# (21) 動的安定問題における非線形弾性を考慮した座屈変形様式の研究

労働省　吉川 幸雄

## 1. はじめに

構造物の座屈・安定問題のうち圧縮荷重を受ける柱の不安定現象は、荷重に対する変形曲線に分岐点があるものを取扱うとき分岐座屈(Fig-1)と称している。この座屈現象は弾性安定理論の中心課題となるものとして最も古くから多く研究されてきていたが、ここで使用される基礎仮定[1]は、

1) 変位と歪との関係は微小であると考えて線形であること.

2) 応力と歪との関係も線形であること.

3) 応力間のつり合い及び外力とのつり合いは、変形前の形状で成立すればよいこと.

であった。このような微小変形の理論に立つ保存系の弾性安定問題は、現在ではほぼ完全に解かれている。しかし非線形弾性仮定をおいた非保存系の安定問題について、座屈不安定現象が従来の分岐座屈によって説明し得るか否かの研究はない。著者の最近の研究[2]によれば、非線形弾性を前提として、非保存系を動的安定解析したところ、線形理論並びに静的解析では得れない不安定現象の存在があった。このため本研究にては、従来の分岐座屈現象に対して、非線形弾性を考慮した非保存系の解析を目的とするための動的平衡状態式を導くことで、改めて座屈変形様式の研究・考察を行なった。したがって上述の基礎仮定を排除して、Fig-2に掲げる柱において、非線形弾性を有し、変は有限変位をとるものとし、外力P(t)は当初に軸方向作用し非保存的挙動を予想しているが散逸は考えない。

## 2. 動的平衡状態式

非線形弾性を仮定するため、基礎仮定2)は排除され、応力$\sigma$−歪$e$関係(Fig.-3)

$$\sigma = E\,e(1+\lambda_1 e) \tag{1}$$

を導入する($E$:縦弾性係数, $\lambda_1$:定数)。また外力$P(t)$は非保存力も考慮し、従来の分岐座屈理論から離れて、応力のつり合いと外力間とのつり合いの仮定3)は排除する。さらに柱の有限歪成分

$$e = w_x - x\,u_{xx} + u_x^2/2 \tag{2}$$

($w$:軸方向変位, $u$:横方向たわみ)を考えて、仮定1)も排除する。以降の解析においては、変位の微係数及び歪の三次までの項を採用し、系の仮想仕事式を導く.

そこで柱の歪エネルギー$\mathcal{V}$は、

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int_0^l E\Big[I\,u_{xx}^2 + \big(w_x^2+\frac{1}{4}u_x^4+w_x u_x^2\big)A + \lambda_1\Big\{\big(3w_x u_{xx}^2+\frac{3}{2}u_{xx}^2 u_x^2\big)I + \big(w_x^3+\frac{3}{2}u_x^2 w_x^2\big)A\Big]dx$$

と与えられ、ここに$A$:柱の断面積, $I$:断面二次モーメントである。さらに運動エネルギーは柱の単位長さ当りの質量$\mu$(一定)として$(1/2)\int\mu(w_t^2+u_t^2)\,dx$であるためFig.-2の系の仮想仕事方程式は次式で与えられる。

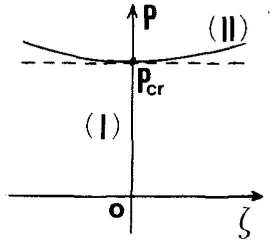



Fig.1

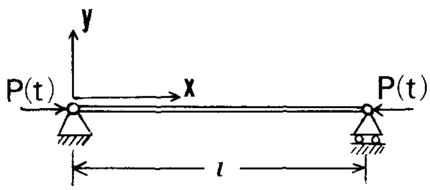



Fig.2

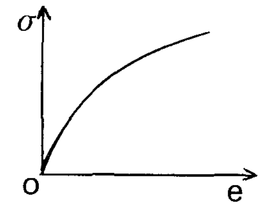



Fig.3

$$\int_0^l \mu(u_{tt}\delta u + w_{tt}\delta w)dx - \int_0^l E\Big[I u_{xx}\delta u_{xx} + (w_x\delta w_x + \frac{1}{2}u_x^3\delta u_x + \frac{1}{2}u_x^2\delta w_x + w_x u_x \delta u_x)A$$

