

## (19) 塑性ヒンジ法による筋違の弾塑性解析

○山田隆夫<sup>\*1</sup>, 高梨晃一<sup>\*2</sup>

1. 序 座屈変形を含む筋違の履歴特性に関する弾塑性解析法としては、塑性変形を長さ方向の一断面に集中させて考える「塑性ヒンジ解析」と、塑性変形領域の断面内及び長さ方向の広がり考えた狭義の「弾塑性解析」に大別される。

塑性ヒンジ解析では、塑性ヒンジでの(一般化)応力と(一般化)ひずみの関係に剛塑性を仮定し、一般化応力で表わした降伏条件式を用い、塑性変位増分を降伏条件式を塑性ポテンシャルとする流動法則から求めるのが一般に行なわれる。この時、塑性ヒンジ以外は弾性体として扱っている。

塑性ヒンジ解析に関する既往の研究としては、五十嵐・井上<sup>(1,2)</sup>、若林・野中<sup>(3,4)</sup>らの理論的研究があり、また、漸増定変位振幅での繰返し実験に関しては、若林<sup>(5)</sup>らの研究がある。

五十嵐・井上<sup>(2)</sup>は放物型の降伏関数を用い、流動法則に従って、塑性ヒンジにおける回転変形と伸縮変形を考慮して、一定変位振幅下に於て、繰返し数の履歴特性に与える影響を検討し、これを基に履歴ループのモデル化の提案をしている<sup>(1)</sup>。然し乍ら、これを用いて筋違付骨組系の弾塑性解析を行なうと筋違の細長比の小さい時は、比較的良く実験と一致するが、細長比が大きくなるにつれ、slip特性が出現する<sup>(11)</sup>という欠点がある。

野中<sup>(3)</sup>は線形の降伏関数を用い、繰返し加力時の挙動を含めた解析的な一般解を導き、更に、若林・野中<sup>(4)</sup>は漸増定変位振幅での実験<sup>(5)</sup>に、この数値計算を試みている。ここでは、引張降伏直後の部材は真直になると仮定しているから、引張降伏直後の圧縮最大耐力は、応変材の値に等しく保持され、実験に見られる漸増定変位振幅で、圧縮耐力の最大値が低下する現象を説明できない。

軸力 $N$ を受けて、弾性的に曲った状態にある部材の釣合方程式は、曲率半径 $\rho$ 、横たわみ $y$ 、材軸方向に沿った長さ $x$ とすれば、 $1/\rho = -Ny/EI$  となるが、五十嵐・井上、野中<sup>(1)</sup>は、曲率が小さく、 $1/\rho \approx \frac{d^2y}{dx^2}$  (厳密には  $1/\rho = \frac{d^2y}{dx^2} / \{1 + (\frac{dy}{dx})^2\}^{3/2}$ ) とし、又、軸力による材長変化は無いものとして、横たわみを求め、更に、横たわみによる幾何学的軸方向変形を求める際に  $\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{dy}{dx})^2$  としている。

山田・高梨<sup>(6)</sup>は塑性ヒンジ解析であるが、座屈後の部材を曲率が小さく無視し得るとして、piece-wise linear の折曲り直線材として、軸力-軸方向変形の関係を陽の形で求める事により、直接剛性法に組込める事を提案し、若林<sup>(5)</sup>の実験と比較検討している。この方法では、振幅が大きくなると実験値にくらべ引張圧縮耐力の繰返しによる低下が著しくなる一方、野中<sup>(3)</sup>に関して述べたのと同様に、引張降伏後の部材は真直になると仮定するから、引張降伏直後の圧縮耐力は応変材の値を保持し、実験に合わない。

本論は、若林の実験<sup>(5)</sup>(以後単に実験と呼ぶ)結果に見られる部材長中間の塑性ヒンジでの加工硬化を考慮して、前報<sup>(6)</sup>の考え方に、移動硬化と等方硬化をとりいれた場合の解析法を述べ、これにより実験で得られた、軸力-軸方向変形量、軸力-横たわみ、及び、塑性ヒンジでの $N-M$ 相関関係をどの程度シミュレートできるかを検討した。

### 2. 解析仮定

(1) 両端ピンの長方形断面の真直な部材に中心軸力が加わる。 (\*1) 日本鋼管 (\*2) 東京大学教授

- (2) 微小変形状態である。
- (3) 断面は変形後も平面を保持し、せん断変形は無視する。
- (4) 部材長の中に塑性ヒンジが形成され、一定方向に横たわみが生ずる。
- (5) 塑性ヒンジ以外の部分の応力とひずみの関係は弾性である。
- (6) 塑性ヒンジ部分の(一般化)応力と(一般化)ひずみの関係に等方硬化理論と移動硬化理論を適用する。
- (7) 必せん材の圧縮耐力はオイラーの座屈荷重又は、全塑性軸力のうち、小さい方の値で決まる。

### 3. 硬化法則

降伏曲面の塑性変形に伴う変化を規定する法則を硬化法則という。降伏曲面の回転とゆがみが無いものとして、表現が簡潔で解析に適用しうる基本的な硬化法則として、等方硬化法則と移動硬化法則がある。

#### 3.1. 等方硬化法則 (isotropic hardening rule)

降伏曲面は硬化に伴って、中心位置が一定のまま、降伏曲面を規定する全ての応力に関して、同じ割合で相似的に拡大されると考える。従って、降伏関数は必ずと限定されたものになる。

即ち、応力空間  $Q_i$  に於ける降伏曲面歪の中心を  $\bar{\alpha}$ 、硬化を表わすパラメータを  $\kappa$ 、曲面の等方的な拡大率を  $e$  とするとき、歪は、

$$\Phi = \Phi(Q - \bar{\alpha}, \kappa) = \Phi\{e(Q - \bar{\alpha}), e\kappa\} = 0. \quad (1)$$

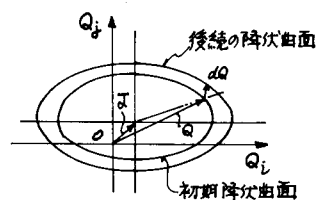


図1. 等方硬化

を満足するものがなければならぬ。(図1)

等方硬化法則では Baushinger 効果を表現できない。

#### 3.2 移動硬化法則 (kinematic hardening rule)

降伏曲面は硬化に伴って、その大きさを変えないが中心位置が移動すると考える。即ち (図2)。

$$\Phi = \Phi(Q - \bar{\alpha}, \kappa) = \Phi(Q - \bar{\alpha}) \quad (2)$$

Prager は中心の移動  $\dot{\bar{\alpha}}_i$  が、塑性ひずみ増分  $\dot{\epsilon}_p$  に比例する。即ち、

$$\dot{\bar{\alpha}}_i = H \dot{\epsilon}_p \quad (3)$$

と考えた。(7.10) ( $H$ : 移動硬化に関する硬化係数)

塑性ひずみ増分  $\dot{\epsilon}_p$  は降伏曲面上の応力は  $Q$  の外向き法線方向に生じるから、 $\dot{\bar{\alpha}}_i$  もこれと同一の向きに生じることになる。(図3)

