

(22) 積分方程式による偏平殻の固有値解析

○ 角田 和彦* 登土反 宣好**

1. 序

種々な分野で現われる高階微分方程式に対して、その基本解を利用することによって得られる“境界積分方程式”による解析では、微分方程式の高階性による問題が生じる。この点を改良するため、著者の一人は、微分作用素の正準分解を通して得られた各々の微分方程式に関する基本解を利用することから誘導される積分方程式によって解析するという新たな近似解法を展開し提案した[1]。

本論では、この近似解法を、高階の連立微分方程式で与えられる偏平殻の動的挙動を解明するための固有値問題に適用した解析を取り扱う。

シェルの動的挙動を解明する問題は、撓み及び応力関数を未知量とした4階の連立偏微分方程式の境界値問題として与えられる。この問題に対して、基本解を利用した近似解析を適用するにあたり、次の2つのアプローチが考えられる。

(I) 4階の運動方程式及び適合条件式を連立させて解く方法(重調和方程式の基本解を利用)。

(II) 正準分解を通して、4元の2階偏微分方程式として解く方法(Laplace方程式の基本解を利用)。

ここでは、文献[2]と同様に、基本解の取り扱いの容易さから、第2のアプローチに従うものであり、これらの方程式に調和運動の仮定を導入したときの固有値問題を解析するものである。そこで、得られた近似解とFourier級数解との比較を通して、本手法の妥当性を示す。

尚、数値解析例では、曲率の変化と要素数、さらに積分点による固有値の挙動を捉え、特に曲率

がゼロの場合としての平板も含むものとする。

2. 偏平殻の基本式と重みつき残差表現

偏平殻(E.P.シェル)の動的挙動を捉える基本微分方程式として、撓み及び応力関数を未知変数とした4階の運動方程式及び適合条件式は次式で与えられている。

〔運動方程式〕

$$D\Delta^2 w - R_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - R_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\rho h \ddot{w} \quad (2-1)$$

〔適合条件式〕

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \varphi + R_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2-2)$$

但し、 w は撓み、 φ は応力関数、 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 E は弾性係数、 ν はポアソン比、 h は厚さ、 ρ は弾性密度、 R_x, R_y は曲面形状を表す曲率、 Δ はLaplacian、dot記号は時間微分を表す。また、式(2-1)、(2-2)に調和運動の仮定

$$w = \bar{W} e^{i\omega t}, \quad \varphi = \bar{\varphi} e^{i\omega t} \quad (2-3)$$

を導入し、さらに無次元化を行なえば、(2)の基本微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \eta^4} - R^2 \left\{ (R_x a) \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + (R_y a) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} \right\} - \bar{\Omega}^4 \bar{W} = 0 \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial \eta^4} + (R_x a) \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \eta^2} + (R_y a) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2-5)$$

但し、 $\xi = a\xi$, $\eta = b\eta$, $\lambda = a/b$, $R^2 = 12(1-\nu^2)a^2/h^2$, $\bar{\Omega}^4 = \rho h a^4 \omega^2 / D$, $\bar{W} = aW$, $\bar{\varphi} = Eh a^2 \varphi$ と置いている。[5]

* 日本大学 生産工学部 大学院生

** 日本大学 生産工学部 助教授・工博

今、正方領域に対する E.P. シェルの問題

辺長比 $\lambda = 1$, $k_x = k_y = 1/R$

に限って解析を行なえば、式(2-4), (2-5) に正準分解を適用した連立方程式として、以下の4元の2階偏微分方程式が得られる。

$$\Delta W = M \quad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad (2-6)$$

$$\Delta \Phi = F \quad (2-7)$$

$$\Delta M - \frac{k^2 a}{R} F - \tilde{\Delta}^4 W = 0 \quad (2-8)$$

$$\Delta F + \frac{a}{R} M = 0 \quad (2-9)$$

これらの基本式(2-6)~(2-9)に関して、“重みつき残差法”の表現を適用すれば、

$$\int_{\Omega} (\Delta W - M) \tilde{f}^* d\Omega = 0 \quad (2-10)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta \Phi - F) \tilde{g}^* d\Omega = 0 \quad (2-11)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta M - \frac{k^2 a}{R} F - \tilde{\Delta}^4 W) \tilde{f}^{**} d\Omega = 0 \quad (2-12)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta F + \frac{a}{R} M) \tilde{g}^{**} d\Omega = 0 \quad (2-13)$$

