

§1. 序

不規則波中の係留浮体は波の周期よりもはるかに長い周期の大振幅運動を行なうことが知られている。これは浮体が長周期漂流力とよばれる 2 次波浪外力の長周期成分と同調する結果生じるもので、海洋浮遊構造物の位置保持や係留システムの設計においては、この長周期運動を正確に予測することが必要である。

長周期漂流力が浮体-係留ライン系の挙動に重要な影響を及ぼすことをはじめて指摘したのは Hsu & Blenkarn[1] であつた。かれらは不規則波を半波長ごとに周期および波高の変化する規則波の連なりとみなし、半波長ごとに漂流力を計算して、その時間的变化から長周期成分を求めて長周期漂流力を評価した。Pinkster[2]、Newman[3] は、Hsu らの考え方にもとづいて、狭帯域不規則波中における長周期漂流力を計算し、不規則波のスペクトル分布より長周期漂流力のスペクトル分布を求める計算式を提案した。これらの理論研究はいずれも、不規則波が狭帯域で、近接周波数の差が小さいと仮定して、規則波中の定常漂流力の知識から長周期漂流力を推定する近似法を提案したものである。このような解析方法が妥当であるかどうかを検証する目的で、Remery & Hermans[4]、Rye、Rynning & Moshagen[5] は不規則波水槽中の係留浮体に作用する長周期漂流力の計測実験を行つている。箱形模型を用いた Remery らの実験結果が、Hsu らの方法によつて計算された長周期漂流力の理論値に良く一致しているのに対して、プラットホーム模型を用いた Rye らの実験値は理論値をかなり上回る結果を示し、より正確な理論解析方法の研究の必要性を示唆している。

近年、2 次ポテンシャル理論から導かれる 2 次波浪外力の厳密な表示式にもとづき、長周期漂流力を評価しようとする試みが Faltinsen & Loken[6]、Pinkster[7] らによつてなされている。かれらは運動中の浮体の瞬間位置に作用する流体圧を積分することによつて、2 次波浪外力の厳密な表示式を導き、長周期漂流力が 1 次ポテンシャルや 1 次運動の積のみならず 2 次ポテンシャルにも依存することを明らかにした。長周期漂流力の 1 次量の積に依存する成分は 1 次ポテンシャル問題の解が得られれば比較的容易に求められるが、2 次ポテンシャルに依存する成分を求めるためには 2 次ポテンシャル問題を解かなければならず、これは境界条件の複雑さのため容易ではない。現行の設計ではこの困難を避けるため、上述の定常漂流力の知識から長周期漂流力を推定する近似法が用いられているが（定常漂流力は 2 次ポテンシャルに依存しない）、その適用限界は明確ではない。

長周期漂流力の 2 次ポテンシャルに依存する成分を厳密に計算した研究としては、2 次元浮体を扱つた Faltinsen & Loken[6] の仕事がある。かれらはグリーンの定理を利用することによつて、2 次ポテンシャルを直接求めることなく、長周期漂流力の 2 次ポテンシャルに依存する成分を評価する方法を提案し、この方法を 2 次元浮体に適用して長周期漂流力を計算し、Newman[3] の近似計算法が長周期漂流力を予測する実用的方法であると結論している。次元浮体に対しては、Pinkster[7] が近似的方法を示唆しているだけで、厳密な数値計算を行つた研究は報告されていない。

本稿では、不規則波中の 3 次元浮体に作用する長周期漂流力を 2 次ポテンシャル理論にもとづいて厳密に評価する方法が述べられる。応用例として、articulated column に作用する長周期漂流力の厳正解が誘導され、2 次ポテンシャルを省略した解との比較により、長周期漂流運動に及ぼす 2 次ポテンシャルの影響が検討される。さらに、2 次ポテンシャルの近似的取扱いについても言及される。

§2. 浮体に作用する 2 次波浪外力

Pinkster[7] によれば、浮体に作用する 2 次波浪力および 2 次波浪モーメントはそれぞれつぎの 5 項の和によつて表現される。

$$\bar{\mathbf{F}}^{(2)} = \bar{\mathbf{F}}^I + \bar{\mathbf{F}}^{II} + \bar{\mathbf{F}}^{III} + \bar{\mathbf{F}}^{IV} + \bar{\mathbf{F}}^V, \quad \bar{\mathbf{M}}^{(2)} = \bar{\mathbf{M}}^I + \bar{\mathbf{M}}^{II} + \bar{\mathbf{M}}^{III} + \bar{\mathbf{M}}^{IV} + \bar{\mathbf{M}}^V \quad (1)$$

第 1 項は相対的な波面上の昇により生ずる圧力で

$$\bar{\mathbf{F}}^I = - \int_{C_W} \frac{1}{2} \rho g \zeta_R^{(1)2} \bar{\mathbf{n}} \, dC_W, \quad \bar{\mathbf{M}}^I = - \int_{C_W} \frac{1}{2} \rho g \zeta_R^{(1)2} (\bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{n}}) \, dC_W \quad (2a)$$

によつて与えられる。ここに、 C_W は平均自由水面と物体表面との交線、 ρ は流体密度、 g は重力加速度、 $\zeta_R^{(1)}$ は 1 次相対波面上昇、 $\bar{\mathbf{n}}$ は平均位置における物体の没水表面からの外向き単位法線ベクトル、 $\bar{\mathbf{x}}$ は物体表面上の 1 点の物体重心に関する位置ベクトルである。第 2 項はベルヌーイ式における速度の 2 乗項に由来する圧力で

$$\bar{\mathbf{F}}^{II} = \iint_S \frac{1}{2} \rho |\bar{\nabla} \phi^{(1)}|^2 \bar{\mathbf{n}} \, dS, \quad \bar{\mathbf{M}}^{II} = \iint_S \frac{1}{2} \rho |\bar{\nabla} \phi^{(1)}|^2 (\bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{n}}) \, dS \quad (2b)$$

によつて表わされる。ここに、 S は平均位置における物体の没水表面、 $\phi^{(1)}$ は 1 次速度ポテンシャルである。第 3 項は 1 次圧力勾配と 1 次運動の積によつて生ずる圧力で

$$\bar{\mathbf{F}}^{III} = \iint_S \rho (\bar{\mathbf{x}}^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \phi_t^{(1)}) \bar{\mathbf{n}} \, dS, \quad \bar{\mathbf{M}}^{III} = \iint_S \rho (\bar{\mathbf{x}}^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \phi_t^{(1)}) (\bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{n}}) \, dS \quad (2c)$$

