

(16) 可変計量法の構造最適化への応用

愛媛大学工学部 ○大久保 禎 二

愛媛大学大学院 松 原 光 宏

1 ま え が き

構造物の設計は、技術的、経済的、社会環境的、美的など多面的な視点から課せられる種々の複雑な制約条件を考慮して、要求される機能を十分に遂行することのできる最適な設計変数を決定することであり、このような設計変数の決定には個々の部材断面の決定から構造形式の決定まで、各段階における数多くの意思決定が含まれる。もちろん、これらの意思決定は最終的には設計者の判断にゆだねられるべき問題ではあるが、各設計段階において考慮すべき制約条件が複雑なため、各設計者の経験のみでは適切な判断を下し得ない問題も多く、設計過程において論理的な意思決定の方法を導入し、計算機により設計における意思決定をある程度代行させ得るような、あるいは意思決定に必要なデータを自動的に提供することができるような Optimizer Subroutine Library を利用することが構造設計を最適に行なうためにきわめて重要なこととなっている。

このような Optimizer Subroutine には、広範囲の問題に適用できる汎用性、得られた解の最適性が理論的に明確であること、および収束性がよく比較的少ない回数で最適解が決定できることなどの性質が要求され、これまでに、SLP、SUMT、勾配法などの非線形計画法の各手法を利用する試みがなされてきている。

ところで、近年、これらの非線形計画法において大きな発展がみられ、一般化簡約勾配法（GRG法）、拡張ペナルティ関数法、逐次二次計画法（SQP法）など、より能率的な、かつ信頼性のある最適化アルゴリズムが提案されている。本研究は、近年、Powellらによって提案され、数多くの非線形計画法問題の解法の中でも最も有効であるとされている可変計量法に基づく最適化の方法について考察を行なうとともに、トラス構造物の最適設計問題に適用した例を示し、その有効性について検討した結果について述べるものである。

2 可変計量法に基づく最適化の方法

2-1 方法の概要

本研究では、Fig.1に示すように、次の計算過程により、設計問題の最小化を行なっている。

- (1) 設計問題を2次計画問題に近似する。この場合、目的関数の2次の項の係数マトリックスを任意の正定値行列とする。
- (2) (1)の2次計画問題を勾配射影法により解き、改良方向Sを決定する。
- (3) 解の最適性の検討を行う。Sが十分小さく、かつ制約条件が満足されている場合には最適解が得られたことになる。そうでなければ次のステップへ続く。
- (4) Sの方向にペナルティ関数を減少させ、変数の改良の大きさを決定する。

- (5) 目的関数の変化量および解の許容性を検討し、収束条件を満足していれば最適解が得られたものとする。そうでなければ次のステップへ続く。
- (6) (1)で設定した2次計画問題における目的関数の2次の項の係数マトリックス(正定値行列)をBFGS公式により修正し、ステップ(1)へもどる。

2-2 2次計画問題の導入

次の最適化問題を考える

$$\left. \begin{array}{l} \text{目的関数 } F(X) \longrightarrow \min \\ \text{制約条件 } g_i(X) \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここに、設計変数 $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$

また、目的関数および制約条件の1次の偏微係数マトリックスをそれぞれ次の様に表わす。

$$\left. \begin{array}{l} f = \nabla F(X) \\ A = [\nabla g_1, \dots, \nabla g_m]^T \end{array} \right\} \quad (2)$$

目的関数を、 X^k の近傍で次のような2次関数に近似する。

$$\begin{aligned} F(X) &= F(X^k) + f^k{}^T(X - X^k) \\ &\quad + \frac{1}{2}(X - X^k)B^k(X - X^k) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 B を正定値マトリックスとする。

上式で $X - X^k$ を $F(X)$ のsearchの方向 S とすると次のように書かれる。

$$Q(S) = F(X^k) + f^k{}^T S + \frac{1}{2} S^T B^k S \quad (4)$$

一方、不等号制約条件を X^k で線形近似すると次式を得る。

$$g_i(X) = g_i(X^k) + \nabla g_i(X^k) S \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (5)$$