($\tilde{f}^*, \tilde{g}^*, \tilde{f}^{**}, \tilde{g}^{**}$ は weighting function)

となる。ここで、発散定理を2回適用すること

により、式(2-10)~(2-13)は、

$$\int_{\Omega} W \Delta \tilde{f}^* d\Omega = \int_{\Omega} M \tilde{f}^* d\Omega$$

$$- \int_{\partial\Omega} W_{,n} \tilde{f}^* d\Gamma + \int_{\partial\Omega} W \tilde{f}_{,n}^* d\Gamma \quad (2-14)$$

$$\int_{\Omega} \Phi \Delta \tilde{g}^* d\Omega = \int_{\Omega} F \tilde{g}^* d\Omega$$

$$- \int_{\partial\Omega} \Phi_{,n} \tilde{g}^* d\Gamma + \int_{\partial\Omega} \Phi \tilde{g}_{,n}^* d\Gamma \quad (2-15)$$

$$\int_{\Omega} M \Delta \tilde{f}^{**} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{k^2 a}{R} F \tilde{f}^{**} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\Delta}^4 W \tilde{f}^{**} d\Omega$$

$$- \int_{\partial\Omega} M_{,n} \tilde{f}^{**} d\Gamma + \int_{\partial\Omega} M \tilde{f}_{,n}^{**} d\Gamma \quad (2-16)$$

$$\int_{\Omega} F \Delta \tilde{g}^{**} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{a}{R} M \tilde{g}^{**} d\Omega$$

$$- \int_{\partial\Omega} F_{,n} \tilde{g}^{**} d\Gamma + \int_{\partial\Omega} F \tilde{g}_{,n}^{**} d\Gamma \quad (2-17)$$

と変形することが出来る。(), $n = \frac{\partial}{\partial n}$ ()

3. 基本解による解の表現

“重み関数”として、式(2-6)~(2-9)に対する以下の Laplace 方程式の基本解 $\tilde{f}^*, \tilde{g}^*, \tilde{f}^{**}, \tilde{g}^{**}$ を採用する。

$$\Delta W + \delta_i = 0 \quad (3-1)$$

$$\Delta \Phi + \delta_i = 0 \quad (3-2)$$

$$\Delta M + \delta_i = 0 \quad (3-3)$$

$$\Delta F + \delta_i = 0 \quad (3-4)$$

但し、 δ_i は Dirac の delta 関数

これらの Laplace 方程式の基本解及びその導関数は次式で与えられる。

$$\tilde{f}^*, \tilde{g}^*, \tilde{f}^{**}, \tilde{g}^{**} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3-5)$$

$$\tilde{f}_{,r}^*, \tilde{g}_{,r}^*, \tilde{f}_{,r}^{**}, \tilde{g}_{,r}^{**} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (3-6)$$

($r = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \|$)

方程式(3-1)~(3-4)及びその基本解と導関数(3-5), (3-6)を前章の方程式(2-14)~(2-17)に代入することによって、以下の内部領域に関する積分方程式が構成出来る。

$$W_i = - \int_{\Omega} M \left[\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\Omega \quad (3-7)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} W_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega} W \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\Phi_i = - \int_{\Omega} F \left[\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\Omega \quad (3-8)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \Phi_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \Phi \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$M_i = - \int_{\Omega_4} \frac{A_4}{R} F \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 - \int_{\partial\Omega_4} \tilde{\Omega}_4^4 W \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 \quad (3-9)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_4} M_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_4} M \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$F_i = \int_{\Omega_4} \frac{a}{R} M \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 \quad (3-10)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_4} F_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_4} F \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