によつて表わされる。ここに、 $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$ は S 上の 1 点の 1 次変位ベクトルで、下添字 t はポテンシャルの時間微分を示す。第 4 項は 1 次力および 1 次モーメントの作用方向が物体の回転運動によつて変化するために生ずる力およびモーメントの成分で、慣性力と 1 次回転の積によつて表わされる。

$$\bar{\mathbf{F}}^{IV} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}^{(1)} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_G^{(1)}, \quad \bar{\mathbf{M}}^{IV} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^{(1)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\Omega}}_G^{(1)} \quad (2d)$$

ここに、 $\ddot{\mathbf{x}}_G^{(1)}$ 、 $\ddot{\boldsymbol{\Omega}}_G^{(1)}$ はそれぞれ物体重心の 1 次加速度ベクトルおよび 1 次角加速度ベクトル、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{I}$ はそれぞれ物体の質量 m および慣性モーメント I_x 、 I_y 、 I_z 、 I_{xz} 、 I_{zx} を要素とするマトリックス、 $\mathbf{R}^{(1)}$ は物体重心を通る直交座標軸まわりの 1 次回転 $\Omega_x^{(1)}$ 、 $\Omega_y^{(1)}$ 、 $\Omega_z^{(1)}$ を要素とするマトリックスである。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z^{(1)} & \Omega_y^{(1)} \\ \Omega_z^{(1)} & 0 & -\Omega_x^{(1)} \\ -\Omega_y^{(1)} & \Omega_x^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

第5項は2次速度ポテンシャル $\phi^{(2)}$ による圧力で、次式によつて表わされる。

$$\bar{F}^V = \iint_S \rho \phi_t^{(2)} \bar{n} \, dS, \quad \bar{M}^V = \iint_S \rho \phi_t^{(2)} (\bar{x} \times \bar{n}) \, dS \quad (2e)$$

§3. 2次伝達関数

不規則波が周波数 ω_i ($i=1, 2, \dots, N$)の規則波からなる規則波群によつて近似できるものとする。瞬間的な波面の上昇は次式によつて表わされる。

$$\zeta(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \zeta_i e^{-i\omega_i t} \right\} \quad (4)$$

ここに、 ζ_i はランダムな位相を含む複素振幅である。

浮体に作用する1次波浪外力は波高に比例し、次式によつて表わされる。

$$F^{(1)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \zeta_i f^{(1)}(\omega_i) e^{-i\omega_i t} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $f^{(1)}(\omega_i)$ は1次伝達関数である。(1)、(2)より、対応する2次波浪外力は

$$F^{(2)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\zeta_i \zeta_j f^{(2+)}(\omega_i, \omega_j) e^{-i(\omega_i + \omega_j)t} + \zeta_i \zeta_j^* f^{(2-)}(\omega_i, \omega_j) e^{-i(\omega_i - \omega_j)t} \right] \right\} \quad (6)$$

によつて表わされる。ここに、 $*$ は複素共役を示す。(6)は2次波浪外力が波高の2乗に比例し、規則波群中の各成分波の周波数の和と差に等しい周波数成分を含むことを示している。ここでは、周波数差によつて生じる長周期漂流力に対象を限定し、(6)をつぎのように書き表わす。

$$F^{(2)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \zeta_i \zeta_j^* f^{(2)}(\omega_i, \omega_j) e^{-i(\omega_i - \omega_j)t} \right\} \quad (7)$$

ここに、 $f^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$ は長周期漂流力の2次伝達関数である。 $f^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$ と $f^{(2)}(\omega_j, \omega_i)$ とは常に対をなしてあらわれるので、つぎの対称条件を満足するように決めることができる。

$$f^{(2)}(\omega_i, \omega_j) = f^{(2)*}(\omega_j, \omega_i) \quad (8)$$

§4. 2次ポテンシャルによる2次波浪外力

(2a-e)の表示式において、1次量の積で表わされる項は1次ポテンシャル問題の解が得られれば計算できる。ここでは、2次ポテンシャルに依存する項に議論が限定される。

浮体が(4)で与えられる規則波群中にある場合、1次ポテンシャルおよび1次運動はつぎの形に表わされる。

$$\phi^{(1)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \phi_i^{(1)} e^{-i\omega_i t} \right\}, \quad \bar{x}^{(1)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \bar{x}_i^{(1)} e^{-i\omega_i t} \right\}, \quad R^{(1)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N r_i^{(1)} e^{-i\omega_i t} \right\} \quad (9)$$

対応する2次ポテンシャルは、高周波項を除外して、つぎのように表わされる。

$$\phi^{(2)}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij}^{(2)} e^{-i(\omega_i - \omega_j)t} \right\} \quad (10)$$

1次および2次ポテンシャルは入射波のみによる部分 $\phi_I^{(1)}$ 、 $\phi_I^{(2)}$ と物体の存在により乱される部分 $\phi_B^{(1)}$ 、 $\phi_B^{(2)}$ とに分解されて、つぎのように表わされる。

$$\phi^{(1)} = \phi_I^{(1)} + \phi_B^{(1)}, \quad \phi^{(2)} = \phi_I^{(2)} + \phi_B^{(2)} \quad (11)$$

2次入射波ポテンシャルは既知で、次式によつて与えられる[8]。

$$\phi_I^{(2)} = \text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{Iij}^{(2)} e^{-i\bar{\omega}t} \right\}, \quad \phi_{Iij}^{(2)} = - \frac{ig^2 \zeta_i \zeta_j^*}{4} \frac{d_{ij} \cosh \bar{k}(z+h) e^{i\bar{k}(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}}{\bar{\omega}^2 \cosh \bar{k}h - g\bar{k} \sinh \bar{k}h} \quad (12)$$

ここに、

$$d_{ij} = \frac{k_i^2}{\omega_i \cosh^2 k_i h} - \frac{k_j^2}{\omega_j \cosh^2 k_j h} + \frac{2\bar{\omega} k_i k_j}{\omega_i \omega_j} (1 + \tanh k_i h \tanh k_j h) \quad (13)$$