すべての制約条件について上式の近似を行ない、式(2)の記号を用いて表現すると次式を得る。

$$A^k S + g^k \geq 0 \quad (6)$$

このようにして、式(1)の原設計問題は、上式の制約条件を満足し、式(4)の目的関数を最小化するつぎの2次計画問題に近似することができる。

$$\min \quad f^T S + \frac{1}{2} S^T B S \quad (7)$$

$$\text{subject to } AS + g \geq 0 \quad (8)$$

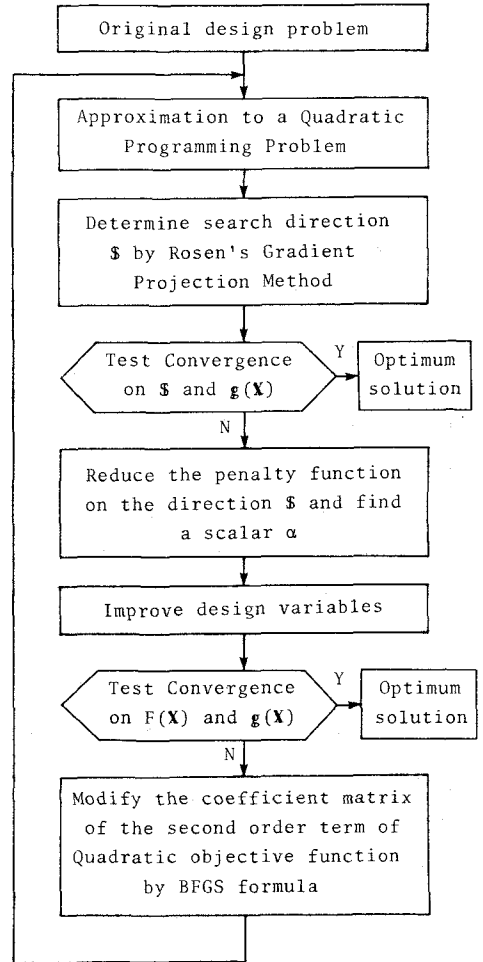


Fig.1 Optimization Process

2-3 S の決定

つぎに式(7)、(8)のSに関する2次計画問題を解くことが必要となるが、本研究ではRosenの勾配射影法³⁾によりこのSを決定した。

初期許容解Sの決定⁴⁾ 勾配射影法では、初期値 S^0 は式(8)の設計空間の実行可能領域内になければならない。この問題を解決するため、本研究では、

$$S_i = S_i' - S_i'' \quad S_i' \geq 0 \quad S_i'' > 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$

とし、 S_i として負の値をもとり得るように変数の変換を行ない、式(8)の中で違反している制約条件のスラック変数と実変数との基底変換を行うことにより、実変数の許容基底解を決定した。この方法により初期基底解は、式(8)の制約面上の点となる。

最適なSの決定 Sの初期値 S^0 が式(8)の実行可能領域内にある場合には、まず、目的関数 $Q(S)$ の最急降下方向すなわち $-\nabla Q(S^0)$ の方向に改良する。Sがactiveな制約面上の点(S^s)に達すると $-\nabla Q(S^s)$ のその制約面上への直交射影は次式より計算されるので、

$$d = -\{I - A_q^T (A_q A_q^T)^{-1} A_q\} \nabla Q(S^s) \quad (10)$$

ここに、 I ：単位行列、 A_q ：点 S^s におけるactiveな制約条件のSにかかる係数
Sをdの方向に改良する。dの方向に $Q(S)$ (式(7))のsearchを行ない、最小点が得られれば、その点が最適点 S_{opt} となり、 $d = 0$ となる。しかし、 $Q(S)$ が減少を続け、新たな制約条件面と交叉すると、そこで式(10)よりsearchの方向を求めなおし、 $Q(S)$ のsearchを続ける。このような操作をくり返すことにより S_{opt} を決定することができる。

λ_q の決定 S_{opt} が得られた点でactiveとなる制約条件に対するラグランジュ乗数 λ_q は次式より計算される。

$$\lambda_q = (A_q A_q^T)^{-1} A_q \nabla Q(S_{opt}) \quad (11)$$

上で求めた λ_q がすべて非負であれば、 S_{opt} はKuhn-Tucker条件を満足するので最適解となる。しかし、 λ_q の成分で負になるものがあれば、その絶対値が最大のものに対応する制約条件を A_q から取り除いて $q=q-1$ とし、式(10)のdを求めなおす。なお、 S_{opt} でactiveとならない制約条件に対するラグランジュ乗数は0となる。

