

(20) 有限要素法による曲線桁橋腹板の非線形特性に関する研究

大阪市立大学 工学部 中井 博

大阪市立大学 工学部 北田 俊行

川崎重工 技術研究所 ○大南 亮一

1. はじめに

近年、市街地の高速道路などにおいて曲線桁橋の需要が益々増大しているにもかかわらず、わが国の道路橋示方書では、曲線桁橋腹板に関する設計基準がとくに設けられていないため、その設計に当っては、直線桁橋腹板の設計基準を準用しているのが現状である。著者らは、純曲げ、あるいは、せん断を受ける曲線桁橋腹板の挙動特性を実験的¹⁾²⁾に明らかにしてきたが、これらの成果を設計法に反映するためには、さらに解析的手法を通じ、各種パラメーターの影響を定量的に明らかにする必要がある。ところで、曲率をもつ腹板においては座屈問題はむしろ変形問題となり、荷重の増加に伴って変形を追跡するいわゆる有限変位解析が必要である。とくに、これらの腹板は、補剛材の取り付け位置が曲率の内側にある場合と外側にある場合とで、溶接による初期たわみにより大きく異なるため、単純な円筒形状とはならない。また、腹板は部分的な塑性化が荷重の増加に伴って広がることにより極限状態に至るため、極限強度を把握するためには材料の非線形性を考慮した解析が必要である。純曲げを受ける曲線桁橋腹板の解析は、差分法を用いた三上・古西・米沢の研究³⁾、あるいは、有限要素法を用いた倉西・樋渡の研究⁴⁾に見られるが、いずれも腹板を円筒シリンダーとした有限変位解析に過ぎない。

本論文は、上述のような複雑な初期形状を持つ曲線桁橋腹板の挙動特性、および、その極限強度解析を行うために開発した幾何学的、および、材料的非線形を考慮したアイソパラメトリック・シェル要素による有限要素法の解析法を紹介し、その有用性を明らかにした上で、曲率を有する腹板の解析結果を示すものである。

2. アイソパラメトリック要素による弾塑性有限変位解析

(1) 増分理論による仮想仕事の原理

幾何学的、および、材料的非線形を考慮した解析では増分理論が適している。ここでも、Updated Lagrangian (U.L)法⁶⁾による増分理論を用い有限要素法の定式化を行った。Fig.1に示すように、U.L法では固定された直交座標系において増分前の状態 C_n を基にして増分後の状態 C_{n+1} が定義される。増分理論による仮想仕事の式は、周知のとおり、次式で表わされる。

$$\int_{nV} {}^{n+1}_n S_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dV = {}^{n+1}R \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 nV は C_n における体積、 ${}^{n+1}_n S_{ij}$ は C_n から見た C_{n+1} の Kirchhoff の応力、 $\Delta \epsilon_{ij}$ は C_n から C_{n+1} までの Lagrange の増分ひずみ、および、 ${}^{n+1}R$ は C_{n+1} における外力の仮想仕事である。

式(1)の Kirchhoff の応力 ${}^{n+1}_n S_{ij}$ は、 C_n における Cauchy の応力 ${}^n\sigma_{ij}$ 、および、Kirchhoff の増分応力 ΔS_{ij} と次式の関係がある。

$${}^{n+1}_n S_{ij} = {}^n \sigma_{ij} + \Delta S_{ij} \quad \text{----- (2)}$$

また、式(1)の増分ひずみ $\Delta \epsilon_{ij}$ は、線形なひずみ Δe_{ij} と非線形なひずみ $\Delta \eta_{ij}$ からなり、次式のように表わすことができる。

$$\Delta \epsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta \eta_{ij} \quad \text{----- (3)}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \\ \Delta \eta_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta u_{k,i} \cdot \Delta u_{k,j}) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4) a, b}$$

ここで、 Δu_i は C_n から C_{n+1} までの増分変位である。

さらに、 ΔS_{ij} と $\Delta \epsilon_{ij}$ は、材料の剛度テンソル D_{ijrs} を用いると次式の関係が得られる。

$$\Delta S_{ij} = D_{ijrs} \Delta \epsilon_{rs} \quad \text{----- (5)}$$

以上で得られた式(2)、(3)、(5)を式(1)に代入すると、式(1)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{{}^n V} D_{ijrs} \Delta \epsilon_{rs} \delta \Delta \epsilon_{ij} dV + \int_{{}^n V} {}^n \sigma_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} dV \\ &= {}^{n+1} R - \int_{{}^n V} {}^n \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV \quad \text{---- (6)} \end{aligned}$$

