

(16) 仮想仕事法に基づく構造解析の一考察

○ 太田 勤^{*1} 今村重信^{*1}
堀江文雄^{*2}

§ 1, はじめに 現在の構造解析では、殆どどの場合直接剛性法にもとづく変位法が普遍的に用いられているが、応力法では、対象とする構造物や特殊な条件下の構造物によっては、応力法が具合のよい場合もある。しかし応力法は変位法のように系統立った解析法にやっ不向きの点もあり、比較的小規模で、特殊な条件下に置かれた構造物（熱応力、不同沈下、ピン・ローラの多い骨組）の解析に威力を発揮する。本論で説明する仮想仕事法に基づく構造解析は、基本的にはエネルギー法であり、これに独立な変形モード（メカニズム）に対する仮想仕事式が付帯条件となるようにラグランジュの未定乗数を導入して、最小エネルギー原理により、変位と応力が未知量となる代数方程式が得られる。これは一種の混合法であり、一見未知量が多く非実用的に思われるが、かなり複雑な構造物でも、明快な形でしかも容易に代数方程式を導くことが出来、しかも未知量を低減させる縮約も容易であるメリットがある。以下本法の概要と解析例を示す。

§ 2, 基本的な考え方

2.1 釣合い力系における歪エネルギー： 図-1には、外力の作用によって釣合っている構造物系

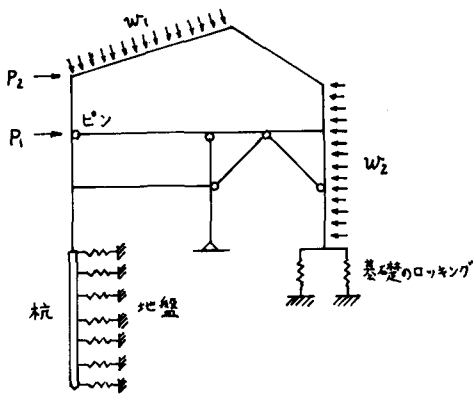


図-1 外力を受けて釣合っている
任意の構造物系

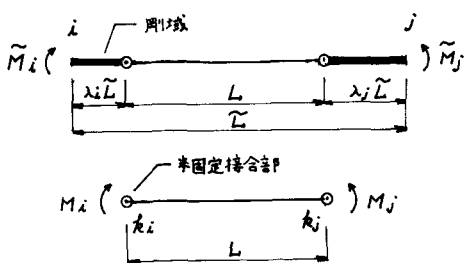


図-2 剛域と半固定接合部を有する
曲げ・せん断部材

系が示されている。未知量としては、応力あるいは変位を選ぶことが出来るが、まず釣合力系で貯えられている歪エネルギー W を応力あるいは変位で表わしてみる。

図-2には曲げおよびせん断変形する部材の両端に剛域と半固定接合部を有する部材が示されており、この部材の有する歪エネルギー W_i は次のようになる。

$$W_i = \frac{L}{6EI} \left\{ \left(1 + \frac{3}{4k_i} + \frac{3EIK_i}{\beta G A L^2} \right) M_i^2 + \left(1 - \frac{6EIK_i}{\beta G A L^2} \right) M_i M_j \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{3}{4k_j} + \frac{3EIK_j}{\beta G A L^2} \right) M_j^2 \right\} \quad (1)$$

ここに、 EI = 曲げ剛性、 GA = せん断剛性、 β = せん断剛性低下率、 K = 形状係数、 L = 可撓部分の長さ、 $\tilde{L}$ = 部材長、 $k_i, k_j = 0$ のときヒンジ、 ∞ のとき剛接合となる半固定接合部のパラメータ⁽¹⁾、 M_i, M_j = 半固定接合部の曲げモーメント、 $\tilde{M}_i, \tilde{M}_j$ = 材端の曲げモーメント