移動硬化法則では、Baushinger 効果を定性的に表現できる。

#### 3.3. 硬化法則の塑性ヒンジへの適用

塑性ヒンジは部材長の中に形成され、繰返し載荷により硬化する。

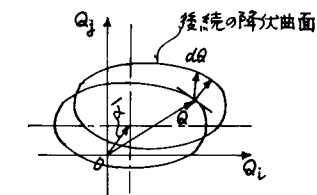


図2. 移動硬化

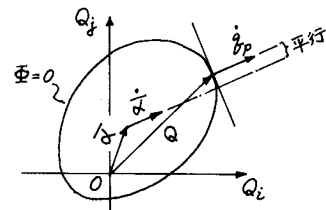


図3. Prager の移動硬化

いま、 $N$ : (塑性ヒンジでの) 軸力、

$N_p$ : 全塑性軸力

$M$ : (曲げモーメント、

$M_p$ : 全塑性曲げモーメント、

$Q$ : (一般化応力 ( $N, M$ )

$\bar{\alpha}$ : 降伏関数の中心座標 ( $\bar{\alpha}_N, \bar{\alpha}_M$ )

$d\epsilon_p$ : (軸方向塑性変位増分

$\alpha$ : 無次元量 ( $\alpha_N, \alpha_M$ )

$d\theta_p$ : (塑性回転角増分

$\kappa$ : の大きさを表わすパラメータ、

$d\epsilon_p$ : (一般化塑性変位増分

$\kappa_{init}$ :  $\kappa$  の初期値 ( $=1.0$ )

$\hat{H}$ ; 移動硬化に関する硬化係数

$H$ ; (移動+等方)硬化に関する全体としての硬化係数

として、塑性ヒンジで移動硬化と等方硬化の両方を考慮する。

$$\text{一般化応力} \quad \{Q\} = [N \mid M]^T \quad (4)$$

$$\text{一般化応力増分} \quad \{dQ\} = [dN \mid dM]^T \quad (5)$$

$$\text{一般化塑性変位増分} \quad \{d\delta_p\} = [d\delta_p \mid d\delta_p]^T \quad (6)$$

長方形断面の初期降伏関数は

$$\Phi = \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \frac{M}{M_p} - 1 = 0 \quad (7)$$

で表わされるが、加工硬化による降伏曲面の等方的拡大を表現し得る  
ように(7)式を図4の破線で近似し、更に各種断面に関する一般化を  
考慮して、<sup>(12)</sup> パラメータ  $\beta$  を用い

$$(i) \quad N/N_p \geq \beta M/M_p \quad \text{のとき} \quad \Phi = \frac{N}{N_p} + (1-\beta) \frac{M}{M_p} - K = 0 \quad (8)$$

$$(ii) \quad N/N_p < \beta M/M_p \quad \text{のとき} \quad \Phi = \frac{M}{M_p} - K = 0 \quad (9)$$

とする。長方形断面の場合は、 $\beta = 0.4$  が適当である。

(8), (9) 式を図5に示す圧縮(正), 引張の1~4の領域について示すと、

$$(i) \text{ 領域1; } N/N_p - \alpha_N \geq \beta(M/M_p - \alpha_M) > 0 \quad \text{のとき} \quad \Phi = \Phi_1 = \frac{N}{N_p} - \alpha_N + (1-\beta) \left(\frac{M}{M_p} - \alpha_M\right) - K = 0 \quad (10)$$

$$(ii) \text{ 領域2; } |N/N_p - \alpha_N| < \beta(M/M_p - \alpha_M) \quad \text{のとき} \quad \Phi = \Phi_2 = \frac{M}{M_p} - \alpha_M - K = 0 \quad (11)$$

$$(iii) \text{ 領域3; } |N/N_p - \alpha_N| < -\beta(M/M_p - \alpha_M) \quad \text{のとき} \quad \Phi = \Phi_3 = -\frac{M}{M_p} + \alpha_M - K = 0 \quad (12)$$

$$(iv) \text{ 領域4; } N/N_p - \alpha_N \leq \beta(M/M_p - \alpha_M) \leq 0 \quad \text{のとき} \quad \Phi = \Phi_4 = -\left(\frac{N}{N_p} - \alpha_N\right) - (1-\beta) \left(\frac{M}{M_p} - \alpha_M\right) - K = 0 \quad (13)$$

塑性変位増分  $d\delta_p$  は、塑性ポテンシャル論より(7, 8, 9)。

$$\{d\delta_p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\} \quad (d\lambda: \text{スカラー}) \quad (14)$$

塑性流れ後の一般化応力が新しい降伏曲面上にある条件(値)より、

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\}^T \{dQ - H d\delta_p\} = 0 \quad (15)$$

(14), (15) 式より、

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\}^T \{dQ\} / H}{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\}} \quad (16)$$

Pragerの移動硬化則は、(3)式より、硬化係数  $\hat{H}$  を用いて<sup>(10)</sup> (図6)

$$\{d\vec{\alpha}\} = \hat{H} \{d\delta_p\} \quad (17)$$

$$\text{ここに、} \{\vec{\alpha}\} = [\alpha_N \mid \alpha_M]^T = [\alpha_N \cdot N_p \mid \alpha_M \cdot M_p]^T \quad (18)$$

(10)~(13), (15), (18) 式を用いて、

$$d\Phi = \left(1 - \frac{\hat{H}}{H}\right) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\}^T \{dQ\} - dK \quad (19)$$

塑性流れ中は、

$$d\Phi = 0 \quad (20)$$

であるから、(19)式より

$$dK = \left(1 - \frac{\hat{H}}{H}\right) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\}^T \{dQ\} \quad (21)$$

### 3.4 硬化係数 $H, \hat{H}$ について

塑性ヒンジは部材長の特定の位置の無限小の長さを有する領域に押込められた塑性域である。即ち、  
部材全長のひずみの分布から見れば、ここでひずみは不連続である。従って、塑性ヒンジ法による限り、

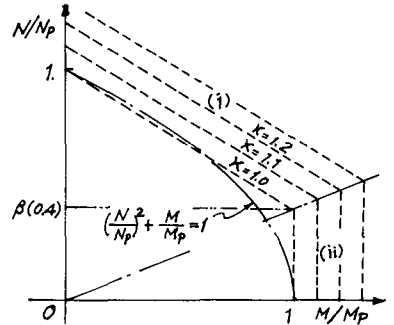


図4. 降伏関数の折線近似

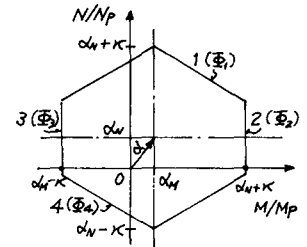


図5. 降伏関数(引張圧縮)