2-4 変数の改良幅の決定

2-3で変数の改良方向 S^k を決定すると、つぎにこの S^k の方向に変数を改良するステップの大きさ α を決定する。

$$X^{k+1} = X^k + \alpha S^k \quad (12)$$

S^k が十分小さい場合には最適解が得られたこととなるが、 S^k が大きい場合には目的関数を減少させ、かつ制約条件をも満足させるように、次の関数のsearchを行う

$$P(X, \mu) = F(X) + \sum_{i=1}^m \mu_i \left| \min(0, g_i(X)) \right| \quad (13)$$

α の値は次式を満足するように決定する。

$$P(X^{k+1}, \mu^k) < P(X^k, \mu^k) \quad (14)$$

ここで、 μ^k の成分 μ_i^k は次のようにして求める。

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \quad \text{のとき} \quad \mu_i^0 = |\lambda_i^0| \\ k \geq 1 \quad \text{に対して} \quad \mu_i^k = \max\{|\lambda_i^k|, \frac{1}{2}(\mu_i^{k-1} + |\lambda_i^k|)\} \end{array} \right\} \quad (15)$$

式(14)の条件は、 α のみの関数

$$\phi(\alpha) = P(X^k + \alpha S^k, \mu^k) \quad (16)$$

を $\alpha > 0$ に対して減少させることであり、 $\phi(\alpha)$ を2次関数に近似して

$$\phi(\alpha) \leq \phi(0) + 0.1\alpha\phi'(0) \quad (17)$$

を満足するような α を変数の改良幅とし、式(12)により改良変数を決定している。

2-5 Bの修正

2-2で述べた2次の目的関数の正定値行列Bは、目的関数F(X)のみならず、制約条件g(X)の2次の偏微係数の情報を含む正定値行列とするのが適当である。そこで、Bを次のラグランジュ関数

$$L(X, \lambda) = F(X) - \lambda^T g(X) \quad (18)$$

のXに関する2次の偏微係数マトリックスの近似とし、現在、無制約最小化問題に対して、最も有効とされている次のBFGS公式を用いて、Bを修正することとした。ここで λ は2次計画問題より得られたラグランジュ乗数であり、式(11)より与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} B^{k+1} = B^k - \frac{B^k \delta \delta^T B^k}{\delta^T B^k \delta} + \frac{\eta \eta^T}{\delta^T \eta} \\ \text{ここに、} \delta = X^{k+1} - X^k \\ \eta = \theta \delta + (1 - \theta) B^k \delta, \quad 0 \leq \theta < 1, \\ \theta = \nabla_x L(X^{k+1}, \lambda^k) - \nabla_x L(X^k, \lambda), \quad \theta = \begin{cases} 1 & , \delta^T \delta \geq 0.2 \delta^T B \delta \\ \frac{0.8 \delta^T B \delta}{\delta^T B \delta - \delta^T \delta} & , \delta^T \delta < 0.2 \delta^T B \delta \end{cases} \end{array} \right\} \quad (19)$$

3 トラスの最適設計例

3-1 設計問題

2で述べた最適化の方法によりトラス構造物の最適設計を行なった例について述べる。トラスの各部材はFig.2に示す正方形断面を有するものとし、断面寸法 $D = [D_1, \dots, D_n]^T$ ($D_i \geq 0.8 \text{ cm } i=1, \dots, n$)を設計変数として考慮した。制約条件としては、すべての部材の応力に関する制約条件

$$g_{\sigma i}(D) = |\sigma_{ai}| - |\sigma_i| > 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (20)$$

ここに、 σ_i, σ_{ai} はそれぞれ部材iの実応力および許容応力度、

$$\sigma_{ati} = 1400 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{aci} = 1300 \text{ kg/cm}^2$$

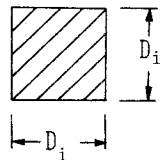


Fig.2 Design Variable D_i

および格点のたわみに関する制約条件

$$g_{sj}(D) = \delta_{aj} - \delta_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, J) \quad (21)$$

