（21）弾性体の連成問題の定式化について

登坂宣好＊

1 序

技術開発の進展に伴い，工学のさまざまな分野に現われる構造物は，種々の機能や用途に対応すべく，複雑化かつ多様化しつつある。最近，注目を浴びている海洋開発に目を向けるならば，陸上の構造物にくらべて，複雑な形態を有する巨大な各種の海洋構造物が構築されていたり，計画されていることがわかる。

このような構造物の設計に対しては，より精密で正確な解析が要求されることになり，問題の解決に対処すべく有力な手段が必要とされる。全体として，複雑な形状を有していたり，部分的に複雑さを有するような構造物は，各種の構造要素の接合体として考えることが可能であるだろう。

構造物の接合部解析は古くから行なわれ，柱－梁接合部の2次元応力状態の解析，パイプ構造等に見られる接合部の応力集中状態の解析がその例として知られている。[2] このような接合部という構造物の部分に限ることなく，異種な剛性を有する構造物の連結や複合シェル構造，さらに縁梁を有するシェル構造物などは全体的な接合と考えられる。

そこで，本論文では，構造工学のさまざまなフィールドで生ずる接合問題に対処出来るような基礎的な定式化を以下のような考え方で計ることを目的としている。ここでは接合問題を弾性体の連成問題と考え，2つ（又はそれ以上）の弾性体がある面（この面が弾性体の変形に従って変化するような，いわゆる接触問題は本論文では除くことにする）を通し，接合され，ここで，両弾性体の変形の連続性と応力の平衡性が保もたれることによって，連成運動を行っているものとする。

この見地から，弾性体の連成問題は各々の弾性体に関する混合型境界値問題に加えて，お互いの接合境界における変位および応力に関する連続および平衡条件が与えられているという，一般混合型境界値問題とも言うべきものとなる。

定式化に当っては，広範な構造要素としての，梁，棒，壁，平板，曲面板等に適用可能とする為に，一般的な3次元弾性体をそれらの構造物のモデルとして選んでいる。それらの特種な構造要素は3次元弾性体に変位成分や応力成分に各々適当な仮定（即ち次元縮小性の仮定）を導入することによって得られる。

第2章で弾性体の連成問題として接合問題に対する諸関係式を述べ，一般混合型境界値問題を構成する。第3章では，その解の表現を弱型式として定式化し，その離散的表現をGalerkin近似を利用して与える。さらに第4章では，逆型式として定式化し，Galerkin法や境界積分方程式法による近似解法に言及する。第5章は変分的定式化で，有限要素法のHybrid型変分原理の拡張と考えられる2つの変分原理を構成する。

本論文は基本的には既に提出した文献[1]で展開した考え方に従うものであり，連続体として，線型3次元弾性体を選んだものである。ここでは，静的問題に限っているが，動的問題に対しても同様な定式化が可能である。

定式化に当り，弾性体の諸量とその関係式等は全て，symbol表現を採用し，その記号等は文献[3]に従うものとする。

＊ 日本大学生産工学部数理工学科・助教授・工博

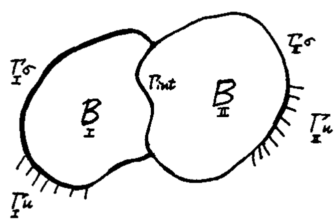
2　弾性体の接合問題

3次元ユークリッド空間内の閉曲面で囲まれた領域 B を占める弾性物体を考える。本論では，2つの物体を考え，各々 B_{I}，B_{II} と呼ぶ。

物体 B は閉曲面で与えられるような境界 ∂B によって他の領域から限られているものとする。

この2つの弾性体はお互いに共通する ∂B 上のある面（これを接合面と呼ぶ）を通し，連続的な運動を行うものとする。

ここでは，一般的に，各物体の境界は接合面を除いて，変位境界 Γ_u と応力境界 Γ_σ とから成り立っているものとする。従って，物体の境界は Γ_u と Γ_σ 及び接合境界 Γ_{int} の3つの部分から与えられる。この状態を図－1で示す。



