

(13) 円筒タンクの連成振動に関する研究

埼玉大学工学部
○ (株) 日建設計
埼玉大学工学部

東原 紘道
石井 武司
三田 武

1. はじめに

石油タンクやLNGタンクなどの鋼製円筒形タンクの地震被害は、今日まで数多く経験されてきた。これらの損傷は大きく次の3つに分けられる。

- i) 液面動揺（スロッシング）によるタンク上部の破損及び内容液の溢流
- ii) タンク側板の変形及び座屈
- iii) 地盤の変形によるタンク底板部の破損及びタンクの沈下

現在、これらの問題に対して、タンク本体と地盤を切り離して解いている。すなわち、タンク底板部を完全剛結条件で解析することにより、求める動水圧を地震荷重として再びタンク本体に静的に作用させて解く方法である。しかしながら、地震波は基礎を通り、タンク本体に入力されるものであり、それを通して基礎とタンク本体の振動が互いに連成している。中でも地盤上に直接設置される石油タンクでは、その底面積も大きいので底板を通したタンク本体と地盤とのエネルギーのやりとりが問題となると考えられる。石油タンクの実測結果のいくつかにおいても、底部完全剛結の解析結果とずれがあり、地盤の影響がかなり関連しているとの指摘がなされている。その他、側板直下部の浮き上りやめり込み現象も(iii)の原因のひとつとしてあげられている。本研究では、以上の観点から、底板と側板の振動性状の把握に主眼を置き、地盤を単純な分布バネで置き換えたWinkler基礎としてタンク本体～内容液～地盤の連成系の解析を行うものである。

2. 既往の研究

タンク本体～内容液～地盤の連成の三者の連成振動に関する研究は、現在はじめられた段階であろう。実験による研究としては、弾性床の上にタンクを載せて水平加振させた中島の研究(1980年)や鉛直加振させた渡辺の研究(1981年)がある。一方、解析による研究としては、系全体を有限要素法で解くものや、地盤を単純な集中バネで置き換えたものがある。中でも、三者の完全な連成系における解析は、それぞれの物性が大きく異なるため、きわめて困難である。

解析手法を考える上で、三者の連成振動はタンク側板と内容液の連成振動の拡張と考えられる。この系の解法は一般に有限要素法による数値解法が主である。この手法は液体の扱い方で2つに分けられる。1つは、液体を三次元的に細かく有限要素法に分割するもので、他方は液体の支配方程式であるLaplace方程式の特徴を利用して境界表面だけを二次元的に分割する手法がとられている。上述の連成系は、前者の手法に地盤を加えた手法で解かれている。なお、本研究は、自由度を減らすために内容液内部を分割する必要のない後者の手法を用いている。

3. 解析手法

系の運動方程式を線形の範囲で評価するために、次の仮定を導入する。まず、タンク本

体に対しては、

- 1) タンク本体は、側板部のシェルと底板部の円板で構成されている。結合部を剛結と見なす。
- 2) タンク本体の変形は微小であるとして、座屈などの不安定問題を扱わない。
- 3) 底板の面内変形を無視する。

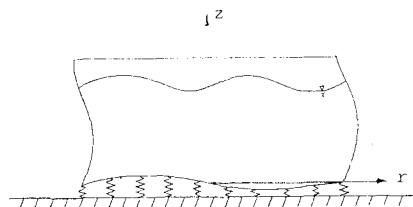


Fig. 1 Analytical Model

内容液に対しては、

- 1) 液体は非粘性、非圧縮性で、非回転運動するとして見なす。
- 2) 内容液とタンク本体との接水面では、運動中、その間に空隙を発生しないとして見なす。
- 3) 自由表面の波高は微小振幅波理論が適用できる範囲のものであるとして見なす。

地盤に対しては、

- 1) 地盤を鉛直方向に作用した力のみに抵抗するものとし、その際生ずる地盤反力を線形と見なして、分布バネで置き換える。
- 2) 地盤反力係数を一様と見なす。
- 3) 地盤と底板の間では、滑動や剥離を生じないものとして見なして、常に同一の運動をしているものとする。

以上によってモデル化されたタンクを図1に示す。座標系は底板の中心点を原点とした円筒座標系である。運動方程式の中で未知となる変位は、側板と底板の面外変位 w_s, w_b と、側板の θ 方向および ϕ 方向の面内変位 u, v 、そして、自由表面の波高 w_f である。なお、添字 b, s, f, l はそれぞれ底板、側板、自由表面、液体内部および地盤を表わす。