ここに、 δ_j, δ_{aj} はそれぞれ着目点 j の実たわみ量および許容たわみ量、 J は着目点の数

を考慮している。また、目的関数としては次式で表わされるトラスの重量を考慮し、最小重量を与える部材断面寸法 D を決定することとした。

$$F(D) = \sum_{i=1}^n \rho D_i^2 \ell_i \quad (22)$$

ここに、 ρ : 部材の材料の単位容積当りの重量であり、本研究では計算を単純にするため $\rho = 1 (\text{kg}/\text{cm}^3)$ と仮定した。 ℓ_i : 部材 i の部材長

3-2 最適化の計算過程

2 で述べた方法によりトラスの最適設計を行なう過程を Fig.3 に示す。この場合トラスの解析は変位法により行ない、変数 D_i に対する実応力およびたわみの偏微係数は差分法により計算した。

3-3 6 部材 トラスの最適設計例

Fig.4 に示す 6 部材トラスにおいて、部材の許容引張応力度 $\sigma_{ta} = 1400 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 、許容圧縮応力度 $\sigma_{ca} = 1300 \text{ kg}/\text{cm}^2$ とし、格点 3 の許容たわみ量を $0.27 \text{ cm}, 0.25 \text{ cm}, 0.23 \text{ cm}$ とした場合の $A=D^0$ の初期値および最適値、最適解を得るまでの反復改良回数、双対法⁵⁾による最適解の目的関数値などを Table 1 に示す。この表において、最適値の横に (σ) 、 (δ) と記してあるのは、それぞれの部材が応力制限あるいはたわみ制限により決定されていることを示している。また $\delta_a = 0.27 \text{ cm}$ および 0.23 cm の収束状況を Fig.5 および 6 に示す。各許容たわみ量における最適解を検討すると、 $\delta_a = 0.27 \text{ cm}$ ではすべての断面が応力制限により決定され、 $\delta_a = 0.25 \text{ cm}$ では部材 1, 2, 4 が応力制限、その他の部材はたわみ制限により最適解が決定されている。また δ_a をさらに厳しく 0.23 cm に制限した場合には、すべての部材断面はたわみ制限により決定されている。また、初期値が変わっても最適解の目的関数値はすべて等しくなっている。これらの最適解は双対

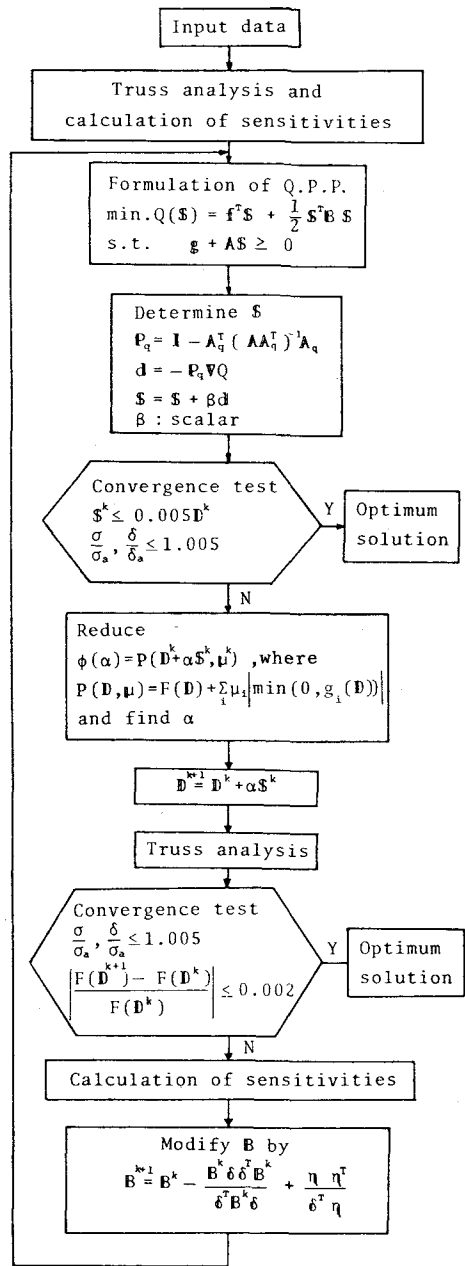


Fig.3 Optimum Design Process of Truss

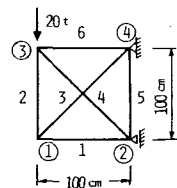


Fig.4 6 Bar Truss

法⁵⁾ など他の方法により得られた最適解の目的関数値と完全に一致しており、全域的な最適解が得られていることが明らかである。また目的関数値の最適値への収束は直線的であり、2～3回のくり返しで最適値の近傍に達し、さらに数回のくり返しで設計変数も最適値に収束している。また、これらの最適解では、式(7),(8)の2次計画問題で決定される S_{opt} はすべて0となっている。