図－1．弾性体の接合問題

境界 ∂B に関して，次式で与えられる：

$$\left.\begin{aligned} \partial B_{\mathrm{I}} &= \Gamma_u^{\mathrm{I}} \cup \Gamma_\sigma^{\mathrm{I}} \cup \Gamma_{int} \\ \partial B_{\mathrm{II}} &= \Gamma_u^{\mathrm{II}} \cup \Gamma_\sigma^{\mathrm{II}} \cup \Gamma_{int} \\ \Gamma_{int} &= \partial B_{\mathrm{I}} \cap \partial B_{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ただし，各部分 Γ_u，Γ_σ，Γ_{int} はお互いに共通部分を有さないものとする。

以上により，2つの弾性物体 B_{I} と B_{II} が各々の領域で，物体力（ベクトル）$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の作用のもとで運動し，さらにそれらが接合面を通して，連成運動を行うものとして，この接合問題に対する諸関係式を以下で与えることにする。

先ず，coordinate free型式として，symbol表現を与えた後，一例として，その曲線座標系に関する成分表現を述べることにする。

釣合方程式：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{C}[\nabla \boldsymbol{u}] + \boldsymbol{b} = 0 \quad (\mathrm{in}\ B_{\mathrm{I}}) \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}[\nabla \boldsymbol{v}] + \boldsymbol{c} = 0 \quad (\mathrm{in}\ B_{\mathrm{II}}) \qquad (3)$$

境界条件式：

変位境界条件式

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} \quad (\mathrm{on}\ \Gamma_u^{\mathrm{I}}) \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}} \quad (\mathrm{on}\ \Gamma_u^{\mathrm{II}}) \qquad (5)$$

応力境界条件式

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{s}} \quad (\mathrm{on}\ \Gamma_\sigma^{\mathrm{I}}) \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{m} = \boldsymbol{t} \quad (\mathrm{on}\ \Gamma_\sigma^{\mathrm{II}}) \qquad (7)$$

接合境界条件式

変位の連続条件式

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = 0 \quad (\mathrm{on}\ \Gamma_{int}) \qquad (8)$$

表面力の平衡条件式

$$\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = 0 \quad (\mathrm{on}\ \Gamma_{int}) \qquad (9)$$

ここで，$\boldsymbol{u}$（$\boldsymbol{v}$）は B_{I}（B_{II}）の変位ベクトル場，$\hat{\boldsymbol{u}}$（$\hat{\boldsymbol{v}}$）は Γ_u^{I}（Γ_u^{II}）上の規定変位ベクトル場，$\boldsymbol{s}$（$\boldsymbol{t}$）は B_{I}（B_{II}）は surface tractionベクトル場，$\hat{\boldsymbol{s}}$（$\hat{\boldsymbol{t}}$）は $\Gamma_\sigma^{\mathrm{I}}$（$\Gamma_\sigma^{\mathrm{II}}$）上の規定 surface traction ベクトル場，$\boldsymbol{S}$（$\boldsymbol{T}$）は B_{I}（B_{II}）の応力テンソル場，$\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{D}$）は B_{I}（B_{II}）は弾性テンソル場であり，次の線型関係式（応力－歪関係式）が成立しているものとする。

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C}[\nabla \boldsymbol{u}] \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}[\nabla \boldsymbol{v}] \qquad (11)$$

$\boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{D}$）は逆可能で compliance テンソル場 $\boldsymbol{C}^{-1}$（$\boldsymbol{D}^{-1}$）が存在し，さらに，対称性を有している。

$\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{m}$）は ∂B_{I} 上の外向き単位法線ベクトルを表わし，（2，3）式の微分作用素 div，∇＝grad は各々の領域における物体点の有する座標変数に関する発散，勾配作用素を意味するものである。