これらの積分方程式は、対象としている内部領域に関して有効であるが、境界上の任意点に関しては、基本解の特異性を考慮することによって積分方程式を再構成する必要がある〔2〕。

以上を考慮することにより、内部点及び境界点に関する積分方程式は、次式で与えられる。

$$\alpha_i W_i = - \int_{\Omega_4} M \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 \quad (3-11)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_4} W_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_4} W \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\alpha_i \Phi_i = - \int_{\Omega_4} \Phi \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 \quad (3-12)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_4} \Phi_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_4} \Phi \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\alpha_i M_i = - \int_{\Omega_4} \frac{A_4}{R} F \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 - \int_{\partial\Omega_4} \tilde{\Omega}_4^4 W \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 \quad (3-13)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_4} M_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_4} M \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\alpha_i F_i = \int_{\Omega_4} \frac{a}{R} M \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Omega_4 \quad (3-14)$$

$$+ \int_{\partial\Omega_4} F_{,n} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_4} F \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

ここで、 α_i は境界形状に影響する係数であり特に、

$$\alpha_i = \begin{cases} = 1 & \text{for a point in the internal domain } \Omega_4 \\ = 1/2 & \text{for a point on the smooth boundary } \partial\Omega_4 \end{cases}$$

という関係がある。

4. 離散化による定式化 (固有値問題)

積分方程式により固有値を決定するにあたり、次の2つの立場があると考えられる。

(I). “境界積分方程式法”による立場〔3,4〕

この解析においては、境界上の積分方程式のみを離散化により固有値を決定することになるが、その決定に際しては、微分作用素の性質により、積分核(基本解)に固有パラメータが含まれる場合があり、特別な工夫を有する。

(II). 正準分解を通して境界点及び内部点に関する“連成積分方程式”により解析する立場〔2,3〕

この解析においては、境界点に関する積分方程式の積分項に内部点の未知量が含まれているために、境界及び内部領域を離散化しなければならないが、基本解の中に固有パラメータが含まれないので、通常の代数方程式として固有値を決定するという特徴がある。

ここでは、基本解の取り扱い方の容易さを計っており、手法(II)の立場を採っている。この際に、離散化に伴う境界要素と内部要素及び数値積分公式の選択が重要な問題となる。数値積分公式に関しては、より精度の良い積分公式を選ぶ必要がある。一方、境界要素及び内部要素に関しては、最も簡単な一定要素(Fig. 1)を適用した場合の定式化を述べることにする。

この要素は、

各要素において未知量が一定であると仮定し、各要素の中央点における値を一定値として使用する様な離散化である。

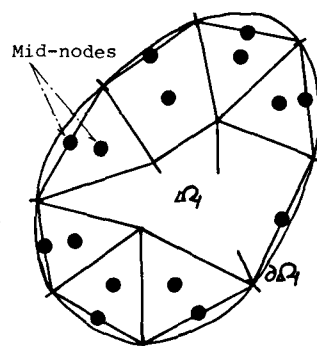


Fig.1 Constant Elements

今、境界領域を有限な n 個の境界要素に分割し
また、内部領域を有限な m 個の内部要素に分割す
るならば、積分方程式 (3-11) ~ (3-14) は以下の離
散化表現式となる。

$$\alpha_i W_i = - \sum_{\ell=1}^{n+m} M_{\ell} \int_{\Omega_{\ell}} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell} \quad (4-1)$$

$$+ \sum_{j=1}^n \{W_m\}_j \int_{\partial\Omega_j} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma - \sum_{j=1}^n W_j \int_{\partial\Omega_j} \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\alpha_i \Phi_i = - \sum_{\ell=1}^{n+m} F_{\ell} \int_{\Omega_{\ell}} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell} \quad (4-2)$$

$$+ \sum_{j=1}^n \{\Phi_m\}_j \int_{\partial\Omega_j} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma - \sum_{j=1}^n \Phi_j \int_{\partial\Omega_j} \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\alpha_i M_i = - \sum_{\ell=1}^{n+m} F_{\ell} \int_{\Omega_{\ell}} \frac{R^2}{R} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n+m} W_{\ell} \int_{\Omega_{\ell}} \tilde{\Omega}^4 \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell} \quad (4-3)$$