3-4 10部材および16部材トラスの最適設計例

Fig.7および8に示す10部材および16部材トラスの最適設計を行なった結果をそれぞれFig.9および10に示す。

これらのトラスにおいては、各部材の応力制限の他に、Fig.7のトラスでは荷重載荷点の垂直たわみの制約、またFig.8に示すトラスでは荷重載荷点A,Bの垂直たわみの制約を考慮している。本法では原問題の設計変数の初期値の原制約条件に対する許容性よりも、2次計画問題での S^0 の式(8)に対する許容性が問題となるが、本研究で述べた2-3の方法により、いかなる初期値から出発しても、容易に実行可能な S^0 を決定することができる。最適解への収束性は6部材トラスの傾向と全く同様に直線的であるが、収束に要する回数は部材数とともに増加している。ただ変数の改良の途中で、制約条件が大きく違反しているにもかかわらず、変数Dの改良幅 α の決定に際し式(13)の関数 $P(X, \mu)$ が $\alpha=0 \sim 1$ の範囲ではほぼ水平となり、式(17)から決定される α が非常に小さな値となり、変数Dの改良に多くの反復回数を必要とすることが生じた。本研究では、このような無駄な改良反復を防ぐため、 $\alpha=0.1$ とするこ

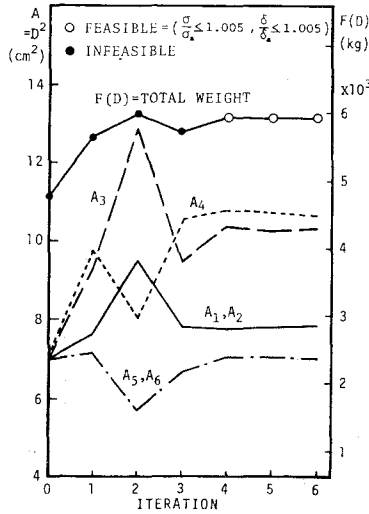


Fig.5 6 Bar Truss ($\delta_a=0.27\text{cm}$)

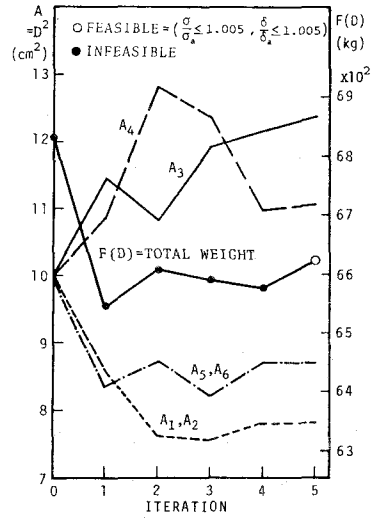


Fig.6 6 Bar Truss ($\delta_a=0.23\text{cm}$)

Table 1 Initial and Optimum A of 6 Bar Truss

δa		0.27cm		0.25cm		0.23cm	
INITIAL VALUES A_0 (cm ²)	1	7.0	10.0	7.0	10.0	7.0	10.0
	2	7.0	10.0	7.0	10.0	7.0	10.0
	3	7.0	10.0	7.0	10.0	7.0	10.0
	4	7.0	10.0	7.0	10.0	7.0	10.0
	5	7.0	10.0	7.0	10.0	7.0	10.0
	6	7.0	10.0	7.0	10.0	7.0	10.0
OPTIMUM SOLUTION A_{opt} (cm ²)	1	7.84(σ)	7.74(σ)	7.67(σ)	7.59(σ)	11.45(δ)	7.82(δ)
	2	7.84(σ)	7.75(σ)	7.67(σ)	7.59(σ)	11.45(δ)	7.82(δ)
	3	10.32(σ)	10.16(σ)	10.65(δ)	10.54(δ)	16.21(δ)	11.07(δ)
	4	10.64(σ)	10.81(σ)	10.91(σ)	11.01(σ)	7.23(δ)	12.38(δ)
	5	7.01(σ)	7.10(σ)	7.57(δ)	7.65(δ)	5.10(δ)	8.73(δ)
	6	7.01(σ)	7.10(σ)	7.57(δ)	7.65(δ)	5.10(δ)	8.73(δ)
TOTAL WEIGHT (kg)		5934.3	5934.8	6097.0	6094.2	6623.2	6625.2
ITERATION		6	4	3	5	7	5
Number of sensitivities calculation		5	3	3	5	8	6
TOTAL WEIGHT BY DUAL APPROACH ⁹⁾ (kg)		5937.9		6094.6		6625.4	