解析モデルを解くにあたり、個々の部分に対する支配方程式と境界条件を導いて解く方法と、エネルギー原理を用いて前者と等価な汎関数を定義して停留値問題に置き換えて解く方法がある。ここで扱う問題を解析的に解くことはきわめて困難であるため、一般に数値解法による。したがって、数値解法における種々の利点から判断して、後者の方法によって解析を行う。

エネルギー原理によれば、汎関数 I は Lagrangian $\mathcal{L}$ を用いて次のように定義される。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t) dt \quad \cdots (1)$$

$$\mathcal{L}(t) = \{T_s(t) + T_b(t) + T_l(t)\} - \{U_s(t) + U_b(t) + U_e(t) + U_g(t)\} \quad \cdots (2)$$

ここで、 T と U はそれぞれ運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを表わす。側板と底板については、それぞれシェル理論および薄板理論を適用することによって、 T と U が定まる。内容液については、通常ではその運動エネルギーを体積分で評価している。この定式化によれば、離散化の際に自由度を内容液の境界表面および内部領域に配する必要がある。本研究では、Green 公式を適用して表面積分で評価することによって、自由度を内容液の境界表面のみに配している。一方、ポテンシャルエネルギーについては重力に対する仕事として表面積分で評価している。これらは、速度ポテンシャル中と重力加速度 g を用いて次のように定式化される。

$$T_k = \frac{\rho_l}{2} \iiint_{V_k} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dv = \frac{\rho_l}{2} \iint_{S_k} \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds \quad \dots (3)$$

$$U_k = \frac{\rho_l}{2} \iint_{S_k} g \cdot w_k^2 \, ds + \frac{\rho_l}{2} \iint_{S_b} g \cdot w_b^2 \, ds \quad \dots (4)$$

ここで、 V 、 S は内部領域と表面領域、 n は境界表面上の外向きの法線ベクトル、 ρ_l は液体の密度、を表す。

地盤にたくわえられるポテンシャルエネルギー U_g は 地盤反力係数 k_v を用いて次式で求められる

$$U_g = \frac{1}{2} \iint_{S_b} k_v \cdot w_b^2 \, ds \quad \dots (5)$$

4. 離散化

モデルが軸対称構造を有しているので、各自由度を周方向にFourier展開する。

$$\left. \begin{aligned} u(\theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m(z) \cos m\theta \\ v(\theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} v_m(z) \sin m\theta \\ w(\theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} w_m(z) \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

級数の直交性より 各展開次数ごとに独立して解析を行なうことができる。以下、任意の次数に対する解析を述べる。

シェルと底板の有限要素モデルを図2と図3に示す。

試行関数である変位関数は区分的なHermite関数である。ただし、底板の中心点を含む要素に対して適用すると、中心におけるひずみや応力の物理量が発散し、エネルギーは有界にならない。本研究においては、許容される試行関数として、円板の基礎式の同次解を利用した高次の円板要素を新たに開発した。これにより、中心点近傍の解は安定し、高次の m に対しても十分な精度の解が得られた。

内容を図4のように分割する。要素には周方向のみに変化するSourceを設ける。すなわち、要素の母線方向は一定の強さのSourceを分布させる。そして、その中心を節点としこの点が無ダンク本体の節点と対応するように分割を行なう。この節点におけるSource σ を自由度にとって定式化を行なう。

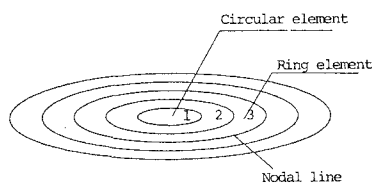
要素 q でのSourceを σ_q とし、任意の点 P との距離を r_{pq} とすれば、 σ_q によって点 P は生ずる速度ポテンシャル ϕ_{pq} は(7)式で表わされる。これより、点 P の速度ポテンシャル ϕ_P は(8)式で求められる。

$$\phi_{pq} = \frac{\sigma_q}{r_{pq}} \quad \dots (7) \quad \phi_P = \int_{S_q} \frac{\sigma_q}{r_{pq}} \, ds_q \quad \dots (8)$$

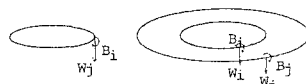
(8)式は点 P が要素 q の近傍あるいは一致する場合には発散する。また、これらの点が無次元値の主要



Fig. 2 Finite element (shell)



a. Discrete model of the Circular Plate



b. Circular element c. Ring element

Fig. 3 Finite elements (plate)

