

(28) 円孔両側にき裂を有する円筒殻の解析

今宮工高 石濱則哲

まがき

鋼管と鋼管との接合部の応力集中部分において、しばしばき裂の発生をみる。今、応力解析の単純化のため、Fig. 1に示すような、円孔の両側にき裂を有する円筒殻を考える。

応力集中が生じている開口又はき裂を有する平板又は殻の解析では、たとえ、板厚が薄い場合でも、厚み方向の応力又はひずみの影響を考慮せねばならない。この報告は円筒殻の解析に、厚み方向のせん断変形を考慮した、P. M. Naghdi⁽¹⁾の支配方程式を利用している。その式をもとにして、開口を有する円筒殻にも適用できるように、すべての基礎式を複素関数で表現するように導いた。そして

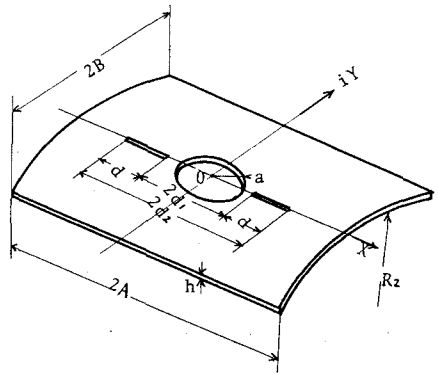


Fig.1 Two axial cracked cylindrical shell with a circular cutout

小規模降伏状態の仮定のもとに、円孔両側にあるき裂先端のモーメント拡大係数及び応力拡大係数を求めた。今迄に報告された論文では、軸方向に一つのき裂を有する円筒殻を解析⁽²⁾したものがあが、円孔とき裂との相互干渉について求めた論文はない。荷重は円孔周辺に沿って、垂直せん断力が荷った場合である。境界条件については、円孔周辺はローラン展開によって厳密に満足させているが、円筒殻の外部周辺は、選点法による近似的な方法をとっている。

§1. 基礎式

せん断変形を考慮した円筒殻の支配方程式として、Naghdiの式を使用する。即ち次式のように、応力関数 F と垂直たわみ W で表わされている。

$$\nabla^4 F - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\nabla^4 W + (\lambda_1 \lambda_2)^2 (1 - kD^2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{----- (2)}$$

上式に基づいて、基礎式すべてを $z = x + iy = re^{i\theta}$ の複素平面の関数式で表現する式として導いた。結果だけを書けば、円筒殻の垂直たわみ W は次のように表わされる。

$$W = -\left[\bar{z} y_6(z) + y_6(z) - 4k y_6'(z)\right] - \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^2}{16} \text{Re} \left\{ \bar{z}^2 y_m''(z) + \bar{z}^2 z y_m''(z) - 4k \bar{z}^2 y_m'(z) \right\} + W_p \quad \text{----- (3)}$$

又、法線、切線方向の曲げモーメントを M_n, M_s 及びねじりモーメントを M_{ns} 、垂直せん断力を Q_n, Q_s とすれば、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} M_n + M_s &= 4(1+\nu)D \text{Re} [y_6'(z)] + 2(1+\nu)D \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^2}{8} \text{Re} \left\{ \frac{\bar{z}^2}{2} y_m''(z) + \bar{z} y_m''(z) + z y_m''(z) + 2\bar{z} y_m'(z) + y_m(z) \right\} + M_{p1}(4) \\ M_n - M_s - 2i M_{ns} &= 2(1-\nu)D e^{2i\theta} \left[\bar{z} y_6''(z) + y_6''(z) \right] + (1-\nu)D e^{i\theta} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^2}{8} \left\{ \frac{\bar{z}^3}{6} y_m'''(z) + \frac{\bar{z}^2}{2} y_m''(z) + \frac{\bar{z}}{2} y_m'(z) + \bar{z} y_m(z) \right. \\ &\quad \left. + z y_m(z) + 2 \text{Re} \{ \bar{z} y_m'(z) + y_m(z) \} \right\} - \frac{8i}{c} e^{2i\theta} \chi''(z, \bar{z}) + M_{p2} \quad \text{----- (5)} \end{aligned}$$

$$Q_n - iQ_s = 4De^{i\theta} y_b''(z) + De^{i\theta} \frac{(\lambda\lambda_1)^2}{4} \left[\frac{\bar{z}^2}{2} y_m''(z) + \bar{z} y_m''(z) + 2 \{ \bar{z} y_m'(z) + y_m'(z) + \bar{y}_m(\bar{z}) \} + z \bar{y}_m'(\bar{z}) + \bar{y}_m'(z) + y_m(z) \right] - \frac{8C}{C} e^{i\theta} \frac{\partial X'(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + Q_p \quad (6)$$

$$\frac{\partial X'(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} - \frac{C}{4} X(z, \bar{z}) = 0 \quad (7)$$