で、 k_i 、 k_j はそれぞれ ω_i 、 ω_j に対応する波数を、 (x, y, z) は平均水面上に原点をもつ右手直交座標(z は上向きを正)を、 α は入射波の方向が x 軸となす角を、 h は水深を示し、 $\bar{\omega} = \omega_i - \omega_j$ 、 $\bar{k} = k_i - k_j$ である。

$\phi_B^{(2)}$ はつぎの連続の方程式と境界条件を満足しなければならない[7]。

$$\Delta \phi_B^{(2)} = 0 \quad \text{流体領域 } V \text{ 内で;} \quad g\phi_{Bz}^{(2)} + \phi_{Btt}^{(2)} = A^{(2)} \quad \text{自由表面 } S_F \text{ 上で} \quad (14a, b)$$

$$\bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n} = -\bar{\nabla} \phi_I^{(2)} \cdot \bar{n} + B^{(2)} \quad \text{物体表面 } S \text{ 上で;} \quad \bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{底面 } S_B \text{ 上で} \quad (14c, d)$$

ここに、

$$A^{(2)} = -g\phi_{Iz}^{(2)} - \phi_{Itt}^{(2)} - 2\bar{\nabla} \phi^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \phi_t^{(1)} + \left\{ \phi_{zz}^{(1)} + \frac{1}{g} \phi_{ttz}^{(1)} \right\} \cdot \phi_t^{(1)} \quad (14e)$$

$$B^{(2)} = - \left[(\bar{x}^{(1)} \cdot \bar{\nabla}) \cdot \bar{\nabla} \phi^{(1)} \right] \cdot \bar{n} + (\bar{x}_t^{(1)} - \bar{\nabla} \phi^{(1)}) \cdot R^{(1)} \cdot \bar{n} \quad (14f)$$

上式において、下添字 z は z に関する微分を示す。(14e)のアンダーライン部分は無限水深の場合には省略できる。 $\phi_B^{(2)}$ はさらに無限遠で放射条件を満足しなければならない。

(9)、(10)を用いると、(14a-f)はつぎのように書き直される。

$$\Delta \phi_B^{(2)} = 0 \quad V \text{ 内で;} \quad g\phi_{Bz}^{(2)} - \bar{\omega}^2 \phi_B^{(2)} = \alpha^{(2)} \quad S_F \text{ 上で} \quad (15a, b)$$

$$\bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n} = -\bar{\nabla} \phi_I^{(2)} \cdot \bar{n} + \beta^{(2)} \quad S \text{ 上で;} \quad \bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n} = 0 \quad S_B \text{ 上で} \quad (15c, d)$$

ここに、(14e)のアンダーライン部分を省略すれば

$$\alpha^{(2)} = \frac{i\bar{\omega}}{2} \left[\bar{\nabla} \phi_{Ii}^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \phi_{Bj}^{(1)*} + \bar{\nabla} \phi_{Bi}^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \phi_{Ij}^{(1)*} + \bar{\nabla} \phi_{Bi}^{(1)} \cdot \bar{\nabla} \phi_{Bj}^{(1)*} \right] \quad (15e)$$

$$\beta^{(2)} = - \left[(\bar{x}_i^{(1)} \cdot \bar{\nabla}) \cdot \bar{\nabla} \phi_j^{(1)*} \right] \cdot \bar{n} + (-i\omega_i \bar{x}_i^{(1)} - \bar{\nabla} \phi_i^{(1)}) \cdot r_j^{(1)*} \cdot \bar{n} \quad (15f)$$

2次ポテンシャル $\phi_{Iij}^{(2)}$ 、 $\phi_{Bij}^{(2)}$ の添字 i 、 j は、表示を簡潔にするため、省略されている。

2次ポテンシャル $\phi^{(2)}$ による k 方向の2次波浪力は、(2e)、(10)、(11)を参照して、つぎのように表わされる。ただし、 $\sum_i \sum_j$ の記述は簡潔のため省略されている。

$$F_k^{(2)} = \iint_S \rho (\phi_I^{(2)} + \phi_B^{(2)}) dS = \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \left[-i\rho\bar{\omega} (\phi_I^{(2)} + \phi_B^{(2)}) n_k \right] dS \right\} e^{-i\bar{\omega}t} = F_I + F_B \quad (16)$$

F_I は (12) を用いることによつて計算される。 F_B を計算するために、Lighthill [9] にならつて、物体が k 方向に周波数 $\bar{\omega}$ の単位振幅運動を行つた場合の発散波ポテンシャル

$$\psi_k = \operatorname{Re} \left\{ \psi_k e^{-i\bar{\omega}t} \right\} \quad (17)$$

を利用する。 ψ_k はつぎの方程式を満足する。

$$\Delta \psi_k = 0 \quad v \text{ 内で;} \quad g\psi_{kz} - \bar{\omega}^2 \psi_k = 0 \quad S_F \text{ 上で} \quad (18a, b)$$

$$\bar{\nabla} \psi_k \cdot \bar{n} = n_k \quad S \text{ 上で} \quad \bar{\nabla} \psi_k \cdot \bar{n} = 0 \quad S_B \text{ 上で} \quad (18c, d)$$

(18c) を用いると、 F_B はつぎのように書かれる。

$$F_B = \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \left[-i\rho\bar{\omega} \phi_B^{(2)} (\bar{\nabla} \psi_k \cdot \bar{n}) \right] dS \right\} e^{-i\bar{\omega}t} \quad (19)$$

グリーンの公式より

$$\iint_S \phi_B^{(2)} (\bar{\nabla} \psi_k \cdot \bar{n}) dS = \iint_S \psi_k (\bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n}) dS + \iint_{S_F + S_B + S_\infty} \left[\psi_k (\bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n}) - \phi_B^{(2)} (\bar{\nabla} \psi_k \cdot \bar{n}) \right] dS \quad (20)$$

ここに、 S_∞ は物体を囲む半径 R の仮想円筒面を、 S_F 、 S_B はそれぞれ S_∞ で囲まれた自由表面と底面の部分を示す。(15c) から、(20) の右辺第 1 項は

$$\iint_S \psi_k (\bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n}) dS = \iint_S \left[-(\bar{\nabla} \phi_I^{(2)} \cdot \bar{n}) + \beta^{(2)} \right] \psi_k dS \quad (21)$$