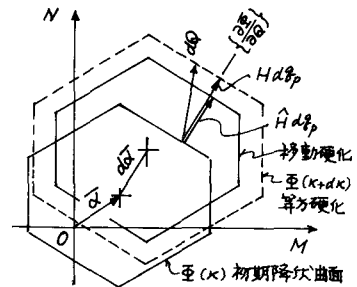


図6. 降伏関数と増分ベクトル

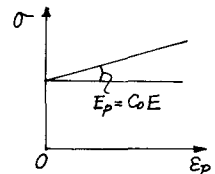


図7. 一軸引張  $\sigma-E_p$

塑性ひずみ増分は厳密には決定できない。

一軸引張応力状態で、塑性域が全長に亘って均等に分散する場合の塑性域における硬化係数を  $C_0$  とすると、(図7)。

$$\Delta N_p = (C_0 EA / \ell) \Delta x_p \quad (22)$$

ここに、 $E$ : ヤング率、 $A$ : 断面積、 $\ell$ : 材長、

であるから、前述の塑性変位増分に関する硬化係数  $H$  は、この場合、

$$H = C_0 EA / \ell \quad (23)$$

で表わされるものである。

本論で対象とする塑性ヒンジには、軸力と曲げが作用し、更にそれが反転するような負荷履歴を受け、また、ひずみが集中するので、(23)式の  $C_0$  を  $C$  に置換え、更に、 $C_0 = H/H$  とし、これらを負荷全過程で一定値とするとき如何なる値を選べば解析値が実験値を良くシミュレートし得るかを検討した。

#### 4. 履歴特性解析

定変位繰返し荷重を受ける筋違の軸力( $N$ ) - 軸方向変位( $x$ )の関係を図8に、塑性ヒンジ( $PH$ )に於ける軸力  $N/N_p$  - 曲げモーメント  $M/M_p$  の関係を図9に示す。両図中の応力経路(STATE)番号は筋違の弾塑性状態を示すもので互に対応している。

各経路に於ける荷重-変形関係を下記により求める。圧縮を正とする。

##### (1) STATE-0.

部材が全長に亘って、真直で弾性挙動をする状態である。この時

$$dN = (EA/\ell) dx \quad (24)$$

##### (2) STATE-1

オイラー座屈荷重又は全塑性軸力のうち、小さい方の荷重、即ち

$$N_E' = \min(N_E, N_p) \quad (25)$$

で座屈する状態である。

( $N_E' > (\alpha_w + \kappa) N_p$  では、この状態は無く、滑らかに STATE-2 に移る。)

$N = N_E'$  で部材長中間に突然横たゆみが生じ、ここでの  $N$ - $M$  が降伏関数を満足するべく塑性ヒンジが形成されて安定すると仮定する。これには STATE-0 からの場合と STATE-3' からの場合があり、変形後の応力の満足すべき降伏関数も図5の  $\Phi_1$  と  $\Phi_2$  の2つの場合がある(図10)。

いま塑性ヒンジの座屈直前の状態(存在モーメント  $M_0$ )からの横たゆみを  $y_j$  とすると、(図11)、この位置でのモーメント  $M$  は

$$M = M_0 + N y_j \quad (26)$$

$$\therefore dM = dN \cdot y_j + N dy_j = N_E' dy_j \quad (27)$$

横たゆみ飛移り量  $dy_j$  は、

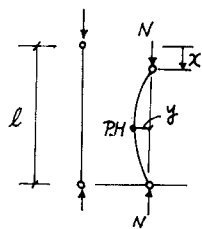


図8

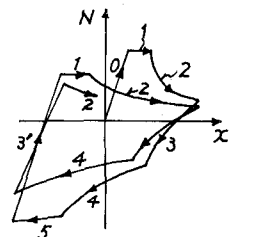


図9.

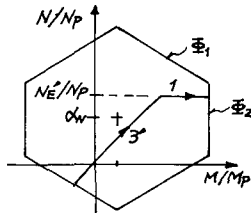
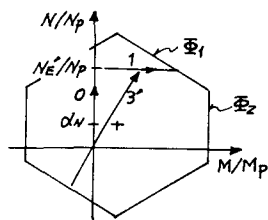
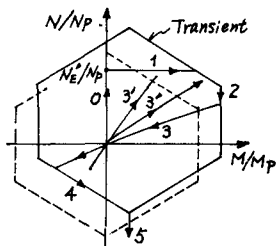


図10.

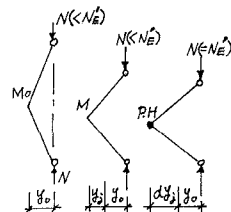


図11

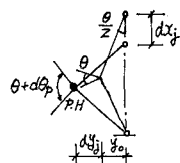


図12.

(i)  $N_E/N_p - \alpha_N \geq \beta$  のとき  $\alpha = \alpha_1$  として (20), (26), (27) 式より

$$dy_j = \frac{M_p}{N_E} \left\{ \frac{1}{(1-\beta)} (K - \frac{N_E}{N_p} + \alpha_N) + \alpha_M \right\} - \frac{M_0}{N_E} \quad (28)$$

(ii)  $N_E/N_p - \alpha_N < \beta$  のとき  $\alpha = \alpha_2$  として (11), (26), (27) 式より

$$dy_j = \frac{M_p}{N_E} (\alpha_M + K) - \frac{M_0}{N_E} \quad (29)$$

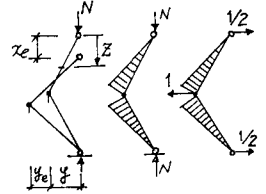


図 13.

座屈直前・直後の塑性ヒンジを除く部材は剛体であると考え、塑性ヒンジ

の回転角増分を  $d\theta_p$  とすると、幾何学的関係から (図 12)。

$$dy_j = \frac{l}{4} d\theta_p \quad (30)$$

また、軸方向移動量  $dx_j$  についても同様。

$$dx_j = l \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta + d\theta_p}{2}\right) \right\} = \frac{l}{8} \{ 2\theta d\theta_p + (d\theta_p)^2 \} \quad (31)$$

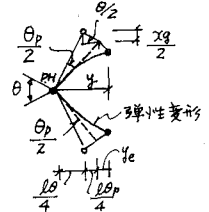


図 14.

### (3) STATE-2

塑性ヒンジが形成され、圧縮側で除荷されるが、塑性流れが生じている状態である。

部材は piece-wise linear の折曲り直線材とする。(図 13, 14)。

軸力  $N$  による弾性軸方向変位  $x_e$  は、 $x_e = \frac{\partial}{\partial N} \int_0^{y/2} \left( \frac{ZNyZ}{l} \right) dz + \frac{Nl}{EA} = \frac{l}{EA} \left( 1 + \frac{y^2}{3l^2} \right) N$  (i: 断面2次半径) (32)

弾性横たわみ  $y_e$  は  $y_e = \frac{\partial}{\partial N} \int_0^{y/2} \left( \frac{ZNyZ}{l} \right) \frac{z}{2} dz = \frac{y l^2}{12EI} N$  (33)

従って、弾性軸方向変位増分  $dx_e$ 、弾性横たわみ増分  $dy_e$  は (32), (33) 式より。

$$dx_e = \frac{l}{EA} \left\{ \frac{2y}{3l^2} dy \cdot N + \left( 1 + \frac{y^2}{3l^2} \right) dN \right\} \quad (34), \quad dy_e = \frac{l^2}{12EI} (dy \cdot N + y \cdot dN) \quad (35)$$