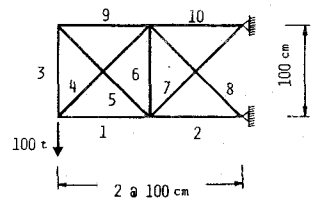


Fig.7 10 Bar Truss

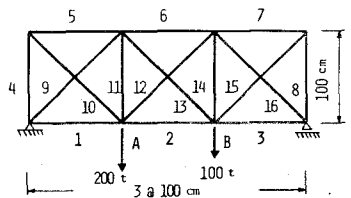


Fig.8 16 Bar Truss

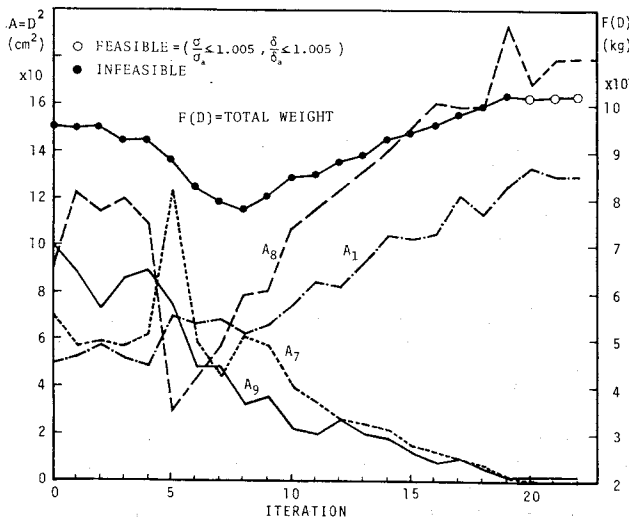


Fig.9 10 Bar Truss ($\delta_a=0.3\text{cm}$)

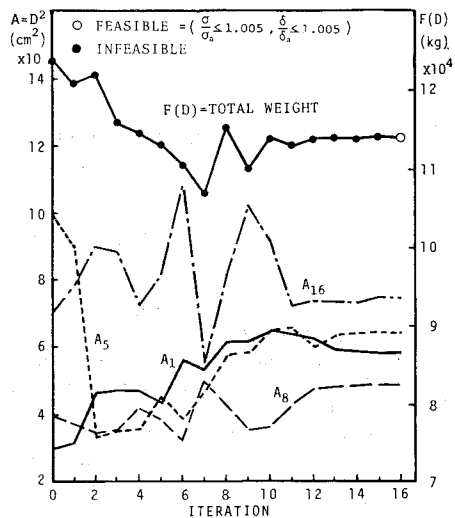


Fig.10 16 Bar Truss ($\delta_a=0.6\text{cm}$)