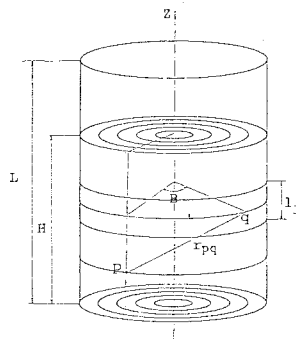


Fig. 4 Discrete model of fluid

である。これより、点P近傍については厳密に積分しなければならない。

(8) 式を法線方向 n について微分を行なえば (9) 式が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{q_2}{r_{pq}} \right) ds_{q_2} \quad \text{--- (9)}$$

この積分を行なう際にも、(8)式と同様の注意が必要である。

自由度を σ として、すべての要素に対して (8) 式と (9) 式をつくり、これらを直接離散化すれば、次のようなマトリックス表示式が得られる。

$$\{\phi\} = [B] \{\sigma\} \quad \text{--- (10)} \quad \quad \quad \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} = [C] \{\sigma\} \quad \text{--- (11)}$$

(10) 式と (11) 式より $\{\sigma\}$ を消去し、 $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}$ が内容液の境界表面の法線方向の速度 $\dot{w}$ に等しいことに注意すれば、(12) 式が得られる。

$$\{\phi\} = [B][C]^{-1} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} = [B][C]^{-1} \{\dot{w}\} \quad \text{--- (12)}$$

この (12) 式の中には、これまでの定式化の中に含まれなかった非圧縮性の条件が欠落している。したがって、この式の右辺は従属結合である。非圧縮性の条件の導入は、変数を1つ消去して (12) 式を独立結合にすることによって行なわれる。そして、この式を用いることによって、内容液の運動エネルギーが評価される。

以上によって求まった離散化されたエネルギーを (1) 式に代入して変分を行なえば、全体系の運動方程式が次式のようなマトリックス方程式で求められる。

$$\begin{bmatrix} M_{bb} + m_{bb} & M_{bs} + m_{bs} & m_{bf} \\ & M_{ss} + m_{ss} & m_{sf} \\ \text{sym.} & & m_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} + k_{bb}^1 + k_{bb}^2 & K_{bs} & 0 \\ & \text{sym.} & K_{ss} & 0 \\ & & & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_s \\ u_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{--- (13)}$$

ここで、 M と K はタンク本体に関する質量と剛性を表わし、 m と k^1 は液体に関する質量と剛性を、 k^2 は地盤の剛性を表わす。

5. 解析結果(その1)

前述の中島¹⁾や渡辺²⁾が実験に使用した図5の模型タンクの振動解析を行ない、実験値と比較する。解析計算にあたって地盤モデルのバネ定数の設定が問題となる。ここで実験に用いられた地盤モデルであるプラスチックゲルの面積 ($120\text{cm} \times 120\text{cm}$) がタンク底面よりやや広い程度であること及び、その厚さ (7cm) がタンクの径に比べてきわめて薄いことから、鉛直方向に対して地盤モデルは力の加わった部分のみが変形する Winkler 地盤³⁾のものと考えられる。これより地盤のバネ定数 K_v は、次式によって設定した。

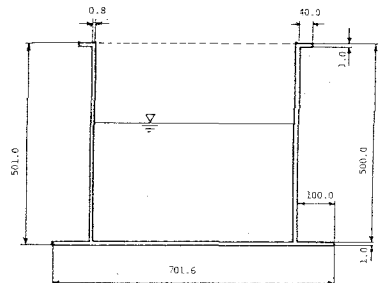


Fig.5 dimension of model tank

Table 1 Properties

	Tank Body	Liquid	Ground
Elastic constant	$3.3 \cdot 10^4 \text{ kgf/cm}^2$	---	0.067 kgf/cm^3
Poisson's ratio	0.4	---	---
Density	$1.44 \cdot 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$	$1.02 \cdot 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$	---

$$k_v = \frac{E}{h} \quad \text{--- (14)}$$

ここで、 E は地盤モデルの弾性定数で h はその厚さである。
なお、解析モデルを図6に、使用定数を表1に示す。

タンク本体の振動特性を知るために、空タンクの解析を行なう。図-7に各Fourier次数におけるシエルと底板の固有振動数を示す。低次数の振動では底板とシエルの固有振動数は2分化している。シエルはこの振動に対して剛的である。次数が大きくなるとシエルは相対的に柔化し、固有振動数は低下する。一方、底板は逆に剛化し、その固有振動数は増加する。このことより、次数が大きくなるとシエルと底板が共振する可能性がある。