$$+ \sum_{j=1}^n \{M_m\}_j \int_{\partial\Omega_j} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma - \sum_{j=1}^n M_j \int_{\partial\Omega_j} \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$\alpha_i F_i = \sum_{\ell=1}^{n+m} M_{\ell} \int_{\Omega_{\ell}} \frac{a}{R} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell} \quad (4-4)$$

$$+ \sum_{j=1}^n \{F_m\}_j \int_{\partial\Omega_j} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma - \sum_{j=1}^n F_j \int_{\partial\Omega_j} \left[-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

上述の離散化方程式の積分項は、境界要素 ' j '
あるいは要素 ' ℓ ' 上で積分が行われ、その要素
が中央節点 ' i ' と関係していることを考慮に入れ
ると、境界及び内部領域に関する以下の 8 元の離
散化方程式で表わすことが出来る。

<境界領域の離散化方程式>

$$[H_{ij}^{(0)}] W_j + [Q_{i\ell}^{(0)}] M_{\ell} = [G_{ij}^{(0)}] \{W_m\}_j \quad (4-5)$$

$$[H_{ij}^{(2)}] \Phi_j + [Q_{i\ell}^{(2)}] F_{\ell} = [G_{ij}^{(2)}] \{\Phi_m\}_j \quad (4-6)$$

$$[H_{ij}^{(3)}] M_j + [Q_{i\ell}^{(3)}] F_{\ell} + \tilde{\Omega}^4 [\tilde{Q}_{i\ell}^{(3)}] W_{\ell} = [G_{ij}^{(3)}] \{M_m\}_j \quad (4-7)$$

$$[H_{ij}^{(4)}] F_j = [Q_{i\ell}^{(4)}] M_{\ell} + [G_{ij}^{(4)}] \{F_m\}_j \quad (4-8)$$

<内部領域の離散化方程式>

$$2\pi W_j + [\hat{H}_{ij}^{(0)}] W_j + [Q_{i\ell}^{(0)}] M_{\ell} = [G_{ij}^{(0)}] \{W_m\}_j \quad (4-9)$$

$$2\pi \Phi_j + [\hat{H}_{ij}^{(2)}] \Phi_j + [Q_{i\ell}^{(2)}] F_{\ell} = [G_{ij}^{(2)}] \{\Phi_m\}_j \quad (4-10)$$

$$2\pi M_j + [\hat{H}_{ij}^{(3)}] M_j + [Q_{i\ell}^{(3)}] F_{\ell} + \tilde{\Omega}^4 [\tilde{Q}_{i\ell}^{(3)}] W_{\ell} = [G_{ij}^{(3)}] \{M_m\}_j \quad (4-11)$$

$$2\pi F_j + [\hat{H}_{ij}^{(4)}] F_j = [Q_{i\ell}^{(4)}] M_{\ell} + [G_{ij}^{(4)}] \{F_m\}_j \quad (4-12)$$

但し、係数行列内の各々の項には、以下の関係
がある。

$$[H_{ij}^{(\tilde{\alpha})}] \begin{cases} = [\hat{H}_{ij}^{(\tilde{\alpha})}] & \text{when } i \neq j \\ = [\hat{H}_{ij}^{(\tilde{\alpha})}] + \pi & \text{when } i = j \end{cases}$$

$$[\hat{H}_{i\ell}^{(\tilde{\alpha})}] = \int_{\partial\Omega_{\ell}} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\Gamma$$

$$[G_{ij}^{(\tilde{\alpha})}] = \int_{\partial\Omega_j} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma$$

$$[Q_{i\ell}^{(\beta)}] = \int_{\Omega_{\ell}} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell}$$

$$[Q_{i\ell}^{(3)}] = \int_{\Omega_{\ell}} \frac{R^2}{R} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell}$$

$$[\tilde{Q}_{i\ell}^{(3)}] = \int_{\Omega_{\ell}} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell}$$

$$[Q_{i\ell}^{(4)}] = \int_{\Omega_{\ell}} \frac{a}{R} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Omega_{\ell}$$