接合条件式(8,9)では，右辺が0なる同次式として与えられているが，Γ_{int}において，変位や外力が与えられているような非同次条件式に対しても，全く同様にして議論することが出来るが，ここでは，同次型条件式のみを取り上げる。

なお，接合面は両物体の共通境界面であるから，Γ_{int}における各物体の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$ に関しては，次の関係式が成立することに注意を要する。

$$\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{m} \quad (\text{on } \Gamma_{int}) \qquad (12)$$

以上で与えた諸関係式は実際の解析への適用に当って，各物体が占める領域の点を表わすのに便利で固有な座標系を採用することによって，それに関する成分表現されなければならない。

ここでは，複合構造物に対処出来るよう，そのような座標系として，各物体に独立に異なる曲線座標系を導入するものとする。図2に示されるように，Ω には x^k $(k=1,2,3)$ 系とし，Ω には X^K $(K=1,2,3)$ 系とする。各々の基本ベクトルは $\boldsymbol{g}_k\ (\boldsymbol{g}^k)$ と $\boldsymbol{G}_K\ (\boldsymbol{G}^K)$ とする。

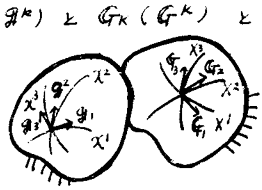


図-2. 曲線座標系

Γ_{int}の点に関しては，x^k系およびX^K系として表現されることになり，x^k系とX^K系との間にある関係式が成立することになる。これを

$$x^k = x^k(X^K) \ \text{又は}\ X^K = X^K(x^k) \qquad (13)$$

で表わすことにするならば，x^k系とX^K系とを結びつける座標変換関係式が与えられたことになる。

従って，Γ_{int}上では，基本ベクトルの間に，関連を与えることが出来，いわゆる two-point tensor [4] の特別な場合として考えられる次のような shifter が導入される。

$$\left.\begin{aligned} g^K_i &\overset{d}{=} \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{G}^K = \boldsymbol{G}^K\cdot\boldsymbol{g}_i \\ g^i_K &\overset{d}{=} \boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{G}_K = \boldsymbol{G}_K\cdot\boldsymbol{g}^i \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

この shifter を用いることによって，Ω と Ω で定義された諸量のΓ_{int}上における関係式を導くことが可能となる。

以上で導入された曲線座標系に関する諸関係式(2〜9)のベクトル，テンソル成分による表現式を求めることが出来，それらを以下で示す。

釣合方程式

$$\left.\begin{aligned} (C^{ijkl}u_{k|l})|_j + f^i &= 0 \\ (D^{IJKL}v_{K||L})||_J + C^I &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

ただし，$|$ $(||)$は x^k (X^K) に関する共変微分記号

境界条件式

$$\left.\begin{aligned} u^k &= \hat{u}^k \\ v^K &= \hat{v}^K \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} s^k &= S^{kl}n_l = \hat{s}^k \\ t^K &= T^{KL}m_L = \hat{t}^K \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

接合境界条件式

$$\left.\begin{aligned} u^i &= g^i_K v^K \quad (v^K = g^K_i u^i) \\ s^i &= -g^i_K t^K \quad (t^K = g^K_i s^i) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

3 弱定式化

前章で与えた2つの弾性体に関する連成の一般混合型境界値問題の解を特徴ずける為の定式化として，いわゆる弱解の概念[3]を導入し，(2〜9)式とある意味において等価であるような，弱定式化(weak formulations)とその近似表現を考える。

$\boldsymbol{\varphi}$ を Ω で定義された任意のベクトル場，$\boldsymbol{\psi}$ を Ω に対するそれとするならば，(2〜9)式に対する次の積分表示を満足するものとして，一般混合型境界値問題の弱解が定義される。

B に対して，

$$\int_B \{ \mathrm{div}\, \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] + \mathbf{b} \} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dv$$

$$= \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) \cdot \boldsymbol{\varphi}\, da + \int_{\Gamma_u} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\lambda}\, da \qquad (19)$$