次に、内容液を満たしたタンクの解析を行なう。図-8、と図-9にスロッシングと流力弾性振動の固有振動数を示す。流力弾性振動は、空タンクに内容液による付加質量が加わった振動であるため、空タンクに比べて固有振動は低下するが、その定性的性質は変わらない。すなわち、次数が低いときには、底板のモードが数段階上り、シエルのモードが現われる。次数が高くなると、シエルは相対的に柔くなり、底板は剛になる。

したがって、次数が大きくなると低次のモードにおいてシエルと底板が共振する恐れがある。

図-10、と図-11に鉛直加振力と水平加振力を作用させたときの、みずみと動水圧の応答の実験値を示す。これらの図は、測定箇所が極大となった周波数をプロットしたものである。

鉛直振動においては、計算値と実験値の対応がおおよそついている。ただし、高次においては底板と地盤との間の接触面の不連続性に起因する非線形性によって応答のずれがある。水平振動においては、計算値はロッキング振動に対するものであるが、実験に用いた地盤モデルが非常に軟かいことから実験値もロッキング成分によるものが主要と考えて対比を行なう。

図-12に $m=1$ のモードを示す。スロッシング

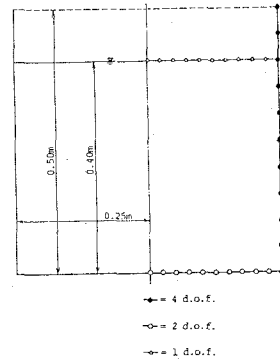


Fig. 6 Tank Model

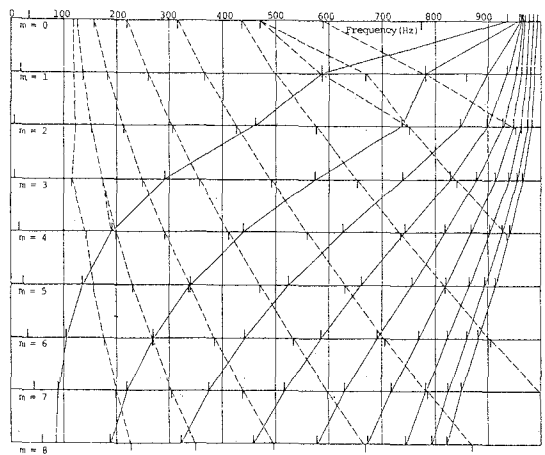


Fig. 7 Modes of Empty Tank

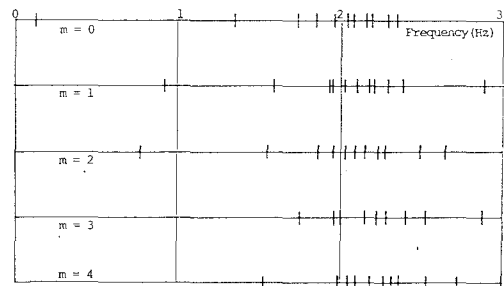


Fig. 8 Sloshing Modes

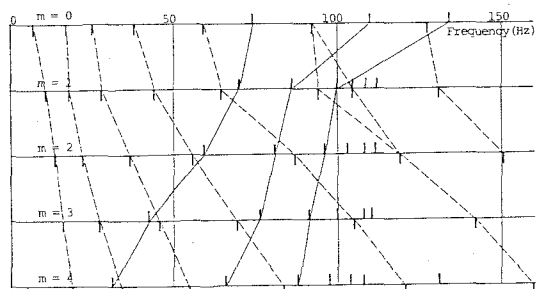


Fig. 9 Modes of Tank Body

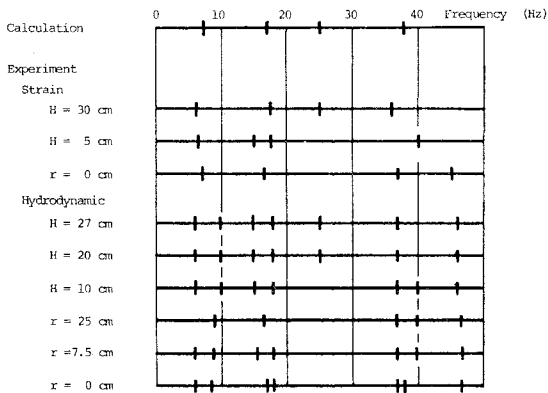
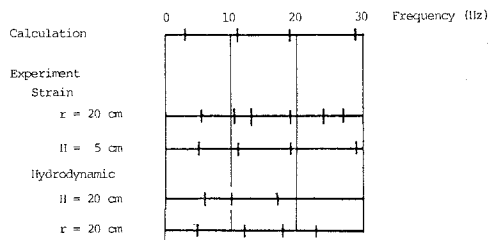