式(6)の左辺第1項には非線形なひずみの積が含まれているため、式(6)から直線に解を求めることはできない。したがって、実際の解析では $\Delta \epsilon_{ij} \cong \Delta e_{ij}$ とし式(6)を線形化する必要がある。

(2) アイソパラメトリック・シェル要素による定式化

本プログラムでは前述のように、複雑な初期形状をもつ曲線桁橋腹板を対象としているため、任意形状の解析に適した Fig. 2 に示すような8節点のアイソパラメトリック・シェル要素を用いた。

以下に、線形化された式(6)にこの要素を適用した結果を示す。

a) 要素の幾何学的特性

要素内における任意点の座標 (X, Y, Z) は、Fig. 2 に示す要素の曲線座標 (ξ, η, ζ) で表わされた形状関数 $N_i(\xi, \eta)$ と各節点の座標 (X_i, Y_i, Z_i) を用いて表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \zeta t_i \mathbf{v}_{3i} \quad \text{----- (7)}$$

ここで、 t_i は各節点での板厚、 $\mathbf{v}_{3i}$ は各節点の中立面における単位垂直ベクトルである。

b) 要素内変位

要素内における任意点の変位 (u, v, w) は、各節点の全体座標に対する変位 (u_i, v_i, w_i) と

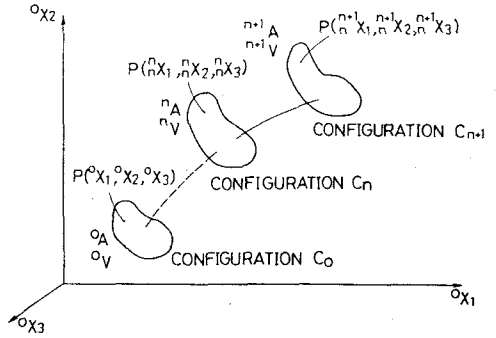


Fig. 1 Cartesian Coordinate System of U.L. Configurations

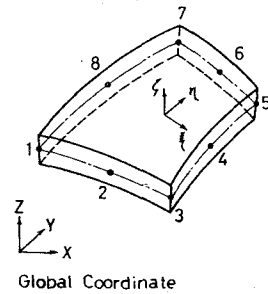
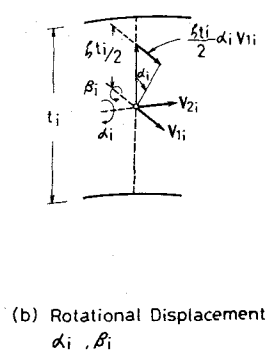
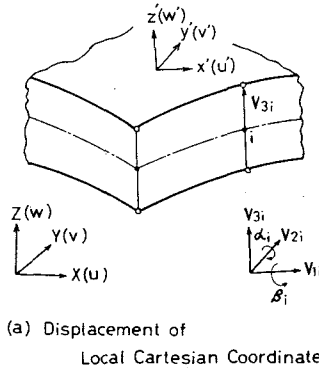


Fig. 2 Isoparametric Element

Fig. 3 (a), (b) に示す要素座標系 (x', y', z') に対する x', y' 軸回りの回転角 β_i, α_i により、次式のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \zeta t_i \phi_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (8)$$



(a) Displacement of Local Cartesian Coordinate

(b) Rotational Displacement α_i, β_i

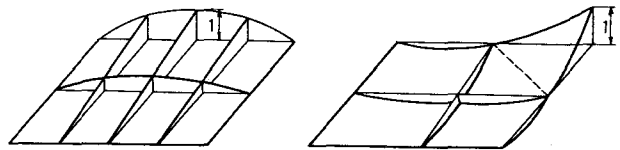
ここで、

$$\phi_i = [v_{1i}, -v_{2i}] \quad (9)$$

式(8)で表わされる中立面の変位モードは、Fig.4 に示すような形状を呈する。

c) ひずみ

一般に任意点のひずみは、要素座標系に対する変位 (u', v', w') を要素座標系



(a) Middle Nodal Mode

(b) Corner Nodal Mode

Fig. 4 Modes of Shape Function

(x', y', z') で偏分した項により表わすことができる。各項は以下のマトリックスにより表わされる。

$$[e_{u'}, e_{v'}, e_{w'}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \theta^T J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \theta \quad (10)$$