B に対して，

$$\int_B \{ \mathrm{div}\, \mathbf{D}[\nabla \mathbf{v}] + \mathbf{c} \} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dv$$

$$= \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}) \cdot \boldsymbol{\psi}\, da + \int_{\Gamma_u} (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\mu}\, da \qquad (20)$$

ここで，変位境界 Γ_u の積分項の $\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\mu}$ は上式の物理的意味から明らかなように，各物体における surface traction を与えるものであるから，$\boldsymbol{\varphi}$ 及び $\boldsymbol{\psi}$ を用いて次のように表わせる．

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{C}[\nabla \boldsymbol{\varphi}]\mathbf{n} \qquad (21)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{D}[\nabla \boldsymbol{\psi}]\mathbf{m} \qquad (22)$$

(19, 20) 式に発散定理[3] を適用し，境界積分項に接合条件式を考慮することにより次式を得る。

$$\int_B \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dv - \int_{\Gamma_u} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda}\, da + \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, da$$

$$= \int_B \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dv + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, da - \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda}\, da \qquad (23)$$

$$\int_B \mathbf{D}[\nabla \mathbf{v}] \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}\, dv - \int_{\Gamma_u} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}\, da + \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\psi}\, da$$

$$= \int_B \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dv + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\psi}\, da - \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\mu}\, da \qquad (24)$$

ここで，(23, 24) 式に (8) 式の条件を考慮するならば，問題に対する弱定式化が与えられたことになる。

次に，この弱定式化に基づいた近似表現として，有限要素近似法を採用し，離散的表現として定式化を行うことにする。

領域 B を有限個の部分領域（有限要素）に分割し，そこで定義されたベクトルから成る関数空間を，その有限次元部分空間で近似する。各領域に対する近似空間における基底関数を各々，

$\mathbf{e}_\Delta$ $(\Delta = 1, \cdots, N)$，$\mathbf{f}_\Gamma$ $(\Gamma = 1, \cdots, M)$ とする。すると，各ベクトル場は次のように近似される．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx \mathbf{u}_N = \sum_{\Delta=1}^{N} \alpha_\Delta \mathbf{e}_\Delta \\ \mathbf{v} &\approx \mathbf{v}_M = \sum_{\Gamma=1}^{M} \beta_\Gamma \mathbf{f}_\Gamma \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$\mathbf{u}$ および $\mathbf{v}$ は上式より，近似化されて，α_Δ，β_Γ の組によって，離散化され，いわゆる節点変位ベクトル $\widetilde{\mathbf{u}}$，$\widetilde{\mathbf{v}}$ として表現出来ることになる。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_N &\sim \widetilde{\mathbf{u}} = [\alpha_1, \cdots, \alpha_N]^T \\ \mathbf{v}_M &\sim \widetilde{\mathbf{v}} = [\beta_1, \cdots, \beta_M]^T \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

このような離散化によって，連続場に対する弱型式 (23, 24) は $\boldsymbol{\varphi}$ および $\boldsymbol{\psi}$ として，各々の基底関数 $\mathbf{e}_\Delta$，$\mathbf{f}_\Delta$ をえらぶことによる finite element Galerkin 近似法を適用すると，$\widetilde{\mathbf{u}}$ および $\widetilde{\mathbf{v}}$ に関する次の連立方程式となる。

$$\left.\begin{aligned} {}_{I}\mathbf{K}\, \widetilde{\mathbf{u}} + {}_{II}\mathbf{K}\, \widetilde{\mathbf{v}} &= \widetilde{\mathbf{b}} \\ {}_{III}\mathbf{K}\, \widetilde{\mathbf{u}} + {}_{II}\mathbf{K}\, \widetilde{\mathbf{v}} &= \widetilde{\mathbf{c}} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