とによりこの問題を解決したが、多変数問題では α の値の決定にあたって十分な注意が必要である。

4 ま と め

本論文で述べた可変計量法と二次計画法に基づく構造最適化の方法の特徴をまとめると次の通りである。

- (1) 目的関数を二次形式に近似し、BFGS公式を用いてその二次の項の係数Bにラグランジュ関数の二次の微係数の情報を蓄積し、さらに正定値性を保っているの、本研究の方法により超一次の収束性が得られ、従来の非線形計画法の各手法と比較して、最適解への収束が非常に良好である。
- (2) しかし問題によっては、変数の改良幅 α の決定に際し、式(13)の関数がほぼ水平となり、式(17)より決定される α が非常に小さくなり、変数の改良に多くのくり返しを必要とし、収束が遅くなることも生ずるので、多変数問題では α の値の決定に十分な配慮が必要である。
- (3) 最適解を決定する過程で、人為的に調整すべき摂動パラメータが存在しないので、アルゴリズムの信頼性が高い。
- (4) 二次計画問題の許容解は、2-3で述べた基底変換により容易に得ることができる。さらにこの最適化アルゴリズムでは、着目点が最適解より離れるにしたがって変数の改良幅が大きくなるので、いかなる初期値からでも比較的容易に最適解へ収束させることができる。
- (5) 本論文で述べた最適化の方法は、その定式化および解を決定する過程で特別な条件を付加させることもなく、すべての連続形変数を有する最適化問題に適用可能であり、上記(1),(3),(4)の理由により、一般の構造物の最適設計にきわめて有効な、汎用性のあるOptimizerとして利用することができる。なお、本研究は昭和57年度文部省科学研究費(試験研究(A))の補助を受けて行なったものである。

参 考 文 献

- 1) M.J.D.Powell: "A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations", in Proc. of the 1977 Dundee Conf. on Numer. Anal. 1977.
- 2) M.C.Biggs: "Constrained minimization using recursive equality quadratic programming" in "Numerical methods for nonlinear optimization" (ed.F.A.Lootsma) Academic Press, 1972.
- 3) 今野浩, 山下浩: "非線形計画法" 日科技連, pp.255-263, 1978.
- 4) 大久保植二: "最適構造設計の基礎と応用" 土木学会中四国支部講習会テキスト, 1979.
- 5) 大久保植二, 谷脇一弘: "双対理論による構造最適化に関する研究" 愛媛大学工学部紀要, 第10巻第2号, 1983年2月刊予定

STRUCTURAL OPTIMIZATION USING VARIABLE METRIC METHOD AND QUADRATIC PROGRAMMING

SADAJI OHKUBO * MITSUHIRO MATSUBARA **

Structural design is linked to engineering, economical, social and further artistic circumstances and involves a number of decision making at various design stages such as from the conceptual design to the detailing of member elements. Computer-aided design procedures are strongly effective to the design and the portion of the design process that can be optimized automatically by the optimization methods should be left to the computer in order that the designer concentrates his efforts on the better decision making. In this sense, the completion of the optimizer subroutine library is significantly important for the optimum structural design. This paper presents fundamental investigations on the application of the optimization algorithm proposed by Powell et al. to truss problems, which seems to be one of the most effective optimizer for general non-linear programming problems at present.

The algorithm defines a quadratic subproblem in each iteration step to minimize an approximation of the Lagrangian subject to the linearized constraints. The subproblem is solved for the search direction S of the variables by Rosen's Gradient Projection Method, in which an efficient process to find an initial feasible point is presented in this paper. Then a line-search of a penalty function in the direction of S is introduced to determine the new iterate. The step length α of the variables is obtained by a quadratic interpolation. If the new iterate is not optimal, the positive definite coefficient matrix of the second order term in the quadratic objective function is updated by the BFGS formula and return to the new quadratic subproblem.

Several indeterminate truss problems are solved by the algorithm, in which the stress and displacement constraints are subjected and following conclusions are obtained.

- 1) The iteration required to the near optimum is still increased as the number of variables increases. However, for the reason that the coefficient matrix of the second order term of quadratic objective function accumulates the information of second derivatives of the Lagrangian and keeps its positive definiteness always by BFGS formula, the successive solutions converge to the optimum superlinearly and relatively small number of iterations are needed to the optimum solution compared with other Nonlinear Programming algorithms.
- 2) However, in some problems, the penalty functions come to very flat even several constraints are violated fairly and step length α determined is very small. It results slow convergence. Further investigation is needed on this point.
- 3) Since it is not necessary to adjust the perturbation parameter for convergence, the algorithm is so reliable and simple.
- 4) The process to obtain an initial feasible point in the quadratic subproblem does work very well and the size of improvements of the variables αS increases automatically as the distance from the optimum solution increases. It makes also ensure the rapid convergence from any starting points and increase reliability of the algorithm.
- 5) In summary, the optimization algorithm presented herein can be used as a very effective optimizer for general purpose in the optimum structural design procedures.

* Department of Civil Engineering, Ehime University

** Graduate Student, Department of Civil Engineering, Ehime University