ここで、 J は Jacobian マトリックス、 θ は要素座標系と全体座標系の変換マトリックスであり、要素座標軸 x', y', z' に対する単位ベクトル v_1, v_2, v_3 (Fig. 3 (a) 参照) からなる。すなわち、

$$\theta = [v_1, v_2, v_3] \quad (11)$$

曲線座標系における ζ 軸と要素座標系における z' 軸が一致すると仮定するなら、式(10)の $\theta^T J^{-1}$ は次式のように表わすことができる。

$$A = \theta^T J^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(10)の u, v, w を式(8)を用いて表わすと、式(10)は以下のように変形することができる。

$$\begin{bmatrix} e_{u'} \\ e_{v'} \\ e_{w'} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 [B_i \theta^T, \frac{1}{2} t_i (\zeta B_i + C_i) \theta^T \phi_i] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、

$$B_i = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_i \quad \dots (14)_a \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_i \quad \dots (14)_b, \quad \left. \begin{aligned} B_{1i} &= A_{11}N_i, \xi + A_{12}N_i, \eta \\ B_{2i} &= A_{21}N_i, \xi + A_{22}N_i, \eta \\ C_{1i} &= A_{33}N_i \end{aligned} \right\} \dots (15)_{a \sim c}$$

d) 要素剛性マトリックス

微小変形に対する剛性マトリックス k_{Lij} は、式(6)の左辺第1項で $\Delta e_{ij} \cong \epsilon_{ij}$ を用いることにより次式で表わすことができる。

$$k_{Lij} = \left(\left(\left(\int_{-1}^1 \left[\begin{array}{cc} \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} t_i \phi_i^T \theta \end{array} \right] \bar{k}_{Lij} \left[\begin{array}{cc} \theta^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} t_j \theta^T \phi_j \end{array} \right] |J| d\xi d\eta d\zeta \right) \right) \right) \quad \dots (16)$$

ここで、

$$\bar{k}_{Lij} = \begin{bmatrix} G_i^T \\ \zeta G_i^T + H_i^T \end{bmatrix} D [G_j, \zeta G_j + H_j] \quad \dots (17)$$

$$G_i = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_i \quad \dots (18)_a \quad H_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \end{bmatrix}_i \quad \dots (18)_b$$

幾何剛性マトリックス k_{Gij} は、式(6)の左辺第2項から求めることができ、式(16)と同様な形で表わすことができる。ただし、 $\bar{k}_{Lij}$ は $\bar{k}_{Gij}$ となる。すなわち、

$$\bar{k}_{Gij} = \begin{bmatrix} B_i^T \\ \zeta B_i^T + C_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} [B_j, \zeta B_j + C_j] \quad \dots (19)$$

ここで、

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x' y'} & \tau_{x' z'} \\ & \sigma_{y'} & \tau_{y' z'} \\ \text{Sym.} & & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (20)$$

e) 内部応力の等価節点力

要素内応力による等価節点力は、式(6)の右辺第2項から以下のように表わされる。

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_i = \left(\left(\left(\int_{-1}^1 \left[\begin{array}{cc} \theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} t_i \phi_i^T \theta \end{array} \right] \begin{bmatrix} G^T \\ \zeta G_i^T + H_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x' y'} \\ \tau_{x' z'} \\ \tau_{y' z'} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta d\zeta \right) \right) \right) \quad \dots (21)$$

ここで、 Q_{xi} 、 Q_{yi} 、 Q_{zi} は全体座標系に対する力、 M_1 、 M_2 は要素座標系 x' 、 y' 軸周りのモーメントである。

(3) 弾塑性域における応力とひずみの関係

U.L法では Cauchy の応力を用いる必要がある。しかし、ここでは小さなひずみ範囲での有限変位解析を対象としていることから近似的に Kirchhoff の応力を用いることにした。この場合、応力とひずみの関係は式 (5) で表わされ、弾性域では通常用いられる材料の弾性剛度マトリックス D_e を用いることができる。弾塑性域での材料の剛度マトリックス D_{ep} は、Prandtl-Reuss の流れ則に Von Mises の降伏条件を適用することにより以下のように表わすことができる。

$$D_{ep} = D_e - D_p = D_e - \frac{D_e \{ \partial \bar{\sigma} / \partial \mathbf{S} \} \{ \partial \bar{\sigma} / \partial \mathbf{S} \}^T D_e}{H' + \{ \partial \bar{\sigma} / \partial \mathbf{S} \}^T D_e \{ \partial \bar{\sigma} / \partial \mathbf{S} \}} \quad \text{----- (22)}$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ は Von Mises の相当応力、 H' は材料の加工硬化率である。