ただし，上式の各行列は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} {}_{I}\mathbf{K} &= [\, {}_{I}K_{\Delta\Gamma} \,] \\ &= \left[\int_B \mathbf{C}[\nabla \mathbf{e}_\Delta] \cdot \nabla \mathbf{e}_\Gamma\, dv - \int_{\Gamma_u} \mathbf{e}_\Delta \cdot \mathbf{C}[\nabla \mathbf{e}_\Gamma]\mathbf{n}\, da \right] \\ {}_{II}\mathbf{K} &= [\, {}_{II}K_{\Delta\Gamma} \,] \\ &= \left[\int_B \mathbf{D}[\nabla \mathbf{f}_\Delta] \cdot \nabla \mathbf{f}_\Gamma\, dv - \int_{\Gamma_u} \mathbf{f}_\Delta \cdot \mathbf{D}[\nabla \mathbf{f}_\Gamma]\mathbf{m}\, da \right] \\ {}_{II}\mathbf{K} &= [\, {}_{II}K_{\Delta\Gamma} \,] \\ &= \left[\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{D}[\nabla \mathbf{f}_\Delta]\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_\Gamma\, da \right] \\ {}_{III}\mathbf{K} &= [\, {}_{III}K_{\Delta\Gamma} \,] \\ &= \left[\int_{\Gamma_{int}} \mathbf{C}[\nabla \mathbf{e}_\Delta]\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_\Gamma\, da \right] \end{aligned} \qquad (28)$$

$$\tilde{b} = [\ \tilde{b}_\Delta\ ]$$
$$= [\ \int_B b\cdot e_\Delta\, dv + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{s}\cdot e_\Delta\, da - \int_{\Gamma_u} \hat{u}\cdot C[\nabla e_\Delta] n\, da\ ]$$
$$\tilde{c} = [\ \tilde{c}_\Delta\ ]$$
$$= [\ \int_B c\cdot f_\Delta\, dv + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t}\cdot f_\Delta\, da - \int_{\Gamma_u} \hat{v}\cdot D[\nabla f_\Delta] m\, da\ ] \tag{29}$$

(27)式は，$\tilde{u}$, $\tilde{v}$ に関する連成方程式であるが，$\tilde{u}$ 又は $\tilde{v}$ を消去することにより，$\tilde{u}$ 及び $\tilde{v}$ に関する次の方程式を導くことが出来る。

$$({}_{I}K - {}_{I\,II}K\, {}_{II}K^{-1}\, {}_{II\,I}K)\,\tilde{u}$$
$$= \tilde{b} - {}_{I\,II}K\, {}_{II}K^{-1}\,\tilde{c} \tag{30}$$

$$({}_{II}K - {}_{II\,I}K\, {}_{I}K^{-1}\, {}_{I\,II}K)\,\tilde{v}$$
$$= \tilde{c} - {}_{II\,I}K\, {}_{I}K^{-1}\,\tilde{b} \tag{31}$$

4. Inverse Formulation

前章の弱型式(23,24)の才1項目に再び，発散定理を適用し，弾性テンソル場の対称性 $C^T = C$, $D^T = D$ を考慮することにより，次式を得る。

$$\int_B \mathrm{div}\, C[\nabla\varphi]\cdot u\, dv + \int_B b\cdot\varphi\, dv$$
$$= \int_{\Gamma_u} (\hat{u}\cdot\lambda - s\cdot\varphi)\, da$$
$$+ \int_{\Gamma_\sigma} (u\cdot\lambda - \hat{s}\cdot\varphi)\, da$$
$$+ \int_{\Gamma_{int}} (v\cdot\lambda + t\cdot\varphi)\, da \tag{32}$$

$$\int_B \mathrm{div}\, D[\nabla\psi]\cdot v\, dv + \int_B c\cdot\psi\, dv$$
$$= \int_{\Gamma_u} (\hat{v}\cdot\mu - t\cdot\psi)\, da$$
$$+ \int_{\Gamma_\sigma} (v\cdot\mu - \hat{t}\cdot\psi)\, da$$
$$+ \int_{\Gamma_{int}} (u\cdot\mu + s\cdot\psi)\, da \tag{33}$$

