記述される。

$$\overline{Y(t) Z(t)} = \text{Re}\left\{y e^{-i\omega t}\right\} \text{Re}\left\{z e^{-i\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{1}{2} y z^*\right\} \quad (49)$$

(47)、(44)、(45) および (1) を (40)、(41) に代入し、 $\theta$  に関して積分し、時間平均をとれば、回転対称浮体に作用する定常漂流力およびモーメントの表示式がつぎのように得られる。

サージ漂流力：

$$\begin{aligned} D_x = \text{Re} \left[ \right. & -\rho g \pi r_W n_r(P_W) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_R^n \eta_R^{n-1*} + \int_C \rho \pi r n_r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} \phi^n \phi^{n-1*} + \frac{\partial\phi^n}{\partial r} \frac{\partial\phi^{n-1*}}{\partial r} \right. \\ & + \left. \frac{\partial\phi^n}{\partial z} \frac{\partial\phi^{n-1*}}{\partial z} \right\} dC + \int_C \frac{i\rho\omega}{2} \pi r n_r \left\{ [x_1 + x_3(z - z_G)] \left[ \frac{2}{r} \phi^2 + \frac{\partial\phi^0}{\partial r} + \frac{\partial\phi^2}{\partial r} \right] \right. \\ & + \left. 2x_2 \frac{\partial\phi^1}{\partial z} - x_3 r \left[ \frac{\partial\phi^0}{\partial z} + \frac{\partial\phi^2}{\partial z} \right] \right\} dC - \frac{m\omega^2}{2} x_2 x_3^* \left. \right] \quad (50) \end{aligned}$$

ヒーブ漂流力：

$$\begin{aligned} D_z = \text{Re} \left[ \right. & -\rho g \pi r_W n_z(P_W) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2} \eta_R^n \eta_R^{n*} + \int_C \rho \pi r n_z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2} \left\{ \frac{n^2}{r^2} \phi^n \phi^{n*} + \frac{\partial\phi^n}{\partial r} \frac{\partial\phi^{n*}}{\partial r} \right. \\ & + \left. \frac{\partial\phi^n}{\partial z} \frac{\partial\phi^{n*}}{\partial z} \right\} dC + \int_C i\rho\omega \pi r n_z \left\{ [x_1 + x_3(z - z_G)] \left[ \frac{1}{r} \phi^1 + \frac{\partial\phi^1}{\partial r} \right] \right. \\ & + \left. x_2 \frac{\partial\phi^0}{\partial z} - x_3 r \frac{\partial\phi^1}{\partial z} \right\} dC + \frac{m\omega^2}{2} x_1 x_3^* \left. \right] \quad (51) \end{aligned}$$

ピッチ漂流モーメント：

$$\begin{aligned}
 M_y = \operatorname{Re} \left[ \right. & \rho g \pi r_w \left[ n_r (P_w) z_G + n_z (P_w) r_w \right] \sum_{n=1}^{\infty} n r_n n^{n-1} \star \\
 & + \int_C \rho \pi r \left[ n_r (z - z_G) - n_z r \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(n-1)}{r^2} \phi^n n^{n-1} \star + \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^{n-1} \star}{\partial r} + \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^{n-1} \star}{\partial z} \right\} dC \\
 & + \int_C \frac{i \rho \omega}{2} \pi r \left[ n_r (z - z_G) - n_z r \right] \left\{ \left[ x_1 + x_3 (z - z_G) \right] \left[ \frac{2}{r} \phi^{2\star} + \frac{\partial \phi^{0\star}}{\partial r} + \frac{\partial \phi^{2\star}}{\partial r} \right] \right. \\
 & \left. + 2x_2 \frac{\partial \phi^{1\star}}{\partial z} - x_3 r \left( \frac{\partial \phi^{0\star}}{\partial z} + \frac{\partial \phi^{2\star}}{\partial z} \right) \right\} dC \left. \right] \quad (52)
 \end{aligned}$$

#### 5.4. 数値結果と考察

(35) および (50)~(52) で与えられる定常漂流力の表示式が、境界積分法 (B.I.M) およびハイブリッド要素法 (H.E.M) を用いて計算された。計算は海底にピン接合された頭出し円筒 (articulated cylinder) と浮遊半球について行われ、結果が既往の理論解と比較された。