又、法線、切線の面内力 N_n, N_s および面内せん断力 N_{ns} は次のようになる。

$$N_n + N_s = 4 \operatorname{Re} [y_m'(z)] - \frac{(\lambda\lambda_1)^2}{4} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{z}^2}{2} y_b''(z) + \bar{z} y_b''(z) + \bar{y}_b(z) + 2 \bar{z} y_b'(z) + y_b(z) - 4 \operatorname{Re} \{ \bar{z} y_b'(z) + y_b'(z) + 2 y_b(z) \} \right\} \quad (8)$$

$$N_n - N_s - 2iN_{ns} = -2e^{2i\theta} [\bar{z} y_m''(z) + y_m''(z)] + \frac{(\lambda\lambda_1)^2}{8} e^{2i\theta} \left[\frac{\bar{z}^3}{6} y_b''(z) + \frac{\bar{z}^2}{2} y_b''(z) + \frac{\bar{z}}{2} y_b''(z) + \bar{z} y_b'(z) + \bar{y}_b(z) + 2 \operatorname{Re} \{ \bar{z} y_b'(z) + y_b'(z) \} - 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{z}^2}{2} y_b''(z) + \bar{z} y_b''(z) + 2 (\bar{z} y_b'(z) + y_b'(z) + 2 \operatorname{Re} \{ y_b(z) \} \right\} \right] \quad (9)$$

ただし、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 $C = 10/h^2$ 、 $\lambda^+ = 1/DEh$ 、 $\lambda_1^+ = Eh/R_2^2 D$ 、 $k = D/Bh$ 、 $B = 5E/12(1+\nu)$ 、 h : 板厚、 R_2 : 曲率半径、 E : ヤング係数、 ν : ポアソン比、 $'$ は z に関する第1次微分、 W_p, M_p, M_{p2}, Q_p は各式の荷重項、 $(\lambda\lambda_1)^+$ 、 $(\lambda_2/\lambda)^+$ の項は無視している。

§2. 円孔を有する円筒殻の応力解析

Fig. 1 に示すように、中央に半径 a の円孔を有する軸方向長さ $2A$ 、幅 $2B$ の円筒殻の円周に沿って一定の垂直せん断力がかかった場合を考える。いま z 平面の基礎式を z 平面に $z = R$ の関係によって等角写像をし、 $z = pe^{i\theta}$ の関数で表現させる。式中の $y_b'(z)$ 、 $y_b''(z)$ 、 $X(z, \bar{z})$ 、 $y_m'(z)$ 、 $y_m''(z)$ は、対称条件を考えて次のように仮定できる。

$$\left. \begin{aligned} y_b'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n z^{2n-2} + a_n z^{-2n} \} + a_0 \log z \\ y_b''(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ B_n z^{2n-1} + b_n z^{-2n+1} \} \\ X(z, \bar{z}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ E_{2n} I_{2n}(Cr) + F_{2n} K_{2n}(Cr) \} \sin 2n\theta \\ y_m'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_n z^{2n-2} + c_n z^{-2n} \} + c_0 \log z \\ y_m''(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ D_n z^{2n-1} + d_n z^{-2n+1} \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、 I_n, K_n : 第1種、第2種変形ベッセル関数、 $Cr = r\sqrt{10}/h$ 、 $A_n, B_n, E_{2n}, C_n, D_n, a_n, b_n, c_n, d_n, F_n$ は外部周辺および円周の境界条件によって定まる各未知数、 $n = 1, 2, 3 \sim \infty$ である。

円孔縁を自由辺と仮定すれば、境界条件は次のようになる。

$$1) Q_n = 0, \quad 2) M_n = 0, \quad 3) M_{ns} = 0, \quad 4) N_n = 0, \quad 5) N_{ns} = 0 \quad (11)$$