解析プログラムにおいては、材料の非線形性により必要となる収束計算でのくり返し数を低減するため、Fig.5 に示すように、増分荷重に対し弾性域から弾塑性域に移行する遷移領域を定義し、この領域に対する D_{ep} マトリックスは Fig.5 の重み係数 m により修正された次式を用いた。

$$D_{ep} = D_e - (1 - m) D_p \quad \text{----- (23)}$$

材料が塑性化した場合、板厚方向の応力分布は直線性が保持されないため板厚方向にも層分割した。通常、各層での応力分布は一定とされるがここでは直線分布を取り入れ、少ない層数でも精度よく解析できるようにした。

(4) 有限要素法の定式化

各要素で得られる剛性マトリックスや等価節点力は、構造全体について組立てられ、全体系においては次式のつり合式が得られる。

$$([K_L + {}^i K_G] \Delta U = {}^{n+1} R - {}^i F = \Delta E_i \quad \text{----- (24)}$$

ここで、 i は C_n と C_{n+1} の間の反復計算におけるくり返し番号、 ${}^i K_L$ は状態 C_i に対する微小変形の剛性マトリックス、 ${}^i K_G$ は状態 C_i に対する幾何剛性マトリックス、 ${}^{n+1} R$ は C_{n+1} に対する外力ベクトル、 ${}^i F$ は C_i における内部応力による等価節点力である。

式 (24) の解は、Fig. 6 に示すような Newton-Raphson 法によるくり返し計算を行うことにより求められる。収束の判定は、不つり合力 ΔE_i と外力 ${}^{n+1} R$ のノルム比を用いた。すなわち、

$$[\{\Delta E_i\}^T \{\Delta E_i\} / \{{}^{n+1} R\}^T \{{}^{n+1} R\}]^{1/2} < \epsilon \quad \text{----- (25)}$$

ここで、 ϵ は収束判定に用いる $\epsilon < 1$ なる数である。

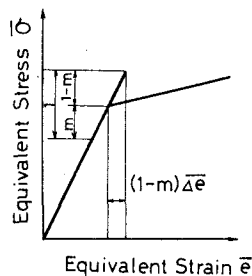


Fig. 5 Transitional Region from Elastic to Elasto-Plastic

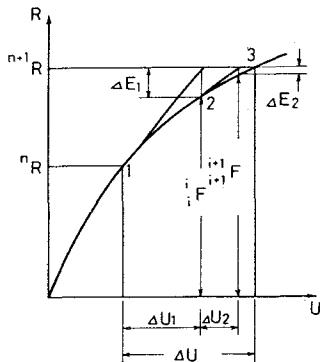


Fig. 6 Process of Iteration

以上の解析理論に基づいて開発した弾塑性有限変位解析プログラムのフローチャートをFig.7に示す。

3. 数値解析例

(1) 円筒シリンダーの弾性解析

Fig.8に示すように、円筒シリンダーが等分布の線荷重を半径方向に受ける場合の計算結果を示す。同図にはシリンダー軸方向の曲げ応力分布を示したが、文献7)による解析結果とよく一致していることがわかる。

(2) 板、および、シェルの非線形解析

a) 面内圧縮荷重を受ける初期たわみのある正方形板

初期たわみを有する正方形板が圧縮荷重を受ける場合の解析を、有限変位、および、弾塑性有限変位解析の両者で行った。荷重は強制変位で与え、荷重と幾何学的対称条件を用いモデルの1/4を解析した。Fig.9は板の中央点における面外変位の計算結果をCOAN⁸⁾による有限変位の解析解、および、文献9)で行った弾塑性有限変位の計算結果と比較したものである。いずれも両者には良好な一致が見られる。