($\tilde{\alpha} = 1, 2, 3, 4$, $\beta = 1, 2$, $\epsilon = i, \gamma$)

ここで、係数行列内の積分項の計算において問題となることは、中央節点から同じ要素上での積分を実行する点であるが、この内題に関しては文献[2]と同様な処理により解決することが出来る。

以上により、境界及び内部領域の離散化方程式(4-5)～(4-12)に境界条件を適用することにより固有値 $\tilde{\omega}_\lambda^4$ を決定することになる。次節では境界条件として周辺単純支持境界を適用した場合の固有方程式を誘導する。

4.1 周辺単純支持境界に関する固有方程式

周辺単純支持境界条件

$$W_j = \bar{\Phi}_j = M_j = F_j = 0 \quad (4-13)$$

を離散化方程式(4-5)～(4-12)に適用することにより、以下の方程式を得ることが出来る。

〈境界領域の離散化方程式〉

$$[Q_{i\lambda}^{(1)}]M_\lambda = [G_{ij}^{(1)}]\{W_n\}_j \quad (4-14)$$

$$[Q_{i\lambda}^{(2)}]F_\lambda = [G_{ij}^{(2)}]\{\bar{\Phi}_n\}_j \quad (4-15)$$

$$[Q_{i\lambda}^{(3)}]F_\lambda + \tilde{\omega}_\lambda^4 [\tilde{Q}_{i\lambda}^{(3)}]W_\lambda = [G_{ij}^{(3)}]\{M_n\}_j \quad (4-16)$$

$$-[Q_{i\lambda}^{(4)}]M_\lambda = [G_{ij}^{(4)}]\{F_n\}_j \quad (4-17)$$

〈内部領域の離散化方程式〉

$$2\pi W_r + [Q_{r\lambda}^{(1)}]M_\lambda = [G_{rj}^{(1)}]\{W_n\}_j \quad (4-18)$$

$$2\pi \bar{\Phi}_r + [Q_{r\lambda}^{(2)}]F_\lambda = [G_{rj}^{(2)}]\{\bar{\Phi}_n\}_j \quad (4-19)$$

$$2\pi M_r + [Q_{r\lambda}^{(3)}]F_\lambda + \tilde{\omega}_\lambda^4 [\tilde{Q}_{r\lambda}^{(3)}]W_\lambda = [G_{rj}^{(3)}]\{M_n\}_j \quad (4-20)$$

$$2\pi F_r = [Q_{r\lambda}^{(4)}]M_\lambda + [G_{rj}^{(4)}]\{F_n\}_j \quad (4-21)$$

また、8元の離散化方程式(4-14)～(4-21)は、以下の方程式に変形することが出来る。

$$[T_{r\lambda}]W_\lambda = \tilde{\omega}_\lambda^4 [\tilde{K}_{r\lambda}^{(3)}]W_\lambda \quad (4-22)$$

但し、

$$[T_{r\lambda}] = 4\pi^2 [K_{rr}^{(1)}]^{-1} - [K_{r\lambda}^{(2)}][K_{\lambda\lambda}^{(4)}][K_{\lambda\lambda}^{(1)}]^{-1}$$

$$[K_{r\lambda}^{(1)}] = [G_{rj}^{(1)}][G_{ij}^{(1)}]^{-1}[Q_{i\lambda}^{(1)}] - [Q_{r\lambda}^{(1)}]$$

$$[\tilde{K}_{r\lambda}^{(3)}] = [G_{rj}^{(3)}][G_{ij}^{(3)}]^{-1}[\tilde{Q}_{i\lambda}^{(3)}] - [\tilde{Q}_{r\lambda}^{(3)}]$$

$$[K_{r\lambda}^{(2)}] = [G_{rj}^{(2)}][G_{ij}^{(2)}]^{-1}[Q_{i\lambda}^{(2)}] - [Q_{r\lambda}^{(2)}]$$

$$[K_{r\lambda}^{(4)}] = [Q_{r\lambda}^{(4)}] - [G_{rj}^{(4)}][G_{ij}^{(4)}]^{-1}[Q_{i\lambda}^{(4)}]$$