尚 $\tilde{M}_i, \tilde{M}_j$ と M_i, M_j の間には次の関係が成立する。

$$\tilde{M}_i = \frac{1-\lambda_j}{1-\lambda_i-\lambda_j} M_i - \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i-\lambda_j} M_j \\ \tilde{M}_j = -\frac{\lambda_j}{1-\lambda_i-\lambda_j} M_i + \frac{1-\lambda_i}{1-\lambda_i-\lambda_j} M_j \quad (2)$$

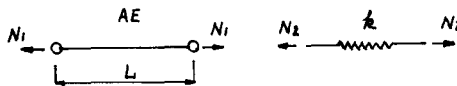
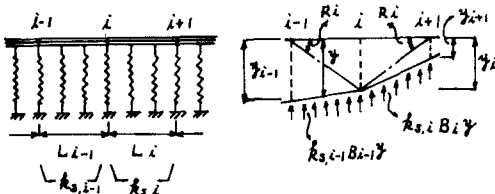


図-3 軸方向部材としてのトラス部材とバネ

次に図-3に示すような軸方向部材の歪エネルギー W_2 は次のようになる。

$$W_2 = \frac{L}{2AE} N_1^2, \quad \frac{1}{2k} N_2^2 \quad (3)$$



最後に図-4に示す地盤等にもみられるウインクラーモデルのバネに貯えられる歪エネルギー W_3 は

$$W_3 = \sum_i \frac{1}{6} k_{s,i} B_i L_i^3 (R_i^2 + R_i R_{i+1} + R_{i+1}^2) \quad (4)$$

となる、ここに

図-4 地盤等にもみられるウインクラーバネモデル

$k_{s,i}$ = 地盤等のバネ反力係数 (単位 kg/cm^3),

B_i = 地盤の中 (杭茎や梁巾), L_i = 任意の分割長, $R_i = y_i/L_i$ = 無次元変位

2.2 釣合力系に与えられる仮想仕事

(1) 矩形ラーメンのような場合

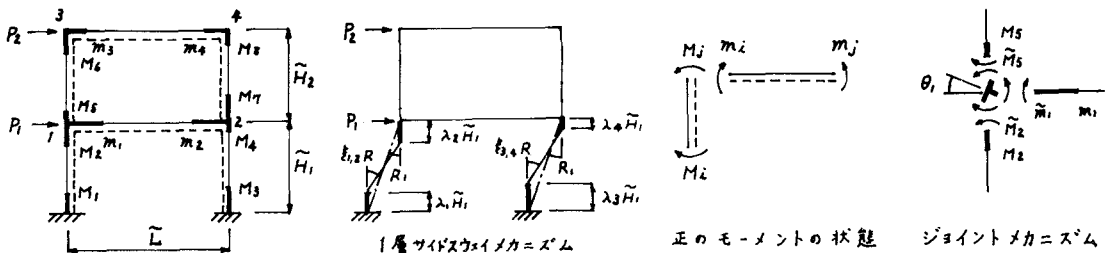


図 5 矩形ラーメンモデルと独立のメカニズム

図-5に示す矩形ラーメンが外力 P_1, P_2 のもとで、釣合っているとき、独立の各メカニズム (仮想変位) に対して為される仮想仕事は、たとえば次のようになる。

$$\{ (-M_1 + M_2) \xi_{1,2} + (M_3 - M_4) \xi_{3,4} \} R_1 = (P_1 + P_2) H_1 R_1 \quad (5)$$

$$\{ \tilde{M}_2 - \tilde{M}_5 - \tilde{m}_1 \} \theta_1 = 0 \quad (6)$$

ここに

$$\xi_{1,2} = 1/(1-\lambda_1-\lambda_2), \quad \xi_{3,4} = 1/(1-\lambda_3-\lambda_4)$$

ここで (2) 式を用いると (6) 式は次のようになる。

$$\{ (a_{2,2} M_2 + a_{2,1} M_1) - (a_{5,5} M_5 + a_{5,6} M_6) - (b_{1,1} m_1 + b_{1,2} m_2) \} \theta_1 = 0 \quad (6')$$

$$\text{ここに } a_{i,i} = (1-\lambda_j)/(1-\lambda_i-\lambda_j), \quad a_{i,j} = -\lambda_i/(1-\lambda_i-\lambda_j) \quad (7)$$

$$a_{j,i} = -\lambda_j/(1-\lambda_i-\lambda_j), \quad a_{j,j} = (1-\lambda_i)/(1-\lambda_i-\lambda_j)$$