塑性横たわみ増分  $dy_p$  は、全横たわみ増分を  $dy$  とし、 $dy_p = dy - dy_e = \left( 1 - \frac{l^2 N}{12EI} \right) dy - \frac{l^2 y}{12EI} dN$  (36)

塑性流れは、降伏関数の  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  (図 5) で生じる 2 つの場合がある。

(i)  $N/N_p - \alpha_N \geq \beta(M/M_p - \alpha_M) > 0$  のとき、 $\alpha = \alpha_1$  とし (20) 式より、 $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right\} = \left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial a} \right\} = \left[ \frac{\partial \alpha_1}{\partial N} \mid \frac{\partial \alpha_1}{\partial M} \right]^T = \left[ \frac{1}{N_p} \mid \frac{1-\beta}{M_p} \right]^T$  (37)

(ii)  $N/N_p - \alpha_N < \beta(M/M_p - \alpha_M)$  のとき、 $\alpha = \alpha_2$  とし (11) 式より、 $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right\} = \left\{ \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} \right\} = \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial N} \mid \frac{\partial \alpha_2}{\partial M} \right]^T = \left[ 0 \mid \frac{1}{M_p} \right]^T$  (38)

(37), (38) 式を便宜上まとめ、 $\left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right\} = [n \mid m]^T$  (39)

塑性ヒンジの回転角増分  $d\theta_p$  は (14) 式より  $d\theta_p = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial M} \right) d\lambda = m \cdot d\lambda$  (40)

塑性ヒンジの回転角増分  $d\theta_p$  と横たわみ増分  $dy_p$  は、幾何学的関係から  $d\theta_p = \frac{4}{l} dy_p$  (41)

(36), (40), (41) 式より  $d\lambda = \frac{4}{m l} \left\{ \left( 1 - \frac{l^2 N}{12EI} \right) dy - \frac{l^2 y}{12EI} dN \right\}$  (42)

一方、(16) 式より  $d\lambda = [n \mid m] [dN \mid dM \cdot y + N dy]^T / H(n^2 + m^2)$  (43)

(42), (43) 式より  $dy = \left\{ \frac{4}{m l} \frac{l^2 y}{12EI} + \frac{N + m y}{H(n^2 + m^2)} \right\} dN / \left\{ \frac{4}{m l} \left( 1 - \frac{l^2 N}{12EI} \right) - \frac{m N}{H(n^2 + m^2)} \right\}$  (44)

塑性ヒンジの軸方向塑性変位増分  $dx_p$  は、(14) 式より  $dx_p = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial N} \right) d\lambda = n \cdot d\lambda$  (45)

幾何学的な軸方向変位増分  $dx_g$  は、図 12 より、 $dx_g = \frac{l \theta}{4} d\theta_p$  (46)

軸方向全変位増分  $dx$  は  $dx = dx_e + dx_g + dx_p$  (47)

(47) 式に (34), (40), (42), (44), (45), (46) 式を用い、 $dN = K(N, M, \alpha_N, \alpha_M, y, \theta) d\lambda$  (48)

即ち、軸力増分  $dN$  と軸方向変位増分  $dx$  が陽の型の剛性  $K$  を用いて表わされる。

塑性流れ  $\Delta N$ 、弾性復活の判定は、

(i)  $\alpha \geq 0, d\lambda > 0$ . 塑性流れ, (ii)  $\alpha = 0, d\lambda = 0$ . 中立, (iii)  $\alpha \leq 0, d\lambda < 0$ . 弾性復活

による。

塑性流れに伴う降伏曲面の中心の移動  $d\alpha$  は (17), (18) 式より、 $\{d\alpha\} = [d\alpha_N \mid d\alpha_M]^T = H [dx_p/N_p \mid d\theta_p/M_p]^T$  (49)

の拡大  $dK$  は、(21) 式より、 $dK = \left( 1 - \frac{\alpha}{H} \right) [n \mid m] [dN \mid dM]^T$  (50)

#### (4) STATE-3, 3'

塑性ヒンジの変形が lock されたまま、( $d\theta_p = dx_p = dy_p = 0$ ) 折曲り直線材として、弾性変形のみ生ずる。

$$\text{横たわみ増分 } dy \text{ は、その弾性成分に等しいから、(35)式より } dy = \ell^2 y dN / (12EI - \ell^2 N) \quad (51)$$

$$\text{軸方向変位増分 } dx \text{ は、} \quad (34) \text{式より } dx = \frac{\ell}{EA} \left\{ \frac{2y}{j^2} dy \cdot N + (1 + \frac{y^2}{j^2}) dN \right\} \quad (52)$$

$$(51), (52) \text{ 式より、} \quad dN = K(N, y) dx \quad (53)$$

即ち、軸力増分  $dN$  と 軸方向変位増分  $dx$  が陽の型の剛性  $K$  を用いて表わされる。

#### (5) STATE-4

軸力が引張で塑性流れが生じている状態であり、基本的には STATE-2 と同じであるから、降伏関数が異なり、塑性ヒンジが逆転している点異なる。

塑性流れは、降伏関数の  $\sigma_3$  と  $\sigma_4$  (図5) で生じる2つの場合がある。即ち、

$$(i) |N/N_p - \alpha_N| < -\beta(M/M_p - \alpha_M) \text{ のとき、} \sigma = \sigma_3 \text{ とし、(32)式より } \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right\} = \left\{ \frac{\partial \sigma_3}{\partial N} \right\} \left\{ \frac{\partial \sigma_3}{\partial M} \right\}^T = \left\{ 0 \mid -\frac{1}{M_p} \right\}^T \quad (54)$$

$$(ii) N/N_p - \alpha_N \leq \beta(M/M_p - \alpha_M) \leq 0 \text{ のとき、} \sigma = \sigma_4 \text{ とし、(33)式より } \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right\} = \left\{ \frac{\partial \sigma_4}{\partial N} \right\} \left\{ \frac{\partial \sigma_4}{\partial M} \right\}^T = \left\{ -\frac{1}{N_p} \mid -\frac{(1-\beta)}{M_p} \right\}^T \quad (55)$$

$$(54), (55) \text{ 式を便宜上、まとめて、} \quad \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right\} = [n \mid m]^T \quad (56)$$

とし、(39)式の代りに用いて、STATE-2 に準ずればよい。

#### (6) STATE-5

STATE-4 の特殊な場合で、塑性ヒンジの応力は降伏関数の角点 (corner point) にあり、ここで純引張塑性流れが生じている状態である。

$$\text{従って、} \quad M = y = \theta = \alpha_M = dM = dy = d\theta = d\alpha_M = 0 \quad (57)$$

$$dN = H dx_p \quad (58)$$

$$d\alpha_N = \hat{H} dx_p / N_p \quad (59)$$

$$n = \frac{\partial \sigma}{\partial N} = -\frac{1}{N_p}, \quad m = \frac{\partial \sigma}{\partial M} = 0. \quad (60)$$

$$dK = (1 - \frac{\hat{H}}{H}) n dN \quad (61)$$

$$\text{軸力増分 } dN \text{ と 軸方向変位増分 } dx \text{ は、(23), (24), (58) 式より、} \quad dN = K dx = \frac{H}{1+C} dx \quad (62)$$

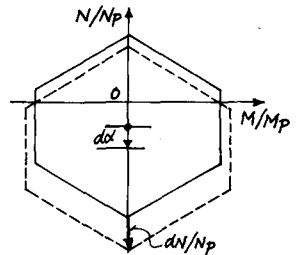


図 15.