Fig. Frequency Response of Strain and Hydrodynamic pressure in Calculation and Experiment (Longitudinally Exciting)



Notes: 1) "H" denotes the height from the base. (shell)
2) "r" denotes the distance in the radius direction from the center. (base-plate)
3) Experimental value is plotted as the peak point in frequency response.

Fig. Frequency Response of Strain and Hydrodynamic pressure in Calculation and Experiment (Laterally Exciting)

の1次、2次モードや流力弾性振動の1次モードを見ると、底板の周辺部が地盤へめり込む、あるいは浮き上がる現象がみられる。この現象は、 $m=1$ から $m=3$ までのスロッシングの初期の数個のモード及び流力弾性振動の初期モードに現われている。この問題におけるタンクのロッキング振動は、本体が剛体的に回転運動するのでなく、シェルと底板の隅角部近傍の底板部の変形によ、て特徴づけられる。

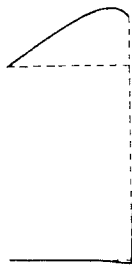
6. 解析結果(その2)

次に、実際に建設されている10万K ℓ 級鋼製平底タンク(直径80m, 高さ25m)の解析を行う。水位はシェル側板高さの90%($h=22.5$ m)で、内容液は水と同じ挙動を示すと仮定する。さらに地盤反力係数として $K_v=10.0$ Kgf/cm ℓ を設定する。

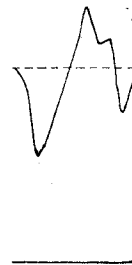
図13と図14にスロッシングと連成振動の固有振動数を示す。連成振動においてタンク側板の

$m=1$

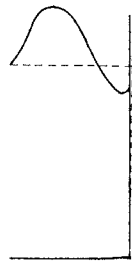
Mode 1 (0.93Hz)



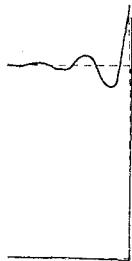
Mode 2 (1.95Hz)



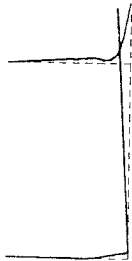
Mode 3 (1.60Hz)



Mode 10 (2.39Hz)



Mode 11 (2.89Hz)



Mode 12 (11.09Hz)

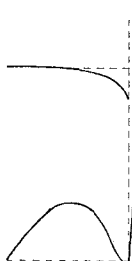


Fig. 12 Coupled Natural modes ($m=1$)

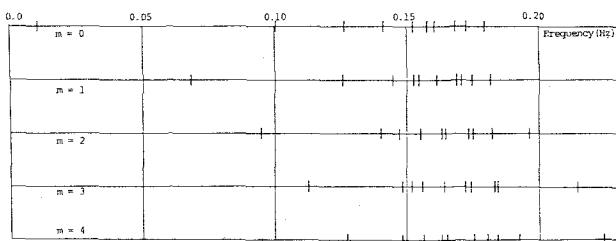


Fig. 13 Sloshing Modes

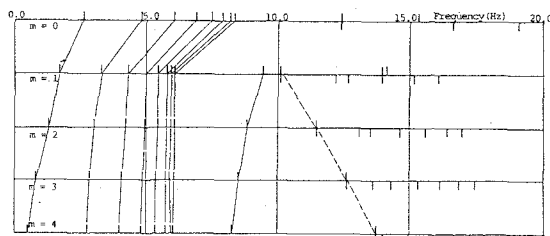
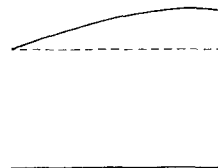


Fig. 14 Modes of Tank Body

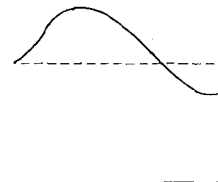
モードが先に現われている。次数の m が大きくなるにつれて、側板のモードがより低い振動数であらわれる。一方、底板は側板と逆の挙動を示す。この傾向は、模型タンクと同様で、タンクの形状に関係ない性質と思われる。大型タンクのように H/D の小さいタンクにおいては、側板と底板が低次のモードで連成しあうことがないと思われる。

図15にモードを示す。実験タンクと異なり側板直下における浮き上がりやめり込みがあまり認められないのが特徴的である。このことは、模型タンクに比べて H/D が小さいと側板に作用する転倒モーメントが小さいことを示している。

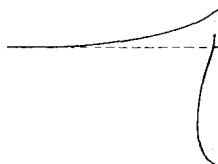
Mode 1 (0.0678Hz)



Mode 2 (0.128Hz)



Mode 11 (1.77Hz)



Mode 12 (3.29Hz)



Fig. 15 Coupled Natural modes ($m=1$)

《参考文献》

- 1) 中島 広人:「フレキシブルタンクの耐震に関する研究」埼玉大学大学院工学研究科修士論文(1980.2)
- 2) 渡辺:「フレキシブルタンクの耐震に関する実験的研究」埼玉大学卒業論文(1981.2)
- 3) 須中 卓:「有限要素法による大型円筒貯槽の地震を含めた地震応答解析」圧力技術 Vol.18 No.4 (1980.7)
- 4) 頭井 洋・新家 徹:「ロッキング及びスウェイを考慮した円筒タンクの耐震解析」圧力技術 Vol.20 No.3 (1982.5)
- 5) 坂井 藤一・小川 若:「ロッキングを考慮した円筒タンクのトルシング振動」第6回日本地震工学シンポジウム(1982.12)
- 6) 小松 敬治:「流体を満たす軸対称容器の振動解析」航空宇宙技術研究所報告 TR-478 (1976.11)
- 7) G.R. Khabbaz: "Dynamic Behavior of Liquids in Elastic Tanks" A.I.A.A. Vol.9 No.10 (1971)
- 8) 岡田 結夫 他:「有限要素法による大型液体タンクの地震応答解析」川崎重工技報 Vol.59 (1975.12), Vol.61 (1976.8)
- 9) 三村 長二郎 他:「鋼製石油タンクの地震時浮き上がり振動に関する模型実験」鹿島技術研究所年報 Vol.24 (1981.5)

A Study on the Coupled Vibration of Cylindrical Liquid Storage Tanks

by Hiromichi Higashibara*, Takeshi Ishii** and Takeshi Mita***

Dynamic characteristics of cylindrical elastic storage tanks have long been investigated. Early investigations are paid the attention to sloshing oscillations of the free surface of the liquid. Sloshing oscillations are little influenced by elastic deformation of the tank body; therefore, they are easily simulated by rigid tank model.

Recently many large tanks whose diameters reach to about 100 m have been constructed. Thickness of their walls or bottom plates have not so increased as their size; i.e., their over-all stiffness have significantly become small. This practice have brought about a new problem. Frequencies of the oscillations in which elastic deformation plays a primary role have now dropped into the region where seismic ground oscillation can no more ignored. Dynamic property of elastic tanks is one of today's most important challenging subjects.

Modal analysis method is effectively applied to this problem. Dynamic behavior of elastic tanks is influenced by many factors; side wall shell, bottom plate, stored liquid and foundation. Modal analysis of elastic tanks thus requires inevitably a large degree-of-freedom.

Conventional linear modal analysis procedure is also a promising basis to a further study of important nonlinear problems: dynamic local buckling of the side wall shell or dynamic contact phenomena between the bottom plate and the ground. In these problems the modal analysis program is applied successively in an iterative process. Reduction of degree-of-freedom is essential.

Degrees-of-freedom which is required to a given level of precision is significantly reduced by employing the boundary method. If the liquid is frictionless and if the flow in the tank is assumed irrotational, the motion of the liquid is completely determined by the normal movement of its surface. Boundary element discretizing procedure based upon this fact usually reduces the total degree-of-freedom to less than a half.

The results of analyses for model tank and actual tank are represented to the following.

- (1) The results of eigen analysis for model tank, there is comparatively good relationship between numerical solution experimental results.
- (2) Natural circular frequency of the shell becomes to be smaller, but the one of the bottom plate becomes to be greater, as Fourier order "m" becomes to be greater.
- (3) The shell-mode appears before the bottom plate-mode when H/D is small, but this phenomena is contrary when H/D is great in condition the coupled vibration.
- (4) As for the mode of the model tank, uplift and settlement are found at the portion of the shell-to-bottom joint.

* Assistant Professor of Saitama University, Faculty of Engineering.

** Nikken Sekkei, Ltd.

*** Student of Saitama University, Faculty of Engineering.