となる。(15b) と (18b) を用いると、自由表面上の積分は

$$\iint_{S_F} \left[\psi_k (\bar{\nabla} \phi_B^{(2)} \cdot \bar{n}) - \phi_B^{(2)} (\bar{\nabla} \psi_k \cdot \bar{n}) \right] dS = - \iint_{S_F} \frac{\alpha^{(2)}}{g} \psi_k dS \quad (22)$$

となる。 S_B 上の積分は 0 である。放射条件より S_∞ 上の積分は $R \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づくことがわかる。結局、

$$F_k^{(2)} = \operatorname{Re} \left\{ \left[\iint_S -i\rho\bar{\omega} \left[\phi_I^{(2)} n_k - \psi_k (\bar{\nabla} \phi_I^{(2)} \cdot \bar{n}) + \psi_k \beta^{(2)} \right] dS + \iint_{S_F} i\rho\bar{\omega} \psi_k \frac{\alpha^{(2)}}{g} dS \right] e^{-i\bar{\omega}t} \right\} \quad (23)$$

(23) により、1 次ポテンシャルと 1 次運動が求まれば、2 次ポテンシャルによる 2 次波浪力を評価することができる。同様の表示式が 2 次波浪モーメントに対しても得られる。

§5. 長周期漂流力のスペクトル表示

不規則波のスペクトル密度関数が $S(\omega)$ で与えられるとすると、長周期漂流力のスペクトル密度関数は次式によつて決定される [7]。

$$S_F(\mu) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \mu) \left| f^{(2)}(\omega, \omega + \mu) \right|^2 d\omega \quad (24)$$

ここに、 μ は長周期漂流力の周波数、 $f^{(2)}$ は (7) で定義される長周期漂流力の 2 次伝達関数である。(24) は長周期漂流力の完全な表示式である。Pinkster[2] は長周期漂流力の 2 次伝達関数を求める煩雑さを避けるために、(24) の代りに定常漂流力の 2 次伝達関数を用いるつぎのスペクトル近似式を提案している。

$$S_F(\mu) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \mu) \left| f^{(2)}\left(\omega + \frac{\mu}{2}, \omega + \frac{\mu}{2}\right) \right|^2 d\omega \quad (25)$$

(24) と (25) の比較が後に論じられる。

§6. 長周期漂流運動の周波数領域解析

長周期漂流力のスペクトル密度関数を与えられると、運動方程式の周波数領域解析を行なうことによつて、不規則波中の浮体の長周期漂流運動を予測することができる。

長周期漂流運動の方程式はつぎのように書かれる。

$$(m + A) \ddot{x}_L + B \dot{x}_L + C x_L = F^{(2)}(t) \quad (26)$$

ここに、 A は付加質量、 B は減衰係数、 C は静的復元力係数、 $F^{(2)}(t)$ は長周期漂流力、 x_L は長周期運動の振幅である。

長周期漂流運動のスペクトル密度関数は次式によつて与えられる。

$$S_M(\mu) = S_F(\mu) |H(\mu)|^2 \quad (27)$$

ここに、 $H(\mu)$ は次式で与えられる周波数応答関数である。

$$H(\mu) = \frac{1}{\sqrt{[C - (m + A)\mu^2]^2 + B^2\mu^2}} \quad (28)$$

長周期漂流運動の振幅の 2 乗平均値はスペクトル密度関数 $S_M(\mu)$ を全周波数にわたつて積分することによつて得られる。

$$\sigma_{xL}^2 = \int_0^\infty S_M(\mu) d\mu = \int_0^\infty S_F(\mu) |H(\mu)|^2 d\mu \quad (29)$$

§7. Articulated column への適用

石油生産貯蔵用プラットフォームの新しいタイプとして、articulated column の可能性が検討されている [10]。これは柱脚に取付けられたユニバーサルジョイントを介して基礎にアンカーされる巨大な柱状の準固定式構造物で、従来タンカーの停泊用に用いられていたものの径を大型化し、柱内部に貯油タンクを、頭部に生産設備塔載用のデッキを備えたものである。このタイプの構造物は固有周期が非常に長く (50 ~ 100 sec)、長周期漂流力による共振現象が問題になる。本節では、前節までに記述された長周期漂流力および漂流運動の評価式の適用例として、articulated column が選ばれ、その不規則波中における長周期応答について考察される。

(1) 1次ポテンシャルと1次運動

Articulated column の理想化モデルとして、Fig.1 に示すような、半径一定 a の頭出し円筒を考える。円筒は海底にピン接合され、 x の正方向に伝播する振幅 ζ 、波数 k 、周波数 ω の規則波に定常して、関節点まわりに微小振幅調和回転運動を行なっている。この場合には、1次ポテンシャルは円筒座標 (r, θ, z) を用いることによつて解析的に導かれることができ、つぎの形に表示される [11]。

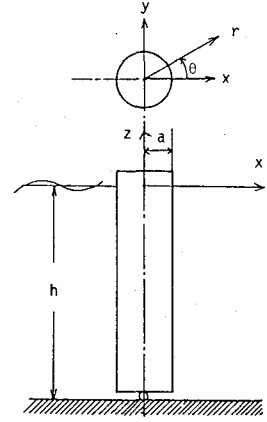


Fig.1 Articulated column

ここに、 q は単位入射波振幅当りのピッチ回転角の複素振幅を示し、 $\epsilon_0 = 1$ 、 $\epsilon_n = 2$ ($n \geq 1$)、

$$\left. \begin{aligned} f_n(kr) &= f_{In}(kr) + f_{Bn}(kr), \quad f_{In}(kr) = i^n J_n(kr), \quad f_{Bn}(kr) = -i^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \\ g_0(kr) &= \frac{(kh \sinh kh - \cosh kh + 1) \cosh kh}{k^2 (1/4 \sinh 2kh + kh/2)} \frac{H_1^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(ka)}, \quad \xi_0(kz) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ g_m(\kappa_m r) &= \frac{(\kappa_m h \sin \kappa_m h + \cos \kappa_m h - 1) \cos \kappa_m h}{\kappa_m^2 (1/4 \sin 2\kappa_m h + \kappa_m h/2)} \frac{K_1(\kappa_m r)}{K_1'(\kappa_m a)}, \quad \xi_m(\kappa_m z) = \frac{\cos \kappa_m(z+h)}{\cos \kappa_m h} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