#### 5. 実験値と理論値の比較検討

若林<sup>(5)</sup> は両端ヒンの長方形充実断面材 (1.5 cm × 1.5 cm) の漸増定変位振幅での繰返し載荷実験を行ない、軸力 ( $N$ ) と軸方向変位量 ( $x$ )、横たわみ ( $y$ ) を測定している。

載荷方法は、圧縮側より加力を始め、一定変位振幅で引張・圧縮を繰返し、履歴曲線が安定した後、更に引張側で変位振幅を増し、その振幅で、再び引張・圧縮を繰返すという方法である。

表1は、実験した部材の細長比 ( $\lambda$ )、定変位振幅の塑性率 ( $\mu$ )、一定の塑性率の下での繰返し回数 ( $n$ ) を示す。

図16は、素材の引張試験の  $\sigma$ - $\epsilon_p$  関係で、 $C_0 = 0.012$  であった。

前述の解析法により、 $C, C_R$  を適当に仮定する事により、各細長比に關して、 $N$ - $\mu$ 、 $N$ - $\bar{y}$  ( $\bar{y} = Np y / Mp$ )、塑性ヒンジでの  $N$ - $M$  相関を求めた。

この理論値を、実験値と共に、図17~20に示す。

表1. 実験諸元<sup>(5)</sup>

| $\lambda$ | $\mu$ | $n$ | $\lambda$ | $\mu$ | $n$ |
|-----------|-------|-----|-----------|-------|-----|
| 45        | 4.0   | 6   | 85        | 4.2   | 5   |
|           | 8.0   | 6   |           | 8.4   | 6   |
|           | 12.0  | 6   |           | 12.6  | 5   |
|           | 16.0  | 6   |           | 16.8  | 6   |
| 65        | 4.5   | 7   | 105       | 3.2   | 4   |
|           | 9.0   | 7   |           | 6.4   | 4   |
|           | 13.5  | 6   |           | 9.6   | 4   |
|           | 18.0  | 6   |           | 12.8  | 4   |

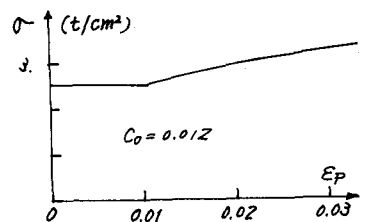


図 16. 素材の引張試験

$\lambda = 45$   
EXPERIMENT

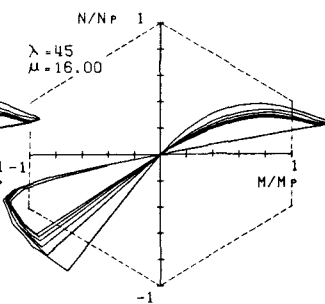
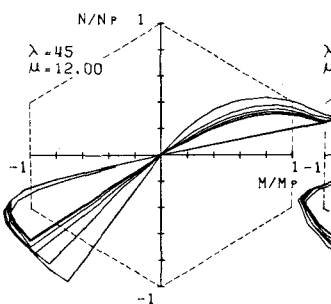
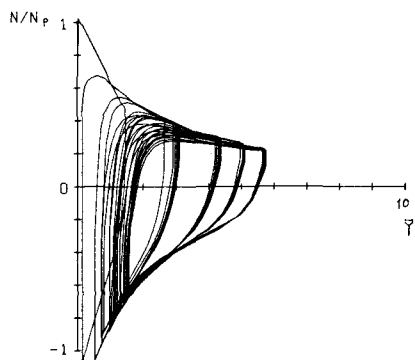
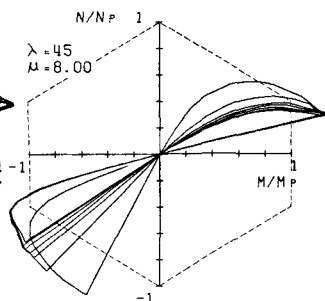
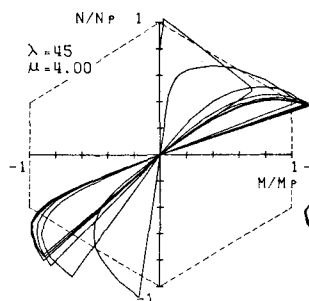
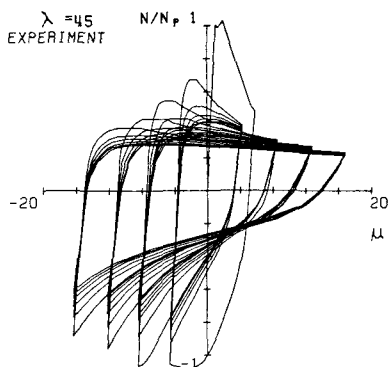


图 17-1  $\lambda = 45$ . 实验值

$\lambda = 45$   
ANALYSIS

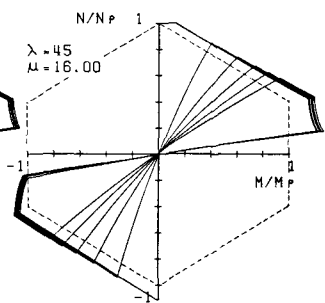
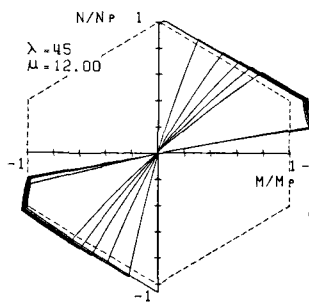
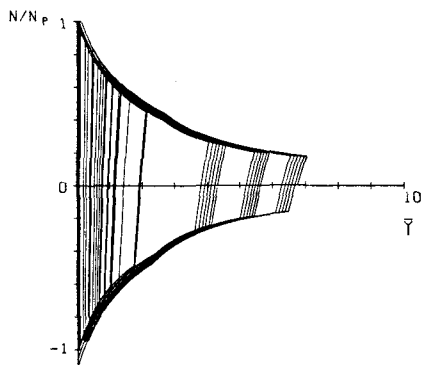
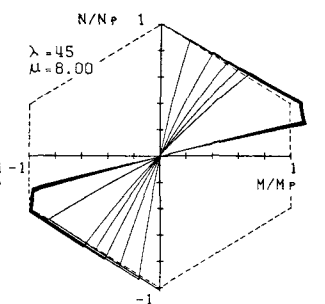
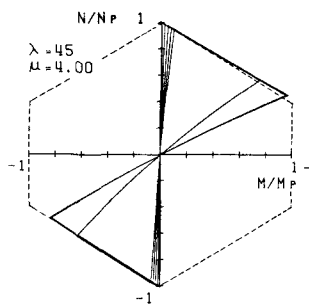
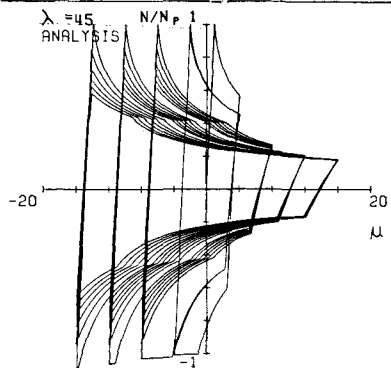