更に、外部周辺を単純支持と仮定すれば、境界条件は次のようになる。

$$1) W = 0, \quad 2) M_n = 0, \quad 3) M_{ns} = 0, \quad 4) N_n = 0, \quad 5) N_{ns} = 0. \quad (12)$$

いま、仮定した (10) 式の関数を、基礎式 (3) ~ (9) 式に代入し、境界条件 (11), (12) 式によって各未知数を決定する。その場合、円孔縁の境界条件はコーシー積分を使って厳密に満足させるが、外部周辺は外部選点法による近似的な方法によった。最後に、円孔を有する円筒殻に荷重がかかった場合について、(4), (5) 式より z 軸上の y 方向の曲げモーメント M_{y0} および (8), (9) 式より z 軸上の y 方向の面内力 N_{y0} を求めておく。

§3. 円筒殻のき裂上の食いちがい

曲げ平板の場合と同じように^{3) 4)}, Fig. 1 に示すように, 円筒殻の円孔両側 x 軸上にき裂を想定し, その線上にたわみ角と変位の食いちがいを起させる。食いちがいの中心を $\pm x_0$ とすれば, y 軸に対称な応力関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_b(z) &= \frac{m_y x_0^2}{8\pi D z_a z_b} - \frac{n_y}{2\pi(k\nu+1)} \frac{(\lambda\lambda_2)^2 x_0^4}{16 \cdot 2 z_a z_b} \\ \varphi_b(z) &= -\frac{m_y}{8\pi D} \left\{ \frac{x_0 k\nu}{2} \log \frac{z_a}{z_b} + \frac{z x_0^2}{z_a z_b} + \frac{8k z x_0^2}{z_a^2 z_b^2} \right\} + \frac{n_y}{2\pi(k\nu+1)} \frac{(\lambda\lambda_2)^2}{16} \frac{z x_0^5}{3 z_a z_b} \\ \varphi''_m(z) &= \frac{n_y}{2\pi(k\nu+1)} \frac{x_0^2}{z_a z_b} - \frac{m_y}{8\pi D \cdot 16} \frac{(\lambda_2)^2 4k x_0^2 (z^2 + x_0^2)}{z_a^2 z_b^2} + \frac{m_y}{8\pi D} \frac{(\lambda_2)^2}{16} \frac{x_0^2}{z_a z_b} \left(\frac{3}{2} x_0^2 + 4k k\nu \right) \\ \varphi'_m(z) &= \frac{n_y}{2\pi(k\nu+1)} \left\{ \frac{k\nu x_0}{2} \log \frac{z_a}{z_b} - \frac{z x_0}{z_a z_b} \right\} + \frac{m_y}{8\pi D} \frac{(\lambda_2)^2}{16} \frac{x_0^2 (z^2 + x_0^2)}{z_a^2 z_b^2} \left(-\frac{5}{6} x_0^2 - 8k \right) \\ \chi(z, \bar{z}) &= -\frac{m_y x_0 C_1}{4\pi} \{ K_1(C_1 |z_a|) - K_1(C_1 |z_b|) \} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

又, (13) 式は座標 $\pm x_0$ 点まわりの値が一価であると言う下式の条件式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \oint [M_{ns} \sin \theta + M_{ns} \cos \theta - Q_n y] ds = 0 \\ M_y &= \oint [-M_{ns} \cos \theta + M_{ns} \sin \theta + Q_n x] ds = 0 \\ P_z &= \oint [-Q_n] ds = 0 \\ \oint [\chi_n - i \chi_s] ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし, $z_a = z - x_0$, $z_b = z + x_0$, $k\nu = (3+\nu)/(1-\nu)$, $C_1 = \sqrt{10}/h$, m_y, n_y : 食いちがいの強さ, M_x, M_y : x_0 点まわりの合モーメントの x, y 方向の成分, P_z : せん断力の合力, χ_n, χ_s : 法線, 切線方向の合力である。(13) 式の関数を(3), (4), (5), (6) 式に代入し, それぞれその式の荷重項とみなして, W_p, M_{p1}, M_{p2}, Q_p を求める。前章と同じく(11), (12) 式の境界条件で, (10) 式の関数を基礎式に代入し, 未知数 $A_n, B_n, C_n, D_n, E_{2n}, a_n, b_n, c_n, d_n, F_{2n}$ を決定する。この未知数を使って, 円孔両側の x 軸上に食いちがいをおこさせた場合の y 方向の $m_y=1$ の場合の曲げモーメント M_{y1} と面内力 N_{y2} を, 又 $n_y=1$ の場合の M_{y2} と N_{y1} を求めておく。