で、 κ_m は $\kappa_m \tan \kappa_m h + \omega^2/g = 0$ の正実根である。上の表示式において、 J_n は n 次の第1種ベッセル関数を、 $H_n^{(1)}$ は n 次の第1種ハンケル関数を、 K_1 は1次の第2種変形ベッセル関数を示す。

円筒に作用する関節点まわりの1次転倒モーメントは次式によつて計算される。

$$M_y^{(1)}(t) = \text{Re} \left\{ m_y^{(1)} e^{-i\omega t} \right\}, \quad m_y^{(1)} = -i\omega \rho a \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \phi^{(1)} \Big|_{r=a} (z+h) \cos \theta \, d\theta \, dz \quad (32)$$

(32)に(30)を代入すれば、つぎの結果が得られる。

$$\begin{aligned} m_y^{(1)} &= -\rho g \pi a \zeta \frac{2(kh \sinh kh - \cosh kh + 1)}{k^2 \cosh kh} f_1(ka) \\ &\quad - \omega^2 \rho \pi a \zeta q \left[\frac{(kh \sinh kh - \cosh kh + 1)}{k^2 \cosh kh} g_0(ka) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\kappa_m h \sin \kappa_m h + \cos \kappa_m h - 1)}{\kappa_m^2 \cos \kappa_m h} g_m(\kappa_m a) \right] = m_y^W + (\omega^2 A + i\omega B) \zeta q \end{aligned} \quad (33)$$

ここに、 m_y^W は関節点まわりの1次波浪モーメントで、 A 、 B はそれぞれ付加慣性および付加減衰項に対応する。1次波浪モーメントに対する応答は、ニュートンの第2法則に、(33)で与えられる流体力を考慮して求められる。

$$q = \frac{m_y^W}{\zeta [-\omega^2 (I_y + A) - i\omega B + C]}, \quad C = \frac{\rho \pi a^2 h^2}{2} - m(h - h_G) \quad (34)$$

ここに、 C は静的復元力係数、 h_G は重心の潜水深さである。

長周期漂流力の表示式にあらわれる 1 次相対波高は、円筒面における波面上昇から円筒の鉛直変位を差し引いて、次式のように表わされる。

$$\zeta_R^{(1)}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \eta_R^{(1)} e^{-i\omega t} \right\}, \quad \eta_R^{(1)} = \frac{i\omega}{g} \phi^{(1)} \Big|_{r=a, z=0} + a \zeta q \cos \theta \quad (35)$$

(35) に (30) を代入すれば、つぎの結果が得られる。

$$\eta_R^{(1)} = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n f_n(ka) \cos n\theta + \zeta q \left\{ \frac{\omega^2}{g} \left[q_0(ka) + \sum_{m=1}^{\infty} q_m(\kappa_m a) \right] + a \right\} \cos \theta \quad (36)$$

(2) 長周期漂流モーメント

不規則波中の円筒に作用する関節点まわりの長周期漂流モーメントは、(1)、(2) の一般表示式から求められる。長周期漂流モーメントの 1 次量の積で表わされる項は、(2a-d) の各項に (30)、(36) で与えられる 1 次ポテンシャルおよび 1 次相対波高の表示式を用いることによつて、陽に表現される。たとえば、相対波面上昇による第 1 項は、(2a)、(35) より

$$M_Y^I = -\frac{1}{2} \rho g a h \int_0^{2\pi} \zeta_R^{(1)2} \cos \theta \, d\theta = -\frac{1}{4} \rho g a h \operatorname{Re} \left\{ \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_0^{2\pi} \eta_{Ri}^{(1)} \eta_{Rj}^{(1)*} \cos \theta \, d\theta \right] e^{-i\bar{\omega}t} \right\} \quad (37)$$

となる。(36) を代入し、 θ について積分すれば、つぎの結果が得られる。

$$M_Y^I = -\rho g \pi a h \operatorname{Re} \left\{ \zeta_i \zeta_j^* \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_{ni} f_{n-1,j}^* + \frac{1}{2} q_j^* (f_{0i} + f_{2i}) \left(\frac{\omega_i \omega_j}{g} \sum_{m=0}^{\infty} q_{mj}^* + a \right) \right] e^{-i\bar{\omega}t} \right\} \quad (38)$$

ただし、 $\sum_i \sum_j$ の記述は、表示を簡潔にするため省略されている（以下同様）。上式において

$$f_{ni} = f_n(k_i a), \quad q_{0i} = q_0(k_i a), \quad q_{mi} = q_m(\kappa_{mi} a) \quad (39)$$

で、 $\eta_R^{(1)}$ 、 q 、 k 、 κ_m の下添字 i は周波数 ω_i に対応する量であることを示す。第 2 項、第 3 項も同様に導かれて、つぎのように表示される。

$$\begin{aligned} M_Y^{II} = & \rho g \pi a \operatorname{Re} \left\{ \zeta_i \zeta_j^* \left[\frac{g}{\omega_i \omega_j} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(n-1)}{k_i a k_j a} I_1 + I_2 \right] f_{ni} f_{n-1,j}^* \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} q_j^* \left[\frac{2}{k_i a} f_{2i} \left(\frac{1}{k_j a} q_{0j}^* I_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_{mj} a} q_{mj}^* I_{1m} \right) \right. \\ & \left. \left. + (f_{0i} + f_{2i}) \left(q_{0j}^* I_2 - \sum_{m=1}^{\infty} q_{mj}^* I_{2m} \right) \right] \right\} e^{-i\bar{\omega}t} \quad (40) \end{aligned}$$