图 17-2  $\lambda = 45$ . 理论值 ( $C = 0.002$ ,  $C_E = 0.9$ )

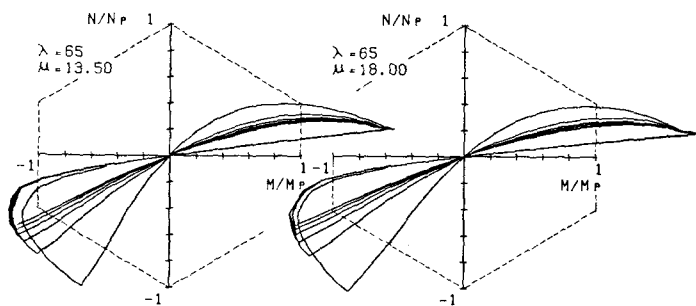
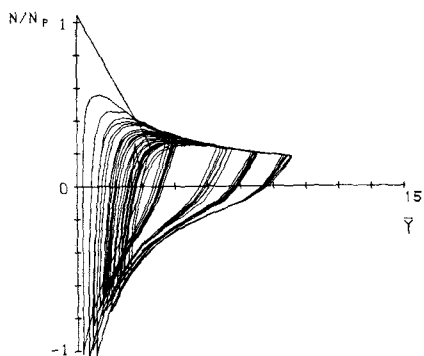
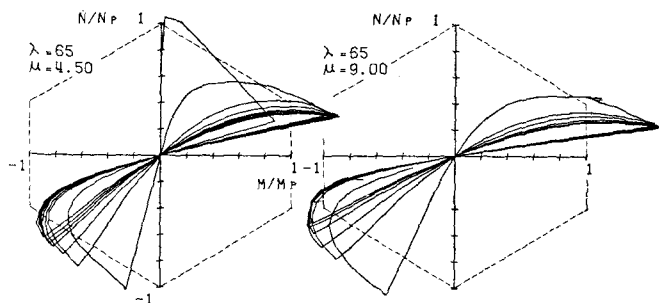
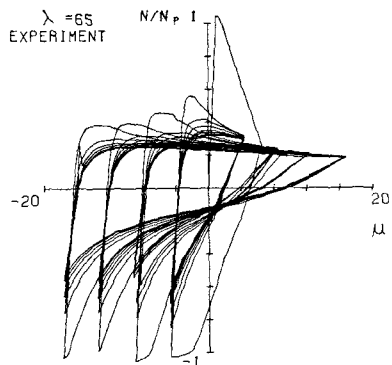


图 18-1.  $\lambda = 65$  实验值

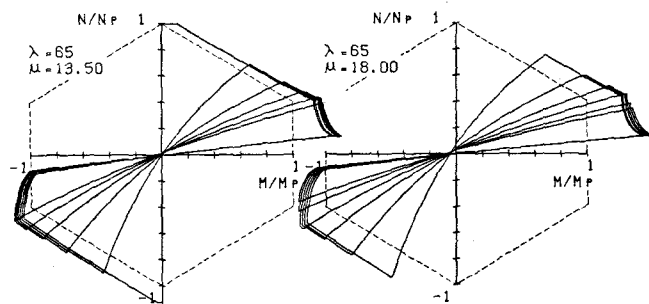
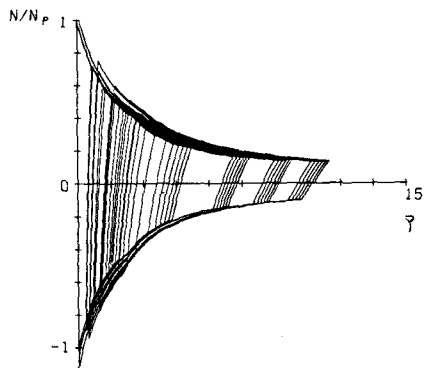
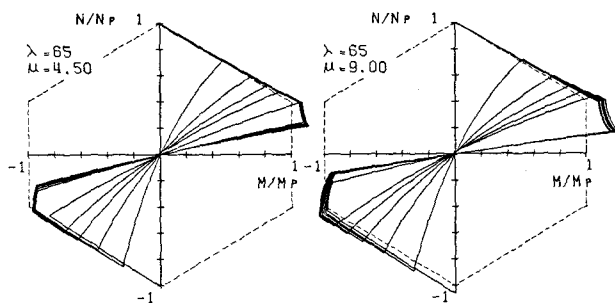
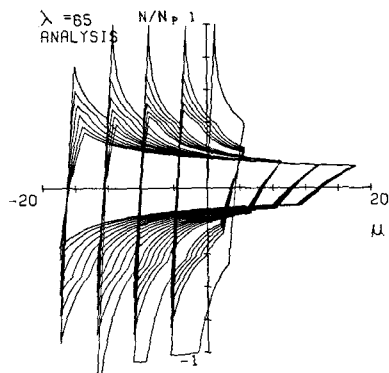


图 18-2.  $\lambda = 65$  理论值 ( $C = 0.005$ ,  $C_A = 0.9$ )

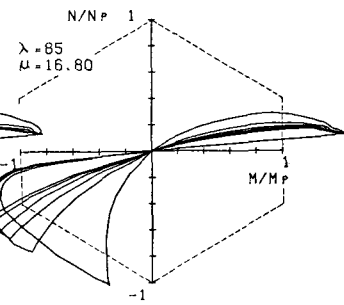
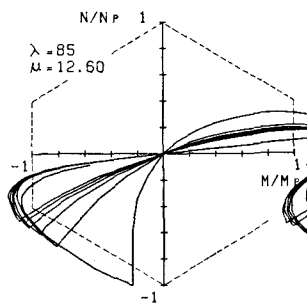
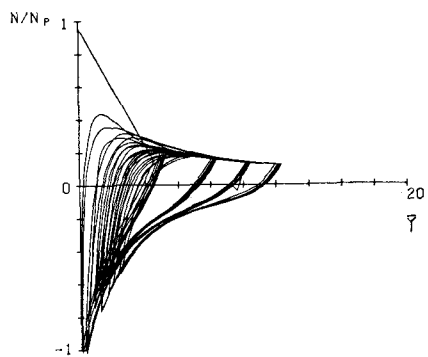
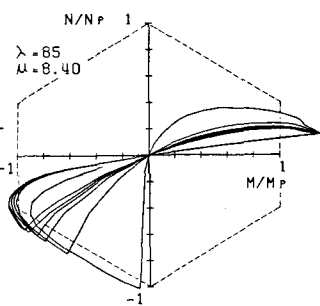
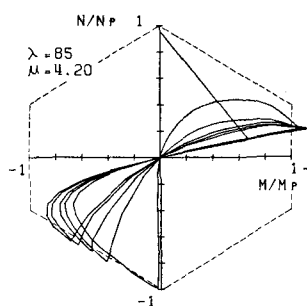
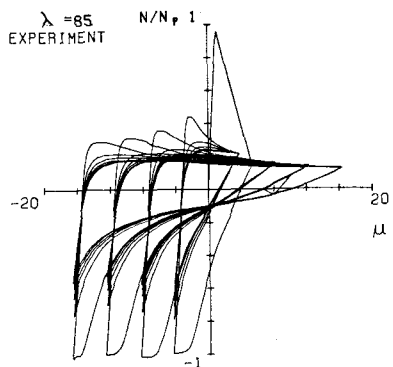