b) 部分球殻

Fig.10に示すように、部分球殻の中央に集中荷重が作用するモデルの有限変位解析を行った。上述の板の場合と同じように、モデルの対称条件から1/4を解析した。

本モデルにおいても、荷重直下のたわみに対する計算結果と文献10)による解析結果を比較したが、Fig.10に示すとおり両者はよく一致していることがわかる。

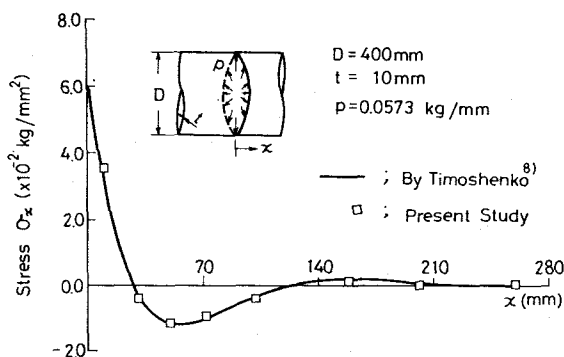


Fig. 8 Axial Bending Stress of Circular Cylindrical Shell Subject to Uniform Ring Load

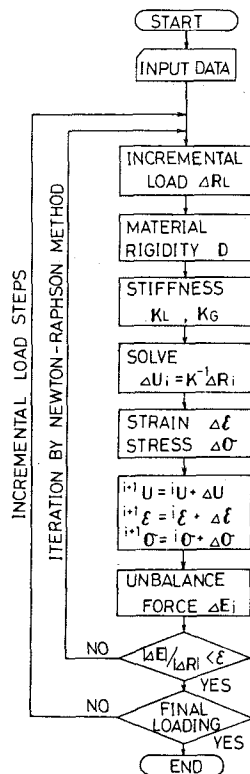


Fig. 7 Flow-Chart for Computer Program

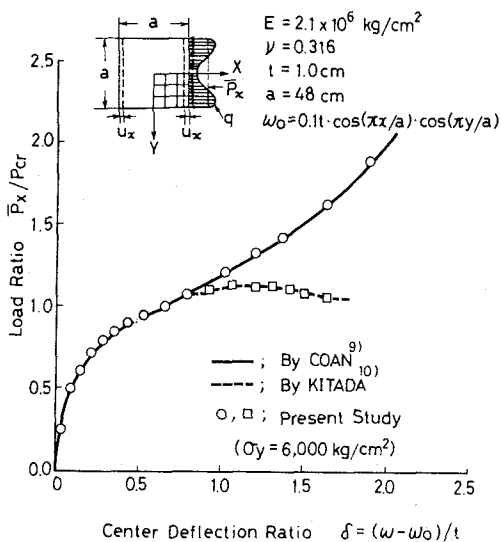


Fig. 9 Simply Supported Square Plate with Initial Curvature Subject to Edge Compression

4. 曲線桁橋腹板の挙動特性

曲線桁橋腹板が純曲げを受ける場合の挙動を調べるため以下に示す解析を行った。

解析モデルは、Fig. 11 に示すように周辺単純支持とし、載荷辺 AB, CD は平面保持の仮定より直線を保つものとし、断面回転角 θ を強制変位として与えた。この場合、載荷辺の円周方向変位は自由になるよう考慮した。さらに、安全側の配慮により、側辺 AC, BD の面内の境界条件はすべて自由とした。解析は対称条件を考慮しモデルの 1/2 を取り出し、収束性を調べた後、 6×3 の要素分割によりすべての解析を行った。

Fig. 12 は、曲率半径 $R=10\text{m}$, $b/t=140$, $a/b=0.7$ の腹板モデルの有限変位解析結果であり、中央断面における面外変位の形状を各荷重段階で示したものである。同図から、小さな荷重では腹板の圧縮側と引張側でほぼ逆対称の変形を呈するが、荷重の増加に伴って圧縮側の変位が大きくなり対称性が崩れてくるのがわかる。

Fig. 13 は、 $R=10\text{m}$, 50m , 100m の腹板について、圧縮側の最大の面外たわみが生じる点における荷重とたわみの関係を示したものである。曲率を有する腹板では真直な板のような顕著な座屈現象は見られなく、 $R=10\text{m}$ の腹板ではほぼ直線的にたわみが増加している。