§4. き裂上の特異積分方程式

Fig. 1 に示すように, 円筒殻の円孔両側の x 軸上のき裂内 $d_1 \leq |x| \leq d_2$ において, 次の境界条件を満足せねばならない。

$$1) M_y = 0, \quad 2) M_{xy} = 0, \quad 3) Q_y = 0, \quad 4) N_y = 0, \quad 5) N_{xy} = 0 \quad (15)$$

上式の第 2, 3, 5 項は対称条件から自然に満足している。残る $M_y = 0$, $N_y = 0$ の条件を満たすために, 応力のつりあいから次の二つの特異積分方程式を構成させる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{d_1}^{d_2} M_{y1}(x, b) H_1(b) db + \int_{d_1}^{d_2} M_{y2}(x, b) H_2(b) db &= M_{y0}(x) \\ \int_{d_1}^{d_2} N_{y2}(x, b) H_1(b) db + \int_{d_1}^{d_2} N_{y1}(x, b) H_2(b) db &= N_{y0}(x) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし, M_{y1}, N_{y2} : b 点に m_y の食いちがいをおこさせたときの x 点の y 方向の曲げモーメント及び面内力。 M_{y2}, N_{y1} : b 点に n_y の食いちがいをおこさせたときの x 点の y 方向の曲げモーメント

及び面内力。 M_{y0}, N_{y0} : 円孔のある円筒殻に荷重がかかった場合の x 点の y 方向の曲げモーメント及び面内力。 H_1, H_2 は重み関数で次のように仮定する。

$$\left. \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} G_1(b) \\ G_2(b) \end{matrix} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{b^2 - d_1^2}{d_2^2 - d_1^2}\right) \left(1 - \frac{d_2^2 - b^2}{d_2^2 - d_1^2}\right)}} \quad (17)$$

ただし、 $G_1(b), G_2(b)$ は (16) 式から求められる未知数である。(16) 式はガウス・チェビシェフの積分公式及びその拡張⁵⁾を利用して数値的に求める。

§5. き裂先端のモーメント及び応力拡大係数

き裂内側 $x=d_1$ におけるモーメント拡大係数 K_{B1} は (16) 式よりユーシー積分を使って求められる。

$$K_{B1} = - \sqrt{2(d_1 - x)} \lim_{x \rightarrow d_1} M_{y0}(x) \quad (18)$$

同じくき裂外側 $x=d_2$ におけるモーメント拡大係数 K_{B2} は

$$K_{B2} = \sqrt{2(x - d_2)} \lim_{x \rightarrow d_2} M_{y0}(x) \quad (19)$$

より求められる。又、面内応力 N_y のみによる応力拡大係数 K_N は、き裂内側 $x=d_1$ において

$$K_{N1} = - \sqrt{2(d_1 - x)} \lim_{x \rightarrow d_1} \frac{N_{y0}(x)}{h} \quad (20)$$

となり、き裂外側 $x=d_2$ における応力拡大係数は

$$K_{N2} = \sqrt{2(x - d_2)} \lim_{x \rightarrow d_2} \frac{N_{y0}(x)}{h} \quad (21)$$

によって求められる。結局、表面における最大の応力拡大係数は $K = K_N + K_B \cdot 6/h^2$ となる。

§6. 解析結果の検討

円筒殻の円孔周辺に垂直に一定せん断力 Q がかった場合における、円孔両側にあるき裂先端のモーメント拡大係数 K_B 及び応力拡大係数 K_N を、(18)~(21) 式より計算し、Fig. 2, 3 に示した。又、先に著者が Reissner 理論及び Ambartsumyan 理論により、厚さ方向の応力、ひずみの影響を考慮した、曲げ平板の場合について導いた⁶⁾モーメント拡大係数の値を点線で示し比較した。殻の場合のモーメント拡大係数のみの値は、面内応力の影響のため、板の場合に比べて小さくなる。又、このような条件のもとでは、面内応力による応力拡大係数の値は、モーメント拡大係数による値に比べて非常に小さかった。