图 19-1  $\lambda = 85$  实验值

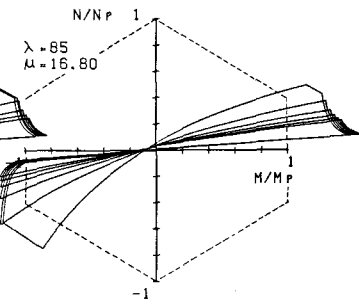
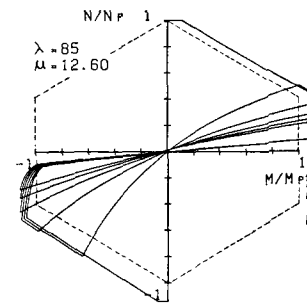
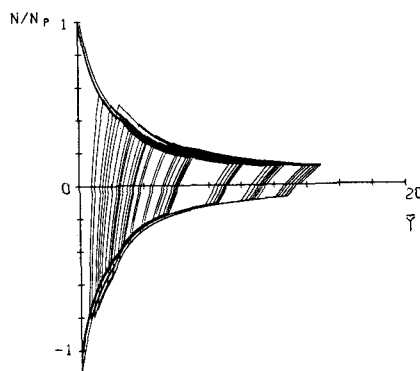
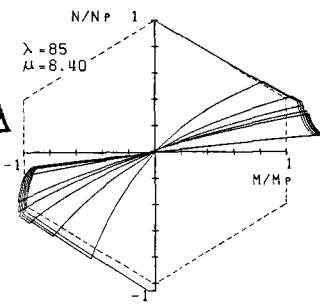
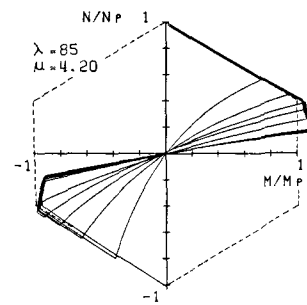
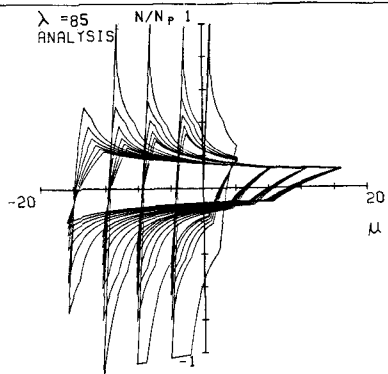


图 19-2  $\lambda = 85$  理论值 ( $C = 0.008$ ,  $C_k = 0.9$ )

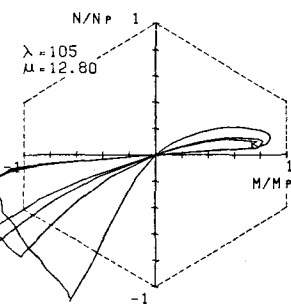
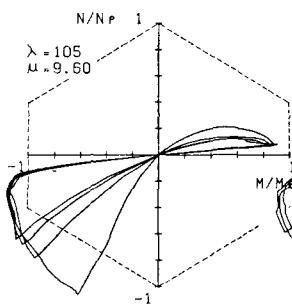
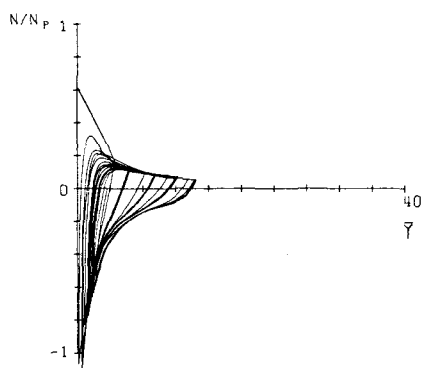
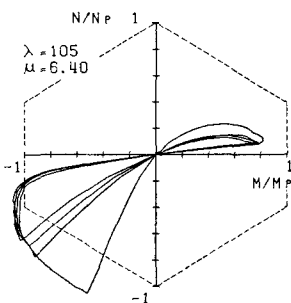
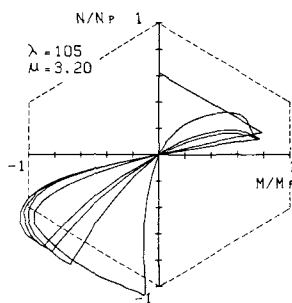
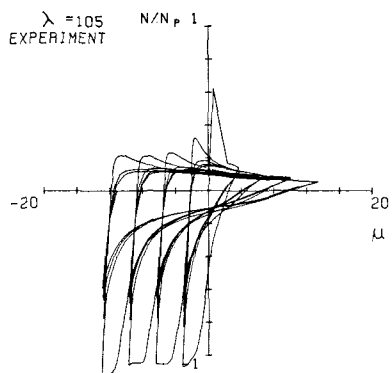


图 20-1  $\lambda = 105$ . 实验值

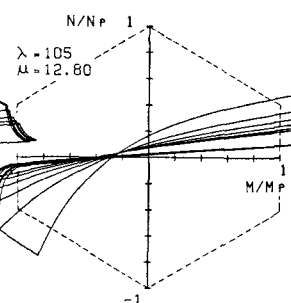
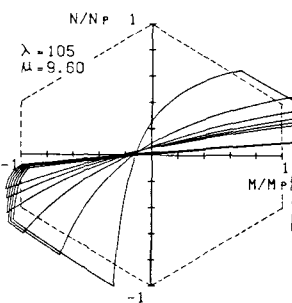
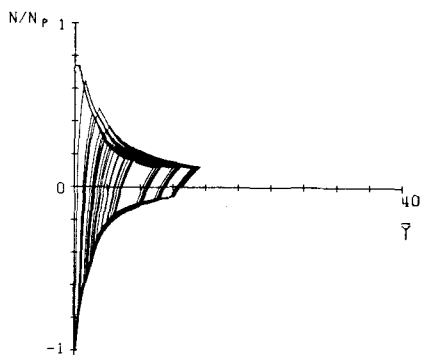
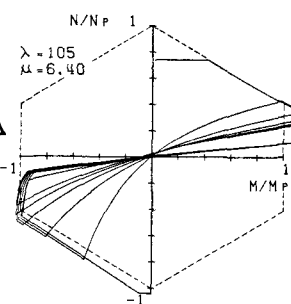
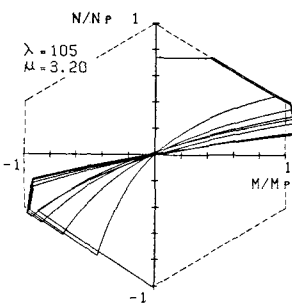
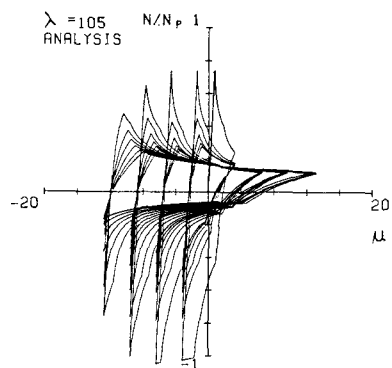