$$+\lambda_1(\frac{3}{2}u_{xx}^2\delta u_x + 3w_x u_{xx}\delta u_{xx} + \frac{3}{2}u_{xx}u_x^2\delta u_{xx} + \frac{3}{2}u_{xx}^2 u_x \delta u_x)I$$

$$+\lambda_1(\frac{3}{2}w_x^2\delta w_x + \frac{3}{2}u_x w_x^2 \delta u_x + \frac{3}{2}u_x^2 w_x \delta w_x)A\Big]dx - P(t)\delta w(l) = 0 \quad (3)$$

柱の変形様式として、はじめに軸方向圧縮状態のときには、上式(3)において$w$のみ考慮すれば、この変形様式を支配する仮想仕事方程式が得られる。この仮想仕事式から軸方向変形の動的平衡状態の式として、次の微分方程式と境界条件を得る。

$$\mu w_{tt} - EA w_{xx} - 3EA\cdot\lambda_1 w_x w_{xx} = 0 \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ で } w = 0 \\ x = l \text{ で } EA w_x + \frac{3}{2}EA\cdot\lambda_1 w_x^2 - P(t) = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

さらに横方向変形について(3)式から軸方向変形仮想仕事の項を排除して、(4)式・(5)式を考慮して得られる$\delta w_x = 0$により、横方向変形仮想仕事方程式を求める。この仮想仕事式から横方向変形の動的平衡状態の式として、次の微分方程式と境界条件を得る。

$$\mu u_{tt} + EI u_{xxxx} - \left\{\frac{3}{2}EA + \lambda_1(3EIu_x + 9EIu_{xxx})\right\}u_x u_{xx} - P(t)u_{xx} = 0 \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ で } u = 0,\ u_{xx} = 0 \\ x = l \text{ で } u = 0,\ EI u_{xx} = 0 \end{array}\right\}$$

3. 座屈変形様式

(4)式・(6)式で得られた各変形様式を表現する平衡状態式を考察するために、$-EA/\mu = \alpha$, $EI/\mu = \beta$, $K^2 = -P(t)/\mu$ とおくと、それぞれ次のようにかける。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{軸方向変形様式：} & w_{tt} + \alpha w_{xx} + 3\lambda_1 \alpha w_x w_{xx} = 0 \\ \text{横方向変形様式：} & u_{tt} + K^2 u_{xx} + S(x) u_x u_{xx} + \beta u_{xxxx} = 0 \end{array}\right. \qquad (7)$$

ただし、

$$3\alpha/2 + 3\lambda_1\beta(1 + 3u_{xxx}) = \delta(x)$$

としている。式(7)の両式における非線形項 $w_x w_{xx}$, $u_x u_{xx}$ について、両非線形項の係数をあらためて $\delta_1(x)$ とおくと、両変形様式は変位 $f$ として、

$$f_{tt} + a \cdot f_{xx} + \delta_1(x) f_x f_{xx} + \underline{b \cdot f_{xxxx}} = 0 \qquad (8)$$

の一つの式で表現できる。ここで $a$, $b$ は定数、変位 $f$ は $b=0$ のとき $w$ を、$b \neq 0$ のとき $u$ をとる。

式(8)について、近似的に柱の固有振動数 $\Omega$, 波数 $k$ として $\xi = x - \frac{\Omega}{k} \cdot t$ の変換により、時間微係数 $f_{tt}$ の低次化を図る。そこで $f = f^{(0)}(\xi, t)$ によって式(8)は

$$\frac{2\Omega}{k} f^{(0)}_{\xi t} + \Delta(\xi, t) f^{(0)}_{\xi} f^{(0)}_{\xi\xi} + b f^{(0)}_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