$b_{i,i}, b_{i,j}, b_{j,i}, b_{j,j}$ も $a_{i,i}, a_{i,j}, a_{j,i}, a_{j,j}$ と同様である。

(2) 中間荷重のある部材の場合

図-6に示す中間荷重が作用する場合の部材に、おのおのの独立な仮想変位 v_1, v_2 および v_3 を生じ

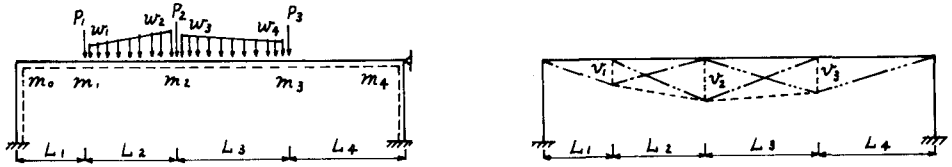


図-6 中間荷重が作用する部材と各独立なメカニズム(それぞれのメカニズムに対する仮想変位が v_1, v_2, v_3)
 させたとき、各独立なメカニズムに対する仮想仕事は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{L_1} m_0 + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) m_1 - \frac{1}{L_2} m_2 \right] v_1 &= P_1 v_1 + \frac{1}{6} (2w_1 + w_2) L_2 v_1 \\ \left[-\frac{1}{L_2} m_1 + \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) m_2 - \frac{1}{L_3} m_3 \right] v_2 &= P_2 v_2 + \frac{1}{6} \left[(w_1 + 2w_2) L_2 + (2w_3 + w_4) L_3 \right] v_2 \\ \left[-\frac{1}{L_3} m_2 + \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \right) m_3 - \frac{1}{L_4} m_4 \right] v_3 &= P_3 v_3 + \frac{1}{6} (w_3 + 2w_4) L_3 v_3 \end{aligned} \quad (8)$$

(3) 斜材付フレームの場合

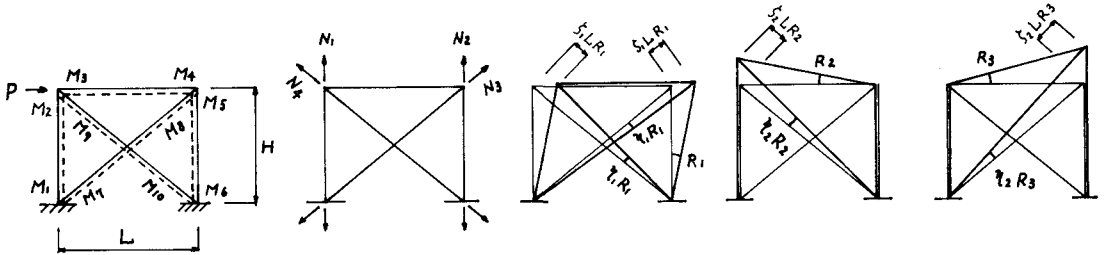


図 7 斜材付フレームと各独立なメカニズム(それぞれのメカニズムに対する仮想変位が R_1, R_2, R_3)

図-7に斜材のあるフレームが外力 P を受けて釣合っているとき、独立な各メカニズムに対して為される仮想仕事は次のようである。

$$\begin{aligned} [-M_1 + M_2 - M_5 + M_6 - \eta_1 M_7 + \eta_1 M_8 - \eta_1 M_9 + \eta_1 M_{10} + \xi_1 N_3 L - \xi_1 N_4 L] R_1 &= PH R_1 \\ [-M_3 + M_4 - \eta_2 M_9 + \eta_2 M_{10} + N_1 L + \xi_2 N_4 L] R_2 &= 0 \\ [M_3 - M_4 + \eta_2 M_7 - \eta_2 M_8 + N_2 L + \xi_2 N_3 L] R_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{ここに } \eta_1 = \left(\frac{H}{L} \right)^2 / \left[1 + \left(\frac{H}{L} \right)^2 \right], \quad \eta_2 = \left(\frac{L}{H} \right)^2 / \left[1 + \left(\frac{H}{L} \right)^2 \right], \quad \xi_1 = \xi_2 = H / \left[L^2 + H^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