Figs.2、3 はそれぞれ B.I.M および H.E.M における要素分割を示している。B.I.M では、各要素内で一定のポテンシャル分布が仮定され、積分は台形公式を用いて計算された。H.E.M では、内部流体領域が 8 節点の 2 次矩形アイソパラメトリック要素に、自由表面、物体表面および仮想円筒面が 3 節点の 2 次曲線要素に分割され、積分はガウスの 4 点公式を用いて評価された。

Fig.4 は articulated cylinder に作用するサージ定常漂流力を far field および near field approach を用いて計算した結果を示している。円筒はピン支点まわりに自由な回転運動を行うことができ、漂流力はピッチ応答角により影響される。ここでは、排除された流体の 0.5 倍の質量が円筒の高さ方向に一様に分布しているものと仮定し ( $m = 0.5 \rho \pi a^2 h$ ,  $I_y = m h^2 / 3$ 、ここに、 $a$ : 半径)、ピッチ応答が計算された。ポテンシャルのフーリエ級数は  $n=5$  で打ち切られた。この場合には、定常漂流力の陽な表示式が Drake, Eatock Taylor & Matsui [12] によつて導かれており、水深が十分深い場合には次式によつて与えられている。

$$\begin{aligned}
 D_x = \frac{\rho g A^2}{2k} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{H_n^{(1)}, (ka) H_{n-1}^{(2)}, (ka)}{H_n^{(2)}, (ka) H_{n-1}^{(1)}, (ka)} \right] \right. \\
 \left. + \frac{2i x_3 h}{A} \left( 1 - \frac{1}{kh} \right) \frac{1}{H_1^{(2)}, (ka)} \left[ \frac{H_0^{(2)}, (ka)}{H_0^{(1)}, (ka)} + \frac{H_2^{(2)}, (ka)}{H_2^{(1)}, (ka)} \right] \right\} \quad (53)
 \end{aligned}$$

Fig.4 には (53) により計算された結果が比較基準として示されている。

Fig.5 は係留されない浮遊半球に作用するサージ定常漂流力を far field および near field approach を用いて計算した結果を示している。円筒の場合と同様、ポテンシャルのフーリエ級数は  $n=5$  で打ち切られた。この場合にも、無限水深に対するサージ定常漂流力の理論解が工藤 [13] によつて求められており、比較基準として Fig.5 に示されている。

Table I は 1 振動数当りの計算に要した CPU 時間を示したものである。なお、計算は名古屋大学大型計算機センター FACOM M-200 によつた。

Figs. 4、5 において B.I.M および H.E.M による数値結果がいずれも理論解に良く一致していることから、上に述べられた定式化と関連する計算機プログラムの妥当性が確認された。Far field および near field approach による解を比較すると、前者が理論解よりも低い値をとるのに対して、後者は理論解を上回る結果を与えることが観察される。(53) から明らかなように、これら2つのアプローチは本来同一の結果を与えるべきものであつて、このような不一致は数値解析法における離散化誤差に起因するものと推察される。また、B.I.M および H.E.M による結果を比較すると、H.E.M の方が短い計算時間で精度の良い結果を与えることが理解される。これは B.I.M では各要素内でポテンシャルの一定分布が仮定されているため、1 次量の積で表現される漂流力を精度良く求めるためには、物体表面を細かく分割する必要があるため、また、グリーン関数の計算にも時間を要するのに対して、H.E.M ではポテンシャル分布が高次多項式で仮定されるので、少ない要素分割でも精度の良い結果を与えることによる。

## 5.5. 結び

規則波中の回転対称浮体に作用する定常漂流力を、物体形状の軸対称性を利用することによつて能率的に計算する数値的手続きが定式化され、理論解との比較によりその妥当性が検証された。さらに漂流力の数値解析法としては、ハイブリッド要素法の方が境界積分法よりも精度および計算時間の点ですぐれていることが明らかにされた。ここに得られた定常漂流力の知識だけでは、不規則波中の浮体の長周期運動を決定するのに十分ではないが、文献 [1] に述べられた方法を適用することによつて本定式化を長周期漂流力の計算が可能のように拡張することは容易であり、これについては稿を改めて報告する予定である。