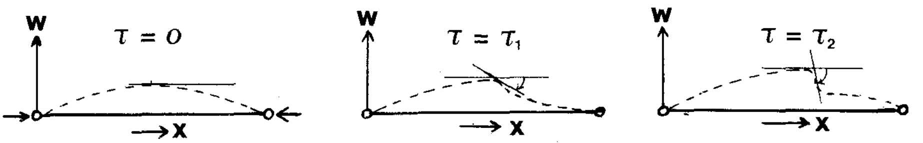
の形となり、$v = f^{(0)}_{\xi}$, $\frac{k}{2\Omega} \cdot t = \tau$ とおくと、上式は

$$v_\tau + \Delta' \cdot v v_\xi + \underline{b \cdot v_{\xi\xi\xi}} = 0 \qquad (9)$$

に帰着する。こうして両変形様式を表現する式は(9)式の形になることが判明し、この非線形微分方程式については、その解 $v$ に関する定性的性質が明らかにされている[3)]。

とくに軸方向変形様式においては $b=0$, $\Delta' =$ 定数であるため、解 $v$ の時間経過に対する変形様式は Fig.-4で与えられる。すなわち初期 $\tau_0 = 0$ における変形は時間経過 $\tau = \tau_1$ とともに波形勾配（図では軸方向変位を横変位表現に直している）が0から負の値をとるようになり、やがて有限の時間 $\tau = \tau_2$ において負の無限大をとり、波形は崩れる。したがって動的平衡形状として軸方向変形様式はつねに不安定形状となっている。

Fig.4




5．結論

従来の微小変形の理論にたつ分岐座屈現象を、有限歪成分をもつ非線形弾性柱の動的座屈現象に把え直した。すなわち軸方向変形様式及び横方向変形様式を決定する平衡状態式は(8)式あるいは(9)式として統一的に表現されることが判明し、同式の考察によって軸方向変形様式は非線形項 $w_x w_{xx}$ の存在によって時間経過に対して安定なままでいられないこと（Fig.-4)、したがってこの非線形 $u_x u_{xx}$ 項を分散させる分散項 $u_{xxxx}$ をもつ横方向変形様式にては、その平衡状態式が安定な解をもち得るため柱は当初から横方向変形様式を選ぶものと考察される。


＜文献＞1．長柱研究委員会編：弾性安定要覧，コロナ社，1961.

2．吉川 幸雄：非保存力を受ける非線形弾性柱の曲げ座屈，土木学会論文集才318号他.

3．Zabusky, N.J.：Proc. Symp. Nonlinear Partial Differ. Eqs., Academic Press 1967.

Investigation of Buckling Behavior of Non-linear elastic columns in Dynamic Stability

Yukio Yoshikawa*

In the problems of elastic buckling of columns,the critical load has been obtained by considering the behavior of ideal column, which is assumed initially to be perfectly elastic. If the load is less than the critical value, the column remains straight, and this straight form of elastic eguilibrium is stable. And if the lood is increased,the straight form of eguilibrium becomes unstable and the column returns to a slightly bent form. The critical load is, then, defined.

In this paper, for such concept of bifurcation of eguilibrium a more fundamental approach is followed. This analysis, based on bynamic method, consists of the investigation of buckling modes by consideving non-linear elasticity of column, which is assumed to be

$$\sigma = Ee(1+\lambda^1 e) \quad \lambda^1\text{:constant.}$$

As a result of introducing finite displacement theory, the eguation of motion governing the state of eguilibrium os system is obtained in the form

$$f_{tt} + af_{xx} + \delta(x) f_x f_{xx} + bf_{xxxx} = 0$$
$$(f\text{:displacement;}a,b\text{:constants})$$

, Which will discribe totally straight and bent forms of column.
More over the equilibrium of straight form of column is led to be unstable in a finite time.

*Ministry of Labor