参考文献

- 1) P.M.Naghdi: Note on the Equations of Shallow Elastic Shells, Quart.App.Math., Vol.14, 1956
- 2) S.Krenk: Influence of Transverse Shear on an Axial Crack in a Cylindrical Shell, Int.Jour. Fracture, Vol.14, 1978
- 3) 玉手純: 中央にき裂を有する帯板の面外単純曲げ, 日本機械学会論文集, 第371号, 昭和52年7月
- 4) 石次則哲: 中央に一個又は二個のき裂を有する有限板の面外曲げ, 日本建築学会論文報告集,

Fig.2 Moment intensity factor $K_{\theta 1}$
at inside tip of crack
($h=0.2, a/A=1/3$)

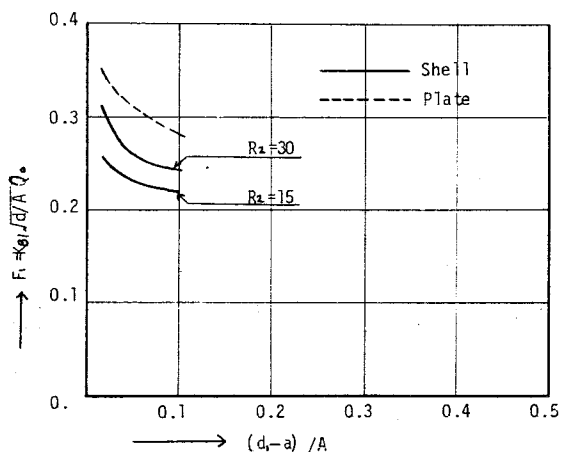
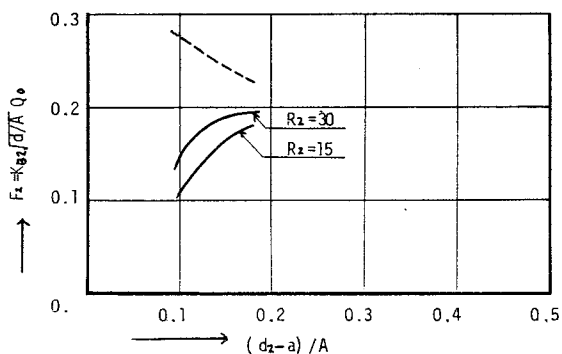


Fig.3 Moment intensity factor $K_{\theta 2}$
at outside tip of crack
($h=0.2, a/A=1/3$)



第309号, 昭和56年11月

5) F.Erdogan and G.D.Gupta: On the Numerical Solution of Singular Integral Equation, Quart.

Appl. Mech., Jan., 1972

6) 石浜則哲: 円孔両側にき裂を有する有限板の応力拡大係数, 第31回応用力学連合講演会, 昭和56年11月

Influence of Transverse Shear on an Axial Crack in a Cylindrical Shell with a Circular Cutout

by Noritetsu Ishihama *

Abstract

This paper is presented a solution of an axial cracked shallow cylindrical shell with a circular cutout, by taking into account the effect of transverse shear deformations. The analysis is based on the differential equations by 10th order shell theory which was given by P.M. Naghdi. In the present paper a brief derivation is demonstrated by Laurent expansion of the complex potentials which is given by interpreting function $Z = R\zeta$ as conformal mapping of points in the ζ -plane onto points in the Z -plane for a shallow cylindrical shell.

The solution is concerned with the determination of the stress distribution in a circular cylindrical shell subjected to a constant transverse shear around the edge of the hole. The boundary conditions assumed to be simply supported along the outside edges of the finite shallow shell in application of the collocation method and satisfied stress free relations along the internal hole by using Cauchy's-integral formula.

The analysis of moment and stress intensity factors of a shallow shell with two axial cracks by the both sides of hole in applied the concept of distribution of dislocation. The numerical solution of singular integral equations for dislocation density along the cracks is carried out by using the Gauss-Chebyshev method developed by F. Erdogan. The variation of moment and stress intensity factors at the tip of the cracks are also illustrated and compared with results for the stress intensity factor of plate with a hole which are based on E. Reissner's theory.

* Imamiya Tech. High School.