## 参考文献

- [1] 松井徹哉、磯部隆寿、「海洋浮遊構造物の長周期漂流運動における2次ポテンシャルの影響」、第29回構造工学シンポジウム (1983)。
- [2] Mei, C.C., "Numerical methods in water-wave diffraction and radiation", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.10, pp.393-416 (1978)。
- [3] Faltinsen, O.M. & Michelsen, F.C., "Motions of large structures in waves at zero Froude number", Proc. Int. Sympo. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London, pp.99-114 (1974)。
- [4] Pinkster, J.A. & Oortmerssen, G. van, "Computation of the first and second order wave forces on oscillating bodies in regular waves", Proc. Second Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Berkeley, pp.136-156 (1977)。
- [5] Molin, B., "Computations of wave drift forces", Proc. Offshore Technology Conference, OTC 3627, Houston (1979)。
- [6] Fenton, J.D., "Wave forces on vertical bodies of revolution", J. Fluid Mech., Vol.85, Part 2, pp.241-255 (1978)。
- [7] Eatock Taylor, R. & Dolla, J.P., "Hydrodynamic loads on vertical bodies of revolution", Trans. Royal Inst. Nav. Arch., Vol.122, pp.285-297 (1980)。
- [8] Isaacson, M. de St. Q., "Fixed and floating axisymmetric structures in waves", Proc. ASCE, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., Vol.108, WW2, pp.180-199 (1982)。
- [9] Maruo, H., "The drift of a body floating in waves", J. Ship Res., Vol.4, No.3, pp.1-10 (1960)。
- [10] Newman, J.N., "The drifting force and moment on ships in waves", J. Ship Res., Vol.11, pp.51-60 (1967)。
- [11] Pinkster, J.A., "Mean and low-frequency wave drifting forces on floating structures", Ocean Engng., Vol.6, pp.593-615 (1979)。
- [12] Drake, K.R., Eatock Taylor, R. & Matsui, T., "The drift of an articulated column in regular waves", Proc. Royal Soc. London (under submission)。
- [13] 工藤君明、「三次元物体の波による漂流力(第1報)」、日本造船学会論文集 第141号, pp.71-77 (1977)。

Table I C P U time (sec)

|                      | B . I . M   |             | H . E . M |
|----------------------|-------------|-------------|-----------|
|                      | 10 elements | 20 elements |           |
| Articulated cylinder | 1.5         | 2.6         | 0.7       |
| Hemi-sphere          | 1.4         | 3.4         | 0.9       |

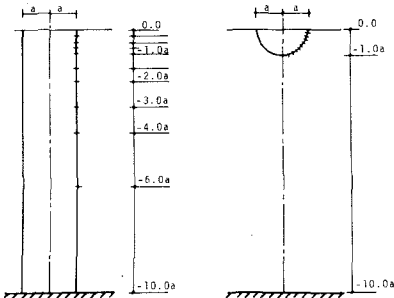


Fig.2 Mesh subdivision (B.I.M)

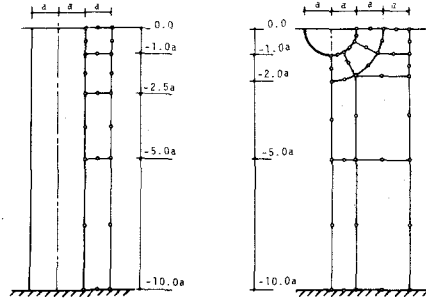
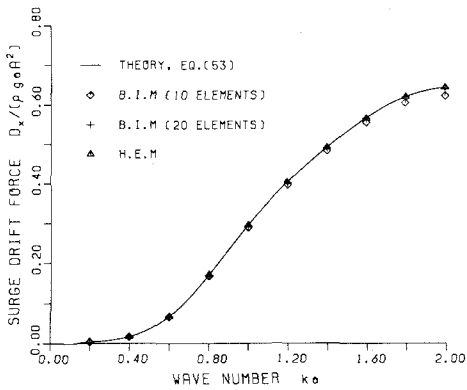
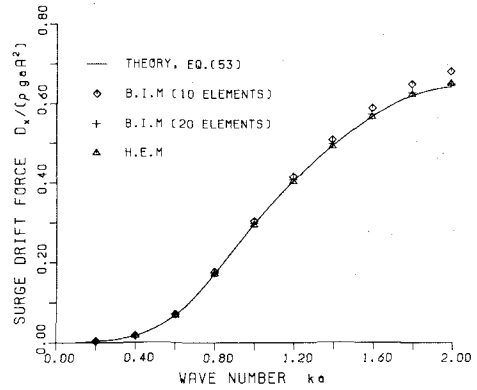