(4) 弾性地盤上の弾性梁の場合

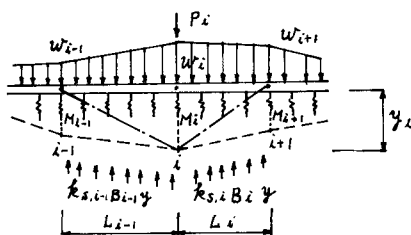


図-8 弾性地盤上の梁モデルと独立のメカニズム(仮想変位 y_i)

図-8に示す弾性地盤上の梁に任意の外力が作用して釣合っているとき、独立のメカニズムに対して為される仮想仕事は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{L_{i-1}} M_{i-1} + \left(\frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) M_i - \frac{1}{L_i} M_{i+1} \right] y_i + \frac{1}{6} k_{s,i-1} L_{i-1} (y_{i-1} y_i + 2 y_i^2) \\ + \frac{1}{6} k_{s,i} L_i (2 y_i^2 + y_i y_{i+1}) = \frac{1}{6} \left[(w_{i-1} + 2 w_i) L_{i-1} + (2 w_i + w_{i+1}) L_i \right] y_i + P_i y_i \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 エネルギー最小原理にもとづく方程式の誘導 ; 一般に構造物は、それが有する歪エネルギー W が最小となるように釣合っている。しかもこのような釣合い力系において、可能な独立の仮想変位(メカニズム)を設定した場合、この釣合力系の為される仕事量が零であることから、この関係も付帯条件として、歪エネルギーの最小化を図ればよい。この考え方に類似の手法は骨組の崩壊解析に L や Q を採用する場合、Donald E. Grieson⁽²¹⁾ や 石川⁽³⁾ 等によって用いられており、Philip G. Hodge⁽⁴⁾ の歪エネルギー法を改善した筆者の崩壊解析手法⁽⁵⁾ も同様の考え方に基づいている。さて仮想仕事式としての付帯条件が次式で与えられるものとする。

$$f_1(M_i, N_i, R_i, P_i, w_i)R_i = 0, \quad f_2(M_i, N_i, R_i, P_i, w_i)R_i = 0, \quad \dots \quad (12)$$

P_i, w_i は集中荷重と分布荷重であり、 $f_j(M_i, N_i, R_i, P_i, w_i)$ は曲げモーメント M_i 、軸方向力 N_i 、および無次元変位 R_i に関して一次式であり、 R_j は無次元仮想変位であるが、所謂ラグランジュの未定乗数といわれるものである。結局歪エネルギー W を最小化する為には、次のエネルギー汎関数 J を最小化すればよい。

$$J = W + f_1(M_i, N_i, R_i, P_i, w_i)R_i + f_2(M_i, N_i, R_i, P_i, w_i)R_i + \dots \quad (13)$$

(13)式を最小化する条件は

$$\frac{\partial J}{\partial M_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial N_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial R_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

となるので (14)式を代数的に解けば、未知応力 M_i, N_i および未知変位 R_i が同時に求められる。この儘では未知量が多いので、応力 M_i, N_i を消去して変位 R_i のみの代数方程式に縮約することも容易である。

3. 解析例

3.1 剛域のあるラーメンのヒンジ追跡

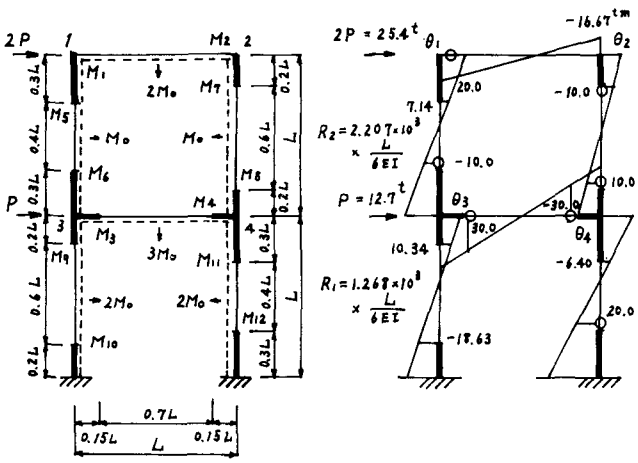


図 - 9 2層剛域付矩形ラーメンモデルと崩壊メカニズム

図 - 9 に示すような2層剛域付ラーメンモデルに水平力が作用する場合、追跡法によって崩壊解析も行った結果を示す。まず全歪エネルギー W は、(1)式より次のようになる(せん断変形を無視する $GA \rightarrow \infty$)。

$$W = \frac{L}{6EI} \left[\left(1 + \frac{3}{4k_1}\right) M_1^2 + M_1 M_2 + \left(1 + \frac{3}{4k_2}\right) M_2^2 + 0.7 \left(1 + \frac{3}{4k_3}\right) M_3^2 + 0.7 M_3 M_4 + 0.7 \left(1 + \frac{3}{4k_4}\right) M_4^2 + \dots + 0.4 \left(1 + \frac{3}{4k_{11}}\right) M_{11}^2 + 0.4 M_{11} M_{12} + 0.4 \left(1 + \frac{3}{4k_{12}}\right) M_{12}^2 \right] \quad (15)$$

一方独立のメカニズムに対する仮想仕事式は次のようになる。

$$2\text{層のパネルメカニズム} \quad \{-2.5 M_5 + M_6 + 1.6667 M_7 - 1.6667 M_8 + 2 PL\} R_2 = 0 \quad (16)$$

$$1\text{層のパネルメカニズム} \quad \{-1.6667 M_9 + 1.6667 M_{10} + 2.5 M_{11} - 2.5 M_{12} + 3 PL\} R_1 = 0 \quad (17)$$

$$\text{ジョイントメカニズム} \quad \{M_1 - 1.75 M_5 + 0.75 M_6\} \theta_1 = 0 \quad (18)$$

$$\text{ジョイントメカニズム} \quad \{-M_2 + 1.3333 M_7 - 0.3333 M_8\} \theta_2 = 0 \quad (19)$$

$$\text{ジョイントメカニズム} \quad \{1.2143 M_3 - 0.2143 M_4 - 0.75 M_5 + 1.76 M_6 - 1.3333 M_9 + 0.3333 M_{10}\} \theta_3 = 0 \quad (20)$$

$$\text{ジョイントメカニズム} \quad \{0.2143 M_3 - 1.2143 M_4 + 0.3333 M_7 - 1.3333 M_8 + 1.75 M_{11} - 0.75 M_{12}\} \theta_4 = 0 \quad (21)$$

以上の関係式から (13) 式を樹て、エネルギー汎関数 J の最小化条件 (14) 式を計算すれば、未知量 $M_1, M_2, \dots, R_1, R_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ が求められる。ところで、追跡法で崩壊解析を行う為に、第1ステップでは、(15) 式中の半固定接合部パラメータ k_i, k_j を ∞ とおき、適当な増分荷重 P の作用のもとでの応力 $M_1, M_2, \dots$ を求め、それらが降伏するに要する荷重 γP (γ = 塑性化係数) を決める。そして $M_i = M_y$ (降伏モーメント) となる部材端で $k_i \rightarrow 0$ とおき、そのときの応力と変位は $\gamma M_1, \gamma M_2, \dots, \gamma R_1, \gamma R_2, \gamma \theta_1, \gamma \theta_2, \dots$ となる。第2ステップ以後でも同様の取扱いを行えば、崩壊メカニズムと荷重 γP が決まる。最終の崩壊状態は図-9 に示されている。なお $L = 300 \text{ cm}$, $M_0 = 10^4 \text{ m}$ (全塑性モーメント), EI = 全部材一定である。

3.2 杭・地盤系の解析