$$M_Y^{III} = -\frac{1}{2} \rho g \pi a \operatorname{Re} \left\{ \zeta_i \zeta_j^* q_j^* \left[\frac{2}{k_i a} f_{2i} I_3 - k_i a (f_{0i} + f_{2i}) I_4 \right] e^{-i\bar{\omega}t} \right\} \quad (41)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= k_i k_j \int_0^h \frac{\xi \cosh k_i \xi \cosh k_j \xi}{\cosh k_i h \cosh k_j h} \, d\xi, & I_2 &= k_i k_j \int_0^h \frac{\xi \sinh k_i \xi \sinh k_j \xi}{\cosh k_i h \cosh k_j h} \, d\xi \\ I_{1m} &= k_i \kappa_{mj} \int_0^h \frac{\xi \cosh k_i \xi \cos \kappa_{mj} \xi}{\cosh k_i h \cos \kappa_{mj} h} \, d\xi, & I_{2m} &= k_i \kappa_{mj} \int_0^h \frac{\xi \sinh k_i \xi \sin \kappa_{mj} \xi}{\cosh k_i h \cos \kappa_{mj} h} \, d\xi \\ I_3 &= k_i \int_0^h \frac{\xi^2 \cosh k_i \xi}{\cosh k_i h} \, d\xi, & I_4 &= \int_0^h \frac{\xi \sinh k_i \xi}{\cosh k_i h} \, d\xi \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

(42)の積分はすべて解析的に評価されることが出来る。第4項 M_Y^{IV} は0となる。

長周期漂流モーメントの2次ポテンシャルに依存する項を §4 に述べられた方法により評価するためには、円筒が周波数 $\bar{\omega}$ の単位振幅回転運動を行つた場合の発散波ポテンシャルを求める必要がある。これは、(30)を参照して、つぎのように表わされる。

$$\psi = \left[g_0(\hat{k}r) \xi_0(\hat{k}z) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\hat{k}_m r) \xi_m(\hat{k}_m z) \right] \cos \theta \quad (43)$$

ここに、 $\hat{k}$ 、 $\hat{k}_m$ はそれぞれ $\bar{\omega}$ に対応する波数および固有値である。(43)を用いれば、(23) と類似の式から、長周期漂流モーメントに対する2次ポテンシャルの貢献が次式のように評価される。

$$M_Y^V = \text{Re} \left[\left\{ -i\bar{\omega} \rho a \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left[\phi_I^{(2)}(z+h) \cos \theta - \psi \frac{\partial \phi_I^{(2)}}{\partial r} + \psi \beta^{(2)} \right] \right\} \right]_{r=a} d\theta dz + \frac{i\bar{\omega} \rho}{g} \int_a^{\infty} \int_0^{2\pi} r \psi \alpha^{(2)} \Big|_{z=0} d\theta dr \Big\} e^{-i\bar{\omega} t} \quad (44)$$

(12)で与えられる $\phi_I^{(2)}$ と (30) を (15e, f) に代入することによつて得られる $\alpha^{(2)}$ 、 $\beta^{(2)}$ を (43) とともに (44) に代入し、 θ について積分すれば、つぎの表示式が得られる。

$$M_Y^V = -\rho g \pi a \text{Re} \left[\zeta_i \zeta_j^* \left\{ \frac{i\bar{\omega}}{2} \frac{d_{ij}}{\bar{\omega}^2/g - \bar{k} \tanh \bar{k}h} \left[J_1(\bar{k}a) \frac{\bar{k}h \sinh \bar{k}h - \cosh \bar{k}h + 1}{\bar{k}^2 \cosh \bar{k}h} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - J_1'(\bar{k}a) \left(g_0(\hat{k}a) I_5 + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\hat{k}_m a) I_{5m} \right) \right] + \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} q_j^* \left[(f_{0i} + f_{2i} - \frac{4}{k_i^2 a^2} f_{2i}) \left(g_0(\hat{k}a) I_6 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\hat{k}_m a) I_{6m} \right) + (f_{0i} + f_{2i}) \left(g_0(\hat{k}a) I_7 + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\hat{k}_m a) I_{7m} \right) \right] + \frac{2\bar{\omega}^2}{\omega_i \omega_j} I_{\infty} \right\} e^{-i\bar{\omega} t} \Big\} \quad (45)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} I_5 &= \bar{k} \int_0^h \frac{\cosh \bar{k}\xi \cosh \hat{k}\xi}{\cosh \bar{k}h \cosh \hat{k}h} d\xi, & I_{5m} &= \bar{k} \int_0^h \frac{\cosh \bar{k}\xi \cos \hat{k}_m \xi}{\cosh \bar{k}h \cos \hat{k}_m h} d\xi \\ I_6 &= k_i^2 \int_0^h \frac{\xi \cosh k_i \xi \cosh \hat{k}\xi}{\cosh k_i h \cosh \hat{k}h} d\xi, & I_{6m} &= k_i^2 \int_0^h \frac{\xi \cosh k_i \xi \cos \hat{k}_m \xi}{\cosh k_i h \cos \hat{k}_m h} d\xi \\ I_7 &= k_i \int_0^h \frac{\sinh k_i \xi \cosh \hat{k}\xi}{\cosh k_i h \cosh \hat{k}h} d\xi, & I_{7m} &= k_i \int_0^h \frac{\sinh k_i \xi \cos \hat{k}_m \xi}{\cosh k_i h \cos \hat{k}_m h} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$I_{\infty} = \int_a^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial r} \frac{\partial \beta_{n-1,j}^*}{\partial r} + \frac{\partial \beta_{ni}}{\partial r} \frac{\partial \alpha_{n-1,j}^*}{\partial r} + \frac{\partial \beta_{ni}}{\partial r} \frac{\partial \beta_{n-1,j}^*}{\partial r} \right. \\ \left. + \left[\frac{\omega_i^2 \omega_j^2}{g^2} + \frac{n(n-1)}{r^2} \right] (\alpha_{ni} \beta_{n-1,j}^* + \beta_{ni} \alpha_{n-1,j}^* + \beta_{ni} \beta_{n-1,j}^*) \right\} \gamma \frac{r}{a} dr \quad (47)$$

(47)において、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ni} &= f_{In}(k_i r), & \beta_{ni} &= f_{Bn}(k_i r) \quad (n \neq 1), & \gamma &= g_0(\hat{k}r) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\hat{k}_m r) \\ \beta_{ni} &= f_{B1}(k_i r) + \frac{1}{2} \frac{\omega_i^2}{g} q_i \left[g_0(k_i r) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\kappa_{mi} r) \right] \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

(46)の積分はすべて解析的に評価されることが出来る。(47)で表わされる自由表面上の半無限積分は数値的に評価されなければならない。

数値結果と考察

実際の articulated column に近いモデルとして、半径 12.4m、水深 124m、固有振動数 0.014Hz の円筒が選ばれ、その不規則波中における長周期応答が計算された。円筒の慣性モーメントと静的復元力係数は、排除された水の 0.875 倍の質量が高さ方向に一樣に分布しているものとして算定され、ポテンシャル理論から評価される付加慣性および付加減衰の値を用いて 1 次応答が計算された。長周期運動に対する減衰は臨界減衰の 20% と仮定された。不規則波のスペクトルとしては、Figs.2、5 に示される 2 種類の ISSC スペクトルが採用された。 T_s は平均周期を、 H_s は有義波高を示す。

Table I は長周期漂流モーメントの 2 次伝達関数を、2 次ポテンシャルを含む項を考慮して計算した結果と省略した場合の結果を比較して示したものである。また、Table II は 2 次ポテンシャルの寄与を評価する場合に、自由表面上の積分項 I_o の計算を行つた場合と省略した場合の結果を比較したものである。Figs.3、4 は Fig.2 で表わされる入射波スペクトルに対応する長周期漂流モーメントと長周期漂流運動のスペクトルを示したもので、本手法による厳正解、Pinkster の近似式 (25) による解および 2 次ポテンシャルの寄与を省略した場合の解が比較されている (CASE 1)。Figs.6、7 も Fig.5 に対して同様の表示になつている (CASE 2)。平均周期の長い CASE 2 では、CASE 1 に比べて各解法間の差が著しくなつている。これは、2 次伝達関数の 2 次ポテンシャルの寄与を含む値と含まない値の相違が低い周波数で大きくなつているため (Table I 参照)、入射波スペクトルのピークが低い周波数に近づくほど、その影響が顕著にあらわれることによる。

以上の考察から、2 次ポテンシャルの影響は回折影響の少ない低周波数において重要であることが明らかにされた。このことは、2 次ポテンシャルの寄与を評価する場合には、回折影響による項を省略しうることを示唆している。このような観点から、本稿では、2 次ポテンシャルの寄与を評価する方法として、自由表面上の積分項 I_o の計算を省略する近似手法が提案される。Figs.3、4、6、7 には、この近似解による結果も示されているが、これらは厳正解に良く一致している。半無限積分の計算の労力を考えると、本近似手法の実用的利点は明らかである。

参考文献

- [1] Hsu, F.H. & Blenkarn, K.A., "Analysis of peak mooring forces caused by slow vessel oscillations in random seas", Proc. Offshore Technology Conference, OTC 1159, Houston (1970).
- [2] Pinkster, J.A., "Low frequency phenomena associated with vessels moored at sea", Society of Petroleum Engineers, SPE 4837, Amsterdam (1974).
- [3] Newman, J.N., "Second order, slowly varying forces on vessels in irregular waves", Proc. Int. Sympo. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London, pp.193-197 (1974).
- [4] Remery, G.F.M. & Hermans, A.J., "The slow drift oscillation of a moored object in random seas", Society of Petroleum Engineers J., pp.191-198 (1972).
- [5] Rye, H., Rynning, S. & Moshagen, H., "On the slow drift oscillations of moored structures", Proc. Offshore Technology Conference, OTC 2366, Houston (1975).
- [6] Faltinsen, O.M. & Loken, E., "Slow drift oscillations of a ship in irregular waves", Appl. Ocean Res., Vol.1, No.1, pp.21-31 (1979).
- [7] Pinkster, J.A., "Mean and low-frequency wave drifting forces on floating structures", Ocean Engng., Vol.6, pp.593-615 (1979).
- [8] Bower, E.C., "Long period oscillations of moored ships subject to short wave seas", Trans. Royal Inst. Nav. Arch., Vol.118, pp.181-191 (1976).
- [9] Lighthill, J., "Waves and hydrodynamic loading", Proc. Second Int. Conf. on Behaviours of Offshore Structures, London, pp.1-39 (1979).
- [10] Bury, M.R.C., Walsh, S.R. & Warren, J.G., "Model investigation of an articulated column structure", Paper presented to the Seminar on the Use of Models in the Design of Offshore Structures, Garston, England (1979).
- [11] Drake, K.R., Eatock Taylor, R. & Matsui, T., "The drift of an articulated column in regular waves", Proc. Royal Soc. London (under submission).

Table I Quadratic transfer function
for overturning moment (in ogah)

$\omega_1(a/g)^{1/2}$	$\omega_2(a/g)^{1/2}$										
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	
0.3	0.003	0.128	0.332	0.621							
		0.051	0.149	0.294							
0.4		0.005	0.150	0.315	0.480						
			0.079	0.189	0.333						
0.5			0.011	0.157	0.281	0.361					
				0.097	0.214	0.352					
0.6				0.029	0.147	0.217	0.213				
					0.115	0.232	0.356				
0.7					0.073	0.149	0.159	0.117			
						0.152	0.260	0.361			
0.8						0.157	0.205	0.209	0.253		
							0.232	0.316	0.391		
0.9							0.276	0.311	0.332	0.416	
								0.343	0.401	0.448	
1.0								0.395	0.411	0.438	
									0.441	0.479	
1.1									0.482	0.485	
										0.516	
1.2											0.552

First line : Including second order potential
Second line : Excluding second order potential

Table II Quadratic transfer function
for overturning moment (in ogah)

$\omega_1(a/g)^{1/2}$	$\omega_2(a/g)^{1/2}$										
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	
0.3	0.003	0.128	0.332	0.621							
		0.128	0.331	0.610							
0.4		0.005	0.150	0.315	0.480						
			0.149	0.313	0.475						
0.5			0.011	0.157	0.281	0.361					
				0.149	0.266	0.339					
0.6				0.029	0.147	0.217	0.213				
					0.139	0.200	0.187				
0.7					0.073	0.149	0.159	0.117			
						0.144	0.164	0.172			
0.8						0.157	0.205	0.209	0.253		
							0.213	0.256	0.370		
0.9							0.276	0.311	0.332	0.416	
								0.330	0.406	0.571	
1.0								0.395	0.411	0.438	
									0.439	0.535	
1.1									0.482	0.485	
										0.520	
1.2											0.552

First line : Including second order potential (exact)
Second line : Including second order potential (approximate)

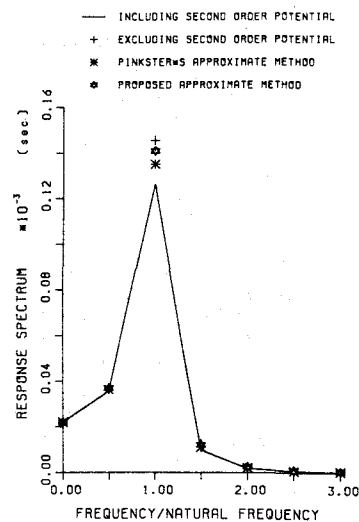
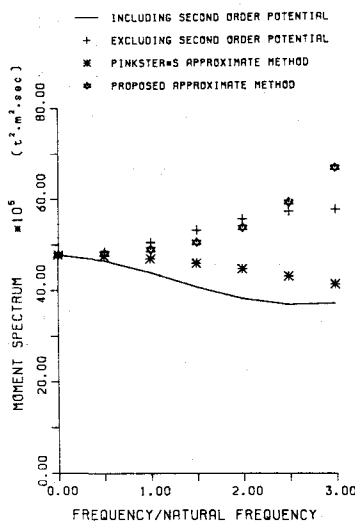
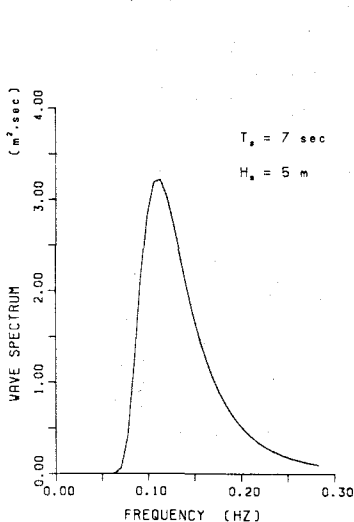


Fig.2 Wave spectrum (case 1)

Fig.3 Moment spectrum (case 1)

Fig.4 Motion spectrum (case 1)

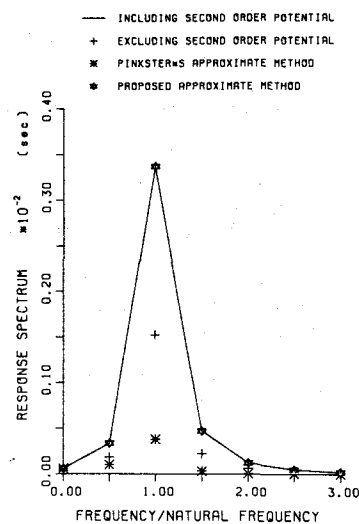
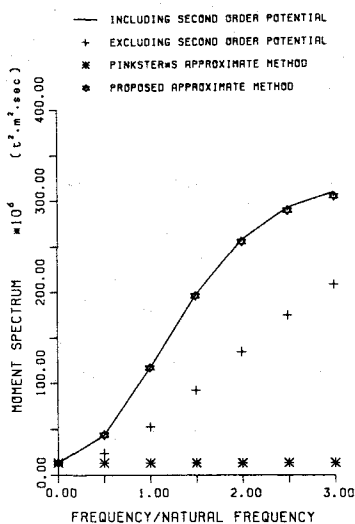
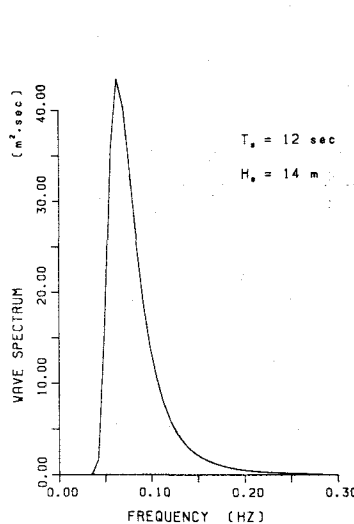


Fig.5 Wave spectrum (case 2)

Fig.6 Moment spectrum (case 2)

Fig.7 Motion spectrum (case 2)

THE INFLUENCE OF THE SECOND ORDER POTENTIAL ON THE
SLOW DRIFT OSCILLATIONS OF FLOATING STRUCTURES

Tetsuya MATSUI* and Takahisa ISOBE**

The wave forces acting on floating structures in irregular waves include the second order, slowly varying components, which are known as the slowly varying wave drift forces. These second order forces, though small in magnitude, can be crucially important if they excite long-period resonance motions and resulting peak mooring loads.

In irregular waves the drift forces not only depend on the first order velocity potential and the first order body motions, but also on the wave exciting forces due to the low-frequency part of the second order potential. While the components of the wave drift forces which depend on the product of the first order quantities can be predicted exactly, using results of linear potential theory, the contribution due to the second order potential is more difficult to compute. To avoid this difficulty, simplified procedures based on data of the mean drift forces in regular waves are usually used in design (Refs. [1-3]).

This paper presents a more exact approach to calculate the slowly varying wave drift forces on a structure floating in irregular waves. The hydrodynamic boundary-value problem is formulated and solved correctly to the second order in wave amplitude. Green's second identity is used to derive a formula for the wave exciting forces due to the second order potential. Thus all the contributions to the second order forces are included in the theory. The method of the frequency domain calculations of the slowly varying drift forces and responses in irregular waves are discussed in the following sections. As an application of the theory, an analytical expression for the slowly varying overturning drift moment on an articulated column of uniform circular cross-section, as shown in Fig.1, is derived. In the final section, numerical results of the quadratic transfer function for the overturning drift moment and the spectral densities of the slowly varying drift moment and response for typical two ISSC wave spectra are presented. The present exact solutions are compared with different simplified approaches. The following conclusions are drawn from this numerical study:

(a) The wave exciting forces due to the second order potential have substantial effects on the slowly varying drift responses of the articulated column when the mean wave period is relatively long (Table I and Figs.5-7).

(b) The existing simplified approach based on data of the mean drift forces is valid only for the relatively short wave period (Figs.2-4).

* Associate professor, Department of Architecture, Nagoya University

** Research engineer, Kajima Institute of Construction Technology