Fig.3 Mesh subdivision (H.E.M)

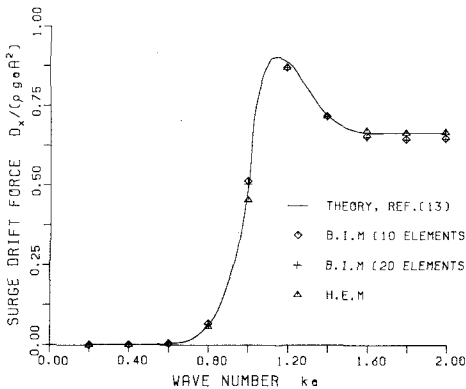


Far field approach

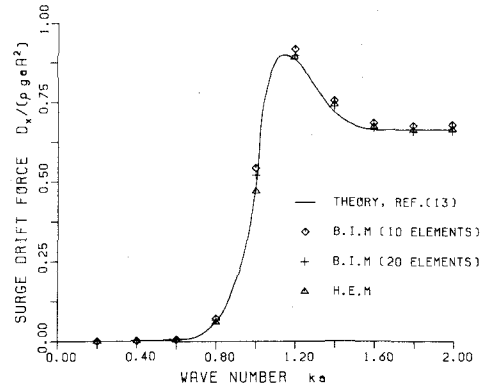


Near field approach

Fig.4 Surge drift force on an articulated cylinder



Far field approach



Near field approach

Fig.5 Surge drift force on a hemisphere

COMPUTATION OF WAVE DRIFT FORCES ON FLOATING  
AXISYMMETRIC BODIES IN REGULAR WAVES

Tetsuya MATSUI\* and Kenji KATO\*\*

The efficient prediction of the wave drift forces on floating offshore structures is of considerable practical significance from the point of view of positioning and mooring design. Boundary integral and hybrid element numerical procedures are most widely used in the calculation of the drift forces on offshore bodies of arbitrary shape (Refs.[3]-[5]). These procedures, however, usually involve time-consuming computations, associated with the formation of influence coefficient matrices and equation solution for a large number of unknowns.

For a vertical axisymmetric body, which has a wide range of engineering applications, more economical numerical procedures have been developed to calculate the first order wave forces and dynamic responses (Refs.[6]-[8]). Extension of such a formulation, to permit the computation of mean wave drift forces in regular waves, is described in this paper. Section 2 presents a review of the existing analysis methods for the first order problem. Both boundary integral and hybrid element procedures are outlined with particular reference to an axisymmetric body. Section 3 formulates the method of calculating the mean wave drift forces on an axisymmetric body, based on the far field and near field approaches (Refs.[9]-[11]). In this formulation, the axisymmetry of the body geometry is exploited to give the simplified expressions for the mean drift forces, which are then evaluated most efficiently by employing the boundary integral or hybrid element procedure. In Section 4, numerical results for the surge drift forces on a surface piercing articulated cylinder and a free-floating hemisphere are presented and compared with the analytical solutions (Refs.[12]-[13]). The results based on the present numerical procedures show close agreement with the analytical results, thus confirming the validity of the theory and associated computer programs. The CPU times needed for one frequency on FACOM M-200 computer, listed in Table I, clearly demonstrate the efficiency of the present numerical procedures.

---

\* Associate professor, Department of Architecture, Nagoya University

\*\* Assistant, Department of Architecture, Toyota National Technical College