と置いている。(r, λ = 1, 2, ..., m)

式(4-22)において、 $W_\lambda \neq 0$ という条件によりλの行列式の値がゼロになるという以下の固有方程式が得られる。

$$\det\{[T_{r\lambda}] - \tilde{\omega}_\lambda^4 [\tilde{K}_{r\lambda}^{(3)}]\} = 0 \quad (4-23)$$

上式(4-23)を解くことにより、固有値 $\tilde{\omega}_\lambda^4$ を決定することになる。

5. 解析例

前章で得られた周辺単純支持境界を条件としたE.P. シェル(平板も含む)に関する固有方程式(4-23)を基に、Fig. 2の解析領域を対象に、曲率の変化と要素数による固有値の挙動を捉え、さらに、数値積分公式(

Gaussの積分)の積分点の数による固有値の変化を捉えた。そこで、得られた結果とFourier級数解との比較を行った。

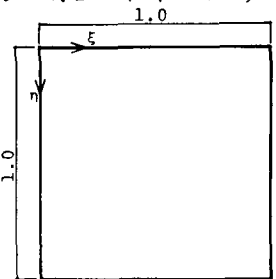


Fig. 2 Analytical Domain

尚, 数値計算において, 内部要素と境界要素は一定要素を採用し, 数値積分公式として, 境界要素は1次元 Gauss 4 分点 (6 分点, 8 分点) 積分公式, 内部要素は矩形の2次元 Gauss 16 分点 (36 分点, 64 分点) 積分公式を適用した。解析モデルには, 対角線に関して対称条件を導入し, 固有方程式の計算には, 2 段 QR 法を使用した。

また, 正方形 10, ポアソン比 0.0, 厚さ 0.15

数値結果として, Table 1 (a)~(c) は, 曲率の変化と要素数による本解と Fourier 級数解との比較 (低次モード 3 個) も行なった表であり, Fig. 4 (a)~(c) が, 要素数に対する解の挙動をグラフ化したものである。

Table 1-(a) Comparison between the Present Solutions and Fourier series ones ($m=1, n=1$)

解法 曲率	Fourier Series Solution $\hat{\Omega}^2$	Present Solutions Ω^2			
		MODEL A	MODEL B	MODEL C	MODEL D
0.00 (Plate)	19.74	21.30	20.73	20.41	19.96
0.01	30.38	31.42	31.03	30.82	30.52
0.02	50.23	50.86	50.63	50.50	50.32
0.03	72.04	72.48	72.32	72.23	72.10

(Boundary Integral Points 4, Internal I.P. 16)

Table 1-(b) Comparison between the Present Solutions and Fourier series ones ($m=1, n=2$)

解法 曲率	Fourier Series Solution $\hat{\Omega}^2$	Present Solutions Ω^2			
		MODEL A	MODEL B	MODEL C	MODEL D
0.00 (Plate)	49.35	55.88	54.81	53.31	50.73
0.01	54.48	60.47	59.48	58.09	55.74
0.02	67.59	72.50	71.68	70.53	68.61
0.03	85.06	89.01	88.34	87.42	85.87

(Boundary I.P. 4, Internal I.P. 16)

Table 1-(c) Comparison between the Present Solutions and Fourier series ones ($m=2, n=2$)

解法 曲率	Fourier Series Solution $\hat{\Omega}^2$	Present Solutions Ω^2			
		MODEL A	MODEL B	MODEL C	MODEL D
0.00 (Plate)	78.96	89.36	90.35	87.98	82.37
0.01	82.26	92.30	93.26	90.96	85.55
0.02	91.47	100.6	101.5	99.36	94.44
0.03	105.0	113.1	113.9	112.0	107.6

(Boundary I.P. 4, Internal I.P. 16)

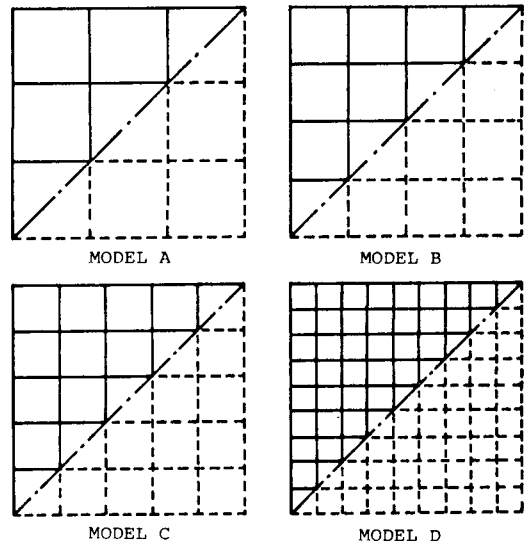


Fig.3 Analytical Models

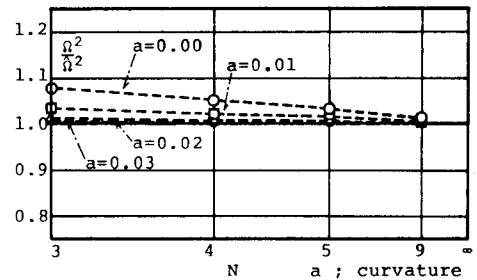


Fig.4-(a) Comparison of Ω^2 and $\hat{\Omega}^2$ for Element Numbers ($m=1, n=1$)

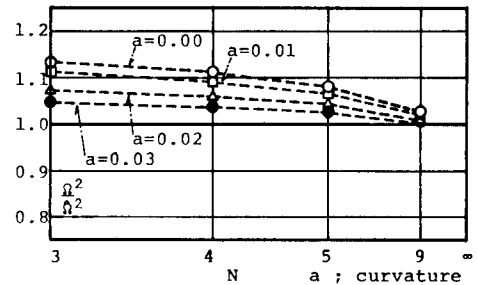


Fig.4-(b) Comparison of Ω^2 and $\hat{\Omega}^2$ for Element Numbers ($m=1, n=2$)

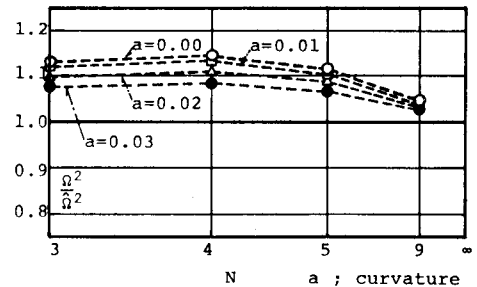


Fig.4-(c) Comparison of Ω^2 and $\hat{\Omega}^2$ for Element Numbers ($m=2, n=2$)

Table 2 (a)~(c) は, MODEL C を対象に, 積分点の数(境界積分点, 内部積分点)による Ω^2 の値の変化を低次モード 3 個についてまとめた結果である。

また, ここで比較に使用した Fourier 級数による固有値の値は, 式(2-4), (2-5) に正方領域の仮定を設けた基本式に以下の解

$$\Phi = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$$

$$W = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$$

を代入することにより, 次式で与えられる。

$$\Omega^2 = \left(\frac{4\mu}{E}\right)^2 + [(m\pi)^2 + (n\pi)^2]^2$$

(m は ξ 方向の次数, n は η 方向の次数)

6. 結 語

以上により, 偏平殻の動的挙動を解明するための固有値問題に, 本手法を適用したときの特徴及び解析結果に關しての見解を述べることにより結語とする。

1) 微分作用素の正準分解をすることから簡単な基本解を使って積分方程式が表現出来る。

2) 境界上の積分方程式の積分項の中に, 内部領域の未知量が含まれているために, 境界点及び内部点に關する積分方程式を連立することから解を決定することになる。

3) 固有値問題に対しては, 基本解の中に固有パラメータが含まれないので, 通常の代数方程式として固有値を決定することになる。

4) 解の収束性に関しては, 曲率の変化と要素数に対する解の挙動を Fourier 級数解と比較した Fig. 4 (a)~(c) を見ても, 一様に収束していることがわかる。