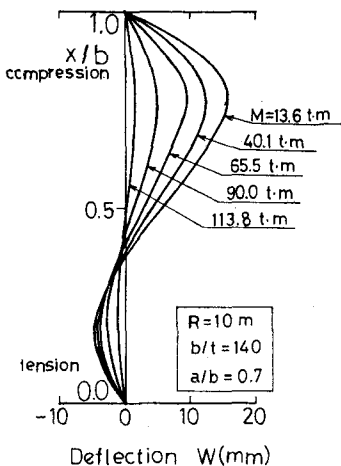


Fig. 12 Out-of-Plane Deflection Curves at the Middle Cross-Section

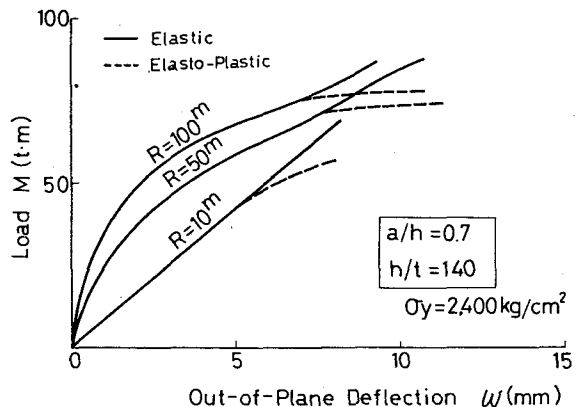


Fig. 13 Load-Out-of-Plane Deflection Curves (Elastic and Elasto-Plastic Analysis)

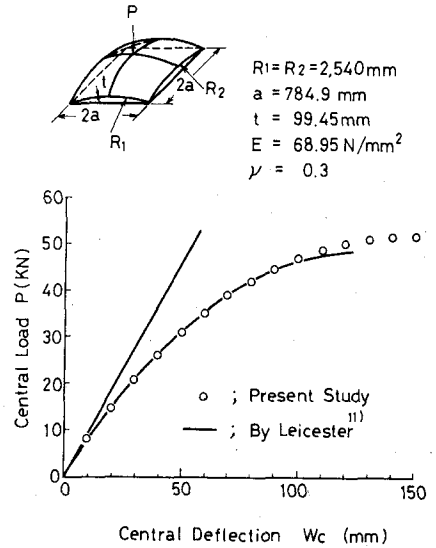


Fig. 10 Spherical Shell under Concentrated Load

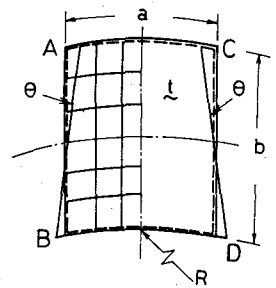


Fig. 11 Model of Web Plate

また、同図には材料の降伏点を $\sigma_y = 2.400 \text{ Kg/cm}^2$ とし、弾塑性を考慮した解析結果も示した。

Fig. 14 は、実験から得られた腹板の初期形状の特徴を示したものである。Fig. 15 は、これらの初期形状の影響を調べるため、シリンダー状の腹板に $\sin$ の半波形を有する初期たわみを曲率の内側 ($w_0 = -12 \text{ mm}$)、および、外側 ($w_0 = 12 \text{ mm}$) に与え、それぞれ鞍状と円筒状の初期形状をもつ腹板として解析した結果である。同図から、初期形状の差異により腹板の挙動が大きく異なることがわかる。

5. 結言

本研究では、浅いシェルの弾塑性有限変位解析プログラムを開発し、その有用性を理論解との比較により立証することができた。さらに、本プログラムにより任意の初期形状を有する曲線桁橋腹板の解析が、極限強度解析を含めて精度よく行えることがわかった。今後は、本プログラムによる詳細なパラメトリック解析を通じ曲線桁橋腹板の合理的な設計法に関する研究を推し進めていく予定である。