图 20-2  $\lambda = 105$ . 理论值 ( $C = 0.012$ ,  $C_k = 0.9$ )

なお、ここに示す理論値の内、STATE-2 における変形は、降伏曲面の拡大を伴わない完全な移動硬化を仮定している。 $C, C_R$  の選択に関しては、下記の検討をした。

(i)  $C_R (= \hat{H}/H) = 0.5, 0.8, 0.9$  について検討した。 $C$  の値に因らず、 $C_R = 0.5, 0.8$  では、等方硬化の度合が大きすぎる。即ち、繰返しによる引張耐力の急激な上昇、圧縮耐力の低下が鋭い、 $N-M$  相関が実験値を大きく上回る等の現象が見られる。 $C_R = 0.9$  程度が適当であると考えられる。

(ii)  $C = 0.002, 0.005, 0.008, 0.012$  について検討した ( $C_R = 0.9$ )。

図17~20には、この内実験に一省近い特性を示すものを示した。

図21に、最適な  $C$  の存在が予想される領域を破線で示す。

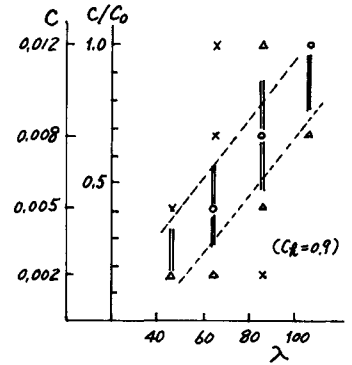


図 21.

図17-20より理論値は、概ね実験値の履歴特性を表わしていると思われるが、 $N-M$  相関を見ると、振幅を新に増した時に、実験では、 $M$  が残留した状態で塑性変形が進行しているのに対し、理論値は、純引張の角点に達している。これは、塑性域が実際には長さ方向にある幅を持って存在し、塑性ヒンジ法で考える仮定の硬化されたヒンジ以外で塑性変形が進んでいる事によると考えられる。また、この残留横ばい幅が、実験に見られる引張降伏後の圧縮耐力の低下の原因であると考えられる。

然し乍ら、この振幅を新に増した時の最初のループを除いて、その後の定変位振幅での履歴特性を見ると、本理論値は実験値の特性を良く捉えていると考えられる。

## 6. 結 論

本論は、塑性ヒンジ法に硬化理論を取り入れて、筋違の座屈後の弾塑性挙動を解析する方法について述べた。筋違の荷重-軸方向変形を陽の型の剛性  $K$  を介して表現し、直接剛性法によるマトリクス構造解析に組み込む事が出来る事を示し、また、既往の各種細長比での繰返し載荷実験結果と比較検討し、本法が、その履歴特性を工学的によく把握し得る事を示した。

## 7. 謝 辞

京都大学若林 実教授には、筋違の実験に関する貴重なデータを提供していただいた。懐いて、謝意を表します。

## 8. 文 献

- (1) 五十嵐・井上・小川：鋼構造筋違付多層骨組の塑性設計に関する研究 建論報. 263, S.53.1
- (2) 五十嵐・井上・木林・浅野：筋違付架構の復元力特性 建論報 196, S.47.6.
- (3) Nonaka, T.: An Elastic-Plastic Analysis of a Bar under Repeated Axial Loading. Int. J. Solid. Struct. 1973, vol. 9.
- (4) 若林・野中・中村・森野・吉田：繰返し軸方向力を受ける部材の弾塑性挙動に関する実験的研究 (39 ±) 建築学会・大会 S. 47.10.
- (5) 若林・野中・中村・森野・吉田：繰返し軸方向力を受ける部材の挙動に関する実験 (39 ±) 京大防災研年報 1974.
- (6) 山田・高梨：ブレースの弾塑性解析のための簡易モデルについて 建築学会・大会 S. 46.9.
- (7) Olgazak, N., Mroz, Z., Perzyna, P.: Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity. Pergamon Press.
- (8) 田中 尚：構造物の極限解析 建築構造学大系, 9, 華国社.
- (9) 上田 華雄：マトリクス法による骨組構造物の弾塑性解析 造研学会論文集, No. 124, 126.
- (10) Dafalias, Y.F., Popov, E.P.: Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity. Jour. Appl. Mech. Dec. 1976.
- (11) 田中・高梨・山田・山口：球形タンク支持構造の模型載荷実験による地震応答性状の推定(東生研報, 改稿中)
- (12) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針. EERC, 76-17.
- (13) Popov, E.P., Takanashi, K., Roeder, C.W.: Structural Steel Bracing Systems: Behavior under Cyclic Loading.

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF BRACING  
SYSTEMS BY PLASTIC HINGE METHOD

BY TAKAO YAMADA \*  
KOICHI TAKANASHI \*\*

The objective of this paper is to present the numerical analysis methods of bracing systems subjected to repeated thrust loading by plastic hinge method.

In this analytical model, the brace is assumed to remain piece-wise linear elastic straight member approximately, whenever loaded in thrust except for a central plastic hinge location.

The axial displacement of this model is the sum of the elastic elongation of the brace, the displacement due to the plastic axial deformation and hinge rotation, and the displacement due to the elastic flexural deflection of the brace, but limited to small geometric effects.

This method is developed in linear analysis, so axial force-deflection relationships is obtained in an open form with stiffness  $K$ , therefore this can be applicable to the direct stiffness matrix structural analysis method.

Kinematic hardening and isotropic hardening rules are applied to the plastic hinge and the plastic deformation is decided by plastic potential theory, using the appropriate yield function for the member section.

An experimental study is carried out in order to investigate hysteretic behavior of a steel bar subjected to repeated axial tension and compression by other researcher. In the test program, all specimens are simply supported at both ends and their slenderness ratio varies from about 40 to 160.

The solutions were compared with experimental results. The analysis agreed with force-displacement behavior of the brace in the engineering point of view.

---

\* Nippon Kokan K.K.

\*\* Prof. Ins.Ind.Sci., Univ. of Tokyo