5) 境界上及び内部領域の積分項の離散化には, Gauss の積分公式を採用したが, Table 2 (a)~(c) で示した様に, 積分点の数を増すことにより Fourier 級数解に近づく傾向がある。

Table 2-(a) Ω^2 for Integral points ($m=1, n=1$)

解 法 曲 率	Present Solutions (MODEL C)		
	境界積分点 4 内部 : 16	境界積分点 6 内部 : 36	境界積分点 8 内部 : 64
0.00 (Plate)	20.41	20.35	20.33
0.01	30.82	30.78	30.77
0.02	50.50	50.47	50.46
0.03	72.23	72.21	72.20

Table 2-(b) Ω^2 for Integral points ($m=1, n=2$)

解 法 曲 率	Present Solutions (MODEL C)		
	境界積分点 4 内部 : 16	境界積分点 6 内部 : 36	境界積分点 8 内部 : 64
0.00 (Plate)	53.31	52.93	52.80
0.01	58.09	57.75	57.63
0.02	70.53	70.25	70.15
0.03	87.42	87.19	87.11

Table 2-(c) Ω^2 for Integral points ($m=2, n=2$)

解 法 曲 率	Present Solutions (MODEL C)		
	境界積分点 4 内部 : 16	境界積分点 6 内部 : 36	境界積分点 8 内部 : 64
0.00 (Plate)	87.98	86.96	86.60
0.01	90.96	89.97	89.62
0.02	99.35	98.46	98.14
0.03	112.0	111.2	110.9

参考文献

- [1] 登坂 ; 「積分方程式による連続場の近似解法」, 日本鋼構造協会第 123 回構造解析小委員会資料 (1991-9)
- [2] 角田, 登坂 ; 「基本解を利用した偏平シェル解析」, 日本鋼構造協会第 15 回大会研究集会第 7 回マトリックス解析法研究発表論文集 (1981-7) 29-34
- [3] 角田, 登坂 ; 「積分方程式法による Helmholtz 方程式の固有値解析」, 日大産工学部第 14 回学術講演会(教理部会) (1981-11) 61-64
- [4] 丹羽, 小林, 北原 ; 「弾性固有値問題の積分方程式による解法」, 土木学会論文報告集 285 号
- [5] 坪井 善勝 ; 連続体力学序説 産業図書 (1952)

EIGENVALUE ANALYSIS OF A SHALLOW SHELL

BY INTEGRAL EQUATIONS

By Kazuhiko KAKUDA *
and
Nobuyoshi TOSAKA **

The object of this paper is to show the applicability of our new integral equation method to the free vibration problems of shallow shells under the Kirchhoff-Love hypothesis describing by the coupled fourth order differential equations. This method proposed generally by one of authors (N.Tosaka) is considered the one as the extended Boundary Integral Equation Method. We had already shown the efficiency of our method on the static analysis of a shallow shell in another paper.

First of all, we start with to rewrite the governing equations for the deflection and stress function of a shallow shell as the coupled system of four Laplace equations. These have the so-called canonical form. Next, the coupled integral equations are derived from four Laplace type equations through the weighted residual expressions and the fundamental solutions of our canonical forms.

The determination for the approximate solutions of our integral equations is given by means of a numerical procedure relying on some discretization of not only boundary but also interior regions. From this procedure, the problems are reduced to analysis of the eigen-value problem with matrix form.

To show the efficiency of our method, we apply this method to the free vibration problems of a shallow elliptic shell (including a square plate as the special case) with simply supported boundary condition and calculate some numerical solutions for several analytical models. Finally, we show the validity of our coupled integral equation method through the comparison our numerical results with the analytical solutions by Fourier series.

* Graduate student, Dept. of Architectural Engineering,

** Associate Prof., Dept. of Mathematical Engineering,
College of Industrial Technology, Nihon Univ.