ここで，接合境界条件式(8,9)式を考慮している。

ここで得られた表現式(32,33)は式の型式より明らかなように，(23,24)式に対する inverse 表現[5]となっていることから，(2〜9)の連成混合型境界値問題の inverse formulation と呼ぶことにする。この定式化においては，接合条件の変位場の連続条件式(8)も式中に取り入れられていることに特徴を有するものである。

次に，この inverse 表現を用いることによって得られる2つの近似表現を考える。

4−1. Finite Element Galerkin 表現

前章で行った離散的手法を適用することによって，(32, 33)式より，$\tilde{u}$, $\tilde{v}$ に関する次の連立方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} {}_{I}L\,\tilde{u} - {}_{I\,II}L\,\tilde{v} &= -\tilde{b} \\ {}_{II}L\,\tilde{u} - {}_{I}L\,\tilde{v} &= -\tilde{c} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

ただし，上式の各行列については，以下のように与えられる。

$${}_{I}L = [\ {}_{I}L_{\Delta\Gamma}\ ]$$
$$= [\ \int_B \mathrm{div}\, C[\nabla e_\Delta]\cdot e_\Gamma\, dv$$
$$+ \int_{\Gamma_u} C[\nabla e_\Gamma] n\cdot e_\Delta\, da$$
$$- \int_{\Gamma_\sigma} e_\Gamma\cdot C[\nabla e_\Delta] n\, da\ ]$$

$${}_{II}L = [\ {}_{II}L_{\Delta\Gamma}\ ]$$
$$= [\ \int_B \mathrm{div}\, D[\nabla f_\Delta]\cdot f_\Gamma\, dv$$
$$+ \int_{\Gamma_u} D[\nabla f_\Gamma] m\cdot f_\Delta\, da$$
$$- \int_{\Gamma_\sigma} f_\Gamma\cdot D[\nabla f_\Delta] m\, da\ ]$$

$${}_{I\,II}L = [\ {}_{I\,II}L_{\Delta\Gamma}\ ]$$
$$= [\ \int_{\Gamma_{int}} f_\Gamma\cdot C[\nabla e_\Delta] n\, da + \int_{\Gamma_{int}} D[\nabla f_\Gamma] m\cdot e_\Delta\, da\ ]$$

$${}_{II\,I}L = [\ {}_{II\,I}L_{\Delta\Gamma}\ ]$$
$$= [\ \int_{\Gamma_{int}} e_\Gamma\cdot D[\nabla f_\Delta] m\, da + \int_{\Gamma_{int}} C[\nabla e_\Gamma] n\cdot f_\Delta\, da\ ] \tag{35}$$

4－2．連成境界積分方程式表現

(32, 33)式の才1項に注目し，任意のベクトル場 $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ を次式を満足するようなもの，即ち静的弾性問題に対する基本解 $\boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^*$，として選ぶことにする。

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{C}[\nabla\boldsymbol{\varphi}^*] &= \delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\xi}) \\ \operatorname{div}\boldsymbol{D}[\nabla\boldsymbol{\psi}^*] &= \delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\Xi}) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

ただし，$\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\xi})$ は $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\xi}$ において特異性を有する Dirac Delta 関数とし，$\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\Xi})$ も同様なものとする。

そのような基本解としては，等質，等方3次元弾性体に対えるならば，$\boldsymbol{\xi}$ において集中荷重 $\boldsymbol{l}$ を受ける Kelvin 問題，

$$\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} = -\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{l} \quad (37)$$

（ λ, μ は Lamé 定数 ）

の解（いわゆる Kelvin 解）[3]

$$\boldsymbol{u}_{\xi}[\boldsymbol{l}](\boldsymbol{X}) = \frac{1}{Cr}\left[\frac{\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}}{r^2}+(3-4\nu)\boldsymbol{1}\right]\boldsymbol{l} \quad (38)$$

$$\left(\begin{aligned} &C = 16\pi\mu(1-\nu) \\ &\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}-\boldsymbol{\xi}, \quad r=\|\boldsymbol{P}\| \\ &\otimes : \text{ベクトルのテンソル積} \end{aligned}\right)$$