<参考文献>

- 1) 中井・北田・大南・吉川：純曲げを受ける曲線桁橋腹板の極限強度特性及びその初期不整に関する研究，土木学会第36回年次講演概要集，1-137，昭和56年10月
- 2) 中井・北田・大南・福本：せん断を受ける曲線桁橋腹板の垂直補剛材の挙動に関する実験的研究，土木学会第37回年次講演概要集1-192，昭和57年10月
- 3) 三上・古西・米沢：曲げを受ける円筒腹板パネルの非線形挙動，土木学会論文報告集， $\lambda 299$ ，1980・7，PP.23-34
- 4) 倉西・樋渡：曲げを受ける曲線プレートガーダーのウェブプレートの弾性挙動について，土木学会論文報告集， $\lambda 315$ ，1981.11，PP.1-11
- 5) Krakeland, B. and O.Mo. : Non-Linear Analysis of Shell and Beams Using Degenerate Isoparametric Element, Annual Conference of Stress Analysis Group of the Institute of Physics, University of Durham, England, Septem., 1977
- 6) Bath, K., E. Ramm and E.L. Wilson : Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis, Inter. Jour. for Numerical Method in Eng., Vol. 9, 1975, PP.353-386
- 7) Timoshenko, S.P. : Theory of Plates and Shells, McGRAW-HILL, 1956
- 8) Coan, J.M. : Large Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, Jour. of Applied Mechanics, Vol. 18, Trans. ASME, Vol. 73, 1951, PP.143-151
- 9) 北田：圧縮力を受ける鋼板及び補剛鋼板の極限強度に関する研究，大阪大学学位論文，1980
- 10) Leicester, R.H. : Finite Deformations of Shallow Shells, Proc. of ASCE, Vol. 94, $\lambda EM6$, 1968 PP.1409-1423

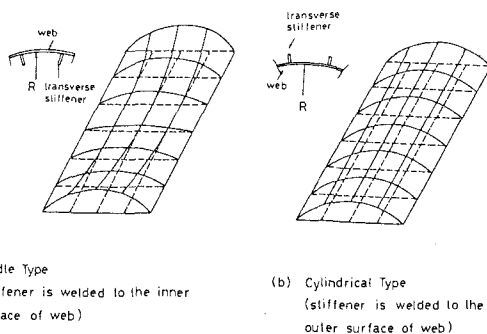


Fig. 14 Typical Initial Deformation of Curved Web Plates

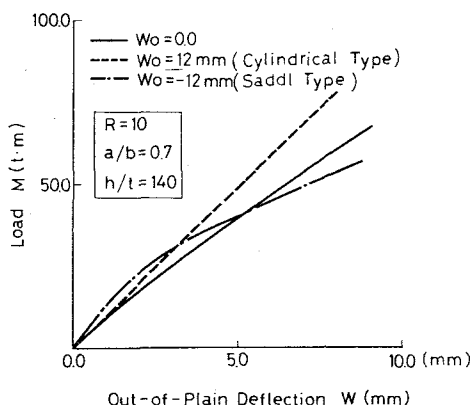


Fig. 15 Load-Out-of-Plane Deflection Curves (with Initial Deflection)

A Nonlinear Analysis of Web Plates for Curved Girder Bridges
by Using Isoparametric Finite Element Method

by

Hiroshi NAKAI^{*}, Toshiyuki KITADA^{**}, Ryoichi OHMINAMI^{***}

During past decade, the steel bridge structures are usually composed of thin plates with the curvature such as web plates of horizontally curved girder bridges. For these plates, the elasto-plastic and finite displacement analyses are required to clarify the ultimate strength, because of the facts that no clear buckling phenomenon can obviously recognize due to the curvature of web ultimate state.

Mikami-Furunishi-Yonezawa and Kuranishi-Hiwatashi have been analyzed the elastic finite displacement behaviors of cylindrically curved web plate under pure bending by virtues of the finite difference method and finite element method, respectively. However, additional studies may still be demanded concerning with initial imperfections and elasto-plastic behavior.

In this paper, a computer program considering the elasto-plastic and finite displacement analysis is developed on the basis of the isoparametric finite element method. Especially, the following points can rationally be taken into account in this method.

- 1) The consideration of initial deformation with arbitrarily shape.
- 2) Combination effect of elasto-plastic behavior on the finite displacement one.
- 3) Effect of residual stresses on the ultimate strength.

To ensure the applicability and the accuracy of this method, the following numerical examples are carried out;

- 1) Linear problem of a circular cylindrical shell.
- 2) Nonlinear problem of a plate and shell.
- 3) Nonlinear problem of curved web plate.

Through these numerical examples, it is shown that this method is a powerful tool to analyze the ultimate strength of curved web plates as is used to the horizontally curved girder bridges.

* Professor, Department of Civil Engineering, Osaka City University.

** Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Osaka City University.

*** researcher, Research Laboratory, Kawasaki Heavy Industries, Ltd.