を使用することが出来る。

ここで，(38)のような性質を有する基本解 $\boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^*$ を inverse formulation (32, 33) に代入し，(36)式を考慮して次式を得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = &-\int_{B} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\varphi}^*\,dv \\ &+\int_{\Gamma_u}(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\varphi}^*)\,da \\ &+\int_{\Gamma_\sigma}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*-\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{\varphi}^*)\,da \\ &+\int_{\Gamma_{int}}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}^*+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\varphi}^*)\,da \end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{C}[\nabla\boldsymbol{\varphi}^*]\boldsymbol{n} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\Xi}) = &-\int_{B} \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\psi}^*\,dv \\ &+\int_{\Gamma_u}(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\mu}^*-\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\psi}^*)\,da \\ &+\int_{\Gamma_\sigma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mu}^*-\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{\psi}^*)\,da \\ &+\int_{\Gamma_{int}}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\mu}^*+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\psi}^*)\,da \end{aligned}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{D}[\nabla\boldsymbol{\psi}^*]\boldsymbol{m} \quad (40)$$

上式より明らかなように，物体力の項を除けば，境界項に関する積分項に未知量を含むような積分方程式であるから，いわゆる境界積分方程式表現として，定式化されたことになる。従って，連成境界値問題は連成境界積分方程式(39, 40)の解法に帰着されたことになり，境界要素法[5]が適用出来ることとなる。

5. 変分的定式化

この章では，連成混合型境界値問題の解を特徴づけるのに有力な手段としての変分形式による定式化を行うことにする。

そこで，関係式(2～9)を Euler 方程式とするような汎関数を構成することにより，いわゆる変分原理を設定すれば良いことになる。

それには，従来から線型弾性論で成立している minimum potential energy 原理及び minimum complementary energy 原理を接合面における接合条件式を取り入れるように拡張すれば良い。

その為の有力な方法は Lagrange の Multiplier [6]を利用するものである。それに従うことによって，以下の2つの変分原理を得る。

5－1．potential energy type の変分原理

変位に関する境界条件式(4, 5)を満足する変位場 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 及び Lagrange の Multiplier $\boldsymbol{q}$ に関する次の汎関数 $\Phi\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}\}$ の極値条件は連成混合境界値問題(2～9)と等価である。

$$\Phi\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}\} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{C}[\nabla\boldsymbol{u}]\cdot\nabla\boldsymbol{u}\,dv$$
$$-\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}\,dv - \int_{\Gamma_{\mathrm{I}\sigma}} \hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{u}\,da$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{D}[\nabla\boldsymbol{v}]\cdot\nabla\boldsymbol{v}\,dv - \int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}\,dv$$
$$-\int_{\Gamma_{\mathrm{II}\sigma}} \hat{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{v}\,da - \int_{\Gamma_{int}} (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{q}\,da \qquad (41)$$

この接合面における変位の連続条件式に対するLagrange Multiplier $\boldsymbol{q}$ は接合面における両物体に共通な surface traction を意味する。

5－2. complementary energy type の変分原理

応力に関する条件式 (2,3) 及び (6,7) を満足する応力場 $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ 及び Lagrange Multiplier $\boldsymbol{w}$ に関する次の汎関数 $\Psi\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{w}\}$ の極値条件は連成混合境界値問題 (2～9) と等価である。

$$\Psi\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{w}\} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{C}^{-1}[\boldsymbol{S}]\cdot\boldsymbol{S}\,dv$$
$$-\int_{\Gamma_{\mathrm{I}u}} \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\,da + \frac{1}{2}\int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{D}^{-1}[\boldsymbol{T}]\cdot\boldsymbol{T}\,dv$$
$$-\int_{\Gamma_{\mathrm{II}u}} \boldsymbol{t}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}\,da - \int_{\Gamma_{int}} (\boldsymbol{S}+\boldsymbol{t})\cdot\boldsymbol{w}\,da \qquad (42)$$

ここで，Lagrange Multiplier $\boldsymbol{w}$ は接合面における両物体に共通な変位場を意味する。

以上で導いた2つの変分原理は，有限要素法における要素間の連続性を取り入れる為に開発されたHybrid型変分原理[7]の全体の場への拡張したものと考えられる。

6. Concluding Remarks.

以上によって，2つの弾性体の連成運動としての接合問題を解析する為に必要な定式化を3つの立場から検討し構成することが出来た。　定式化は一般的な3次元弾性体を対象としている。　従って，以下に述べる様な接合問題に対する理論的基礎を与えているものであるから，弾性体を特殊化することによって，対応する問題の定式化も容易に行ないうることになる。

(1) 弾性の異なる弾性体の接合問題．

弾性係数に基づく剛性の異なる構造物同志の接合問題や3次元物体と2次元物体との接合問題がこの範　に入りうる。

(2) 複合シェル構造物

シェル同志の接合問題に対しては，3次元物体をKirchhoff－Loveの仮定等を導入することによってシェル化すればよい．

(3) 縁梁を有するシェル構造

構造物としてのシェルはそれ自身だけではなく，縁に補剛材としての縁梁を附することが構造上有利であることが知られている。　縁梁を曲線棒や壁体と見なすことによって，シェルとの接合問題と考え一般的に定式化出来る。

参考文献

[1] 登坂：「連続体における連成問題の近似解法について」第32回応用力学連合講演会論文抄録集 pp 351－352, 1981. 11

[2] 日置：「構造物のモデル化とその解析」（スペース・ストラクチャーの解析 pp7－42）鹿島出版会, 1971.

[3] Gurtin, M. E. : The Linear Theory of Elasticity, (in Handbuch der Physik VIa/2 pp1-295) Springer Verlag. 1972.

[4] Eringen, A. C. : Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, 1962

[5] Brebbia, C.A. & S. Walker : Boundary element techniques in engineering, Newnes－Butterworths, 1980.

[6] Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1968.

[7] 鷲津：弾性学の変分原理概論（コンピュータによる構造工学講座 II－3－A）日本鋼構造協会編 1972, 2.

ON THE FORMULATION FOR THE CONNECTION PROBLEMS OF ELASTIC BODIES

Nobuyoshi TOSAKA*

It is hardly necessary to comment on the importance of the connection problems of two or more over elastic bodies in different fields of structural engineering. Indeed, as it is well known, these exist many actual examples. The complexly connected structures with a different shape and rigidity and the thin shell structures with edge beams are typical ones.

This paper is devoted to a basic formulation of the connection problems of two linear elastic bodies. But, the contact problem as the another important one in elasticity does not be included in this paper. On the formulations, we adopt a general three dimensional elastic body as the model of actual structures, because it is reduced to a two(wall, plate, shell) or one dimensional elastic body(beam, rod) through the introduction of some appropriate assumptions on displacements and stresses.

The problems are treated as the coupled mixed type boundary-value problems with the continuity condition of displacement vectors and the balance condition of surface traction vectors on the interface boundary connects with two elastic bodies. We establish three formulations: the weak one, the inverse one, and the variational one. These completely characterize the solutions of coupled mixed boundary-value problems.

Moreover, the discrete expressions of approximate solutions for our problems, which are based on the derived weak and inverse formulations, and used for the derivation of our discrete expressions. Next, from the inverse formulation, it is pointed out that the boundary integral equation method is applicable to the connection problems. The two variational principles of the connection problems are established in the variational formulation. They are the principle of potential energy type and complementary energy type which are considered as the extension for the variational principles of hybrid type in finite element method.

* Associate Prof. Dept. of Mathematical Engineering, College of Industrial Technology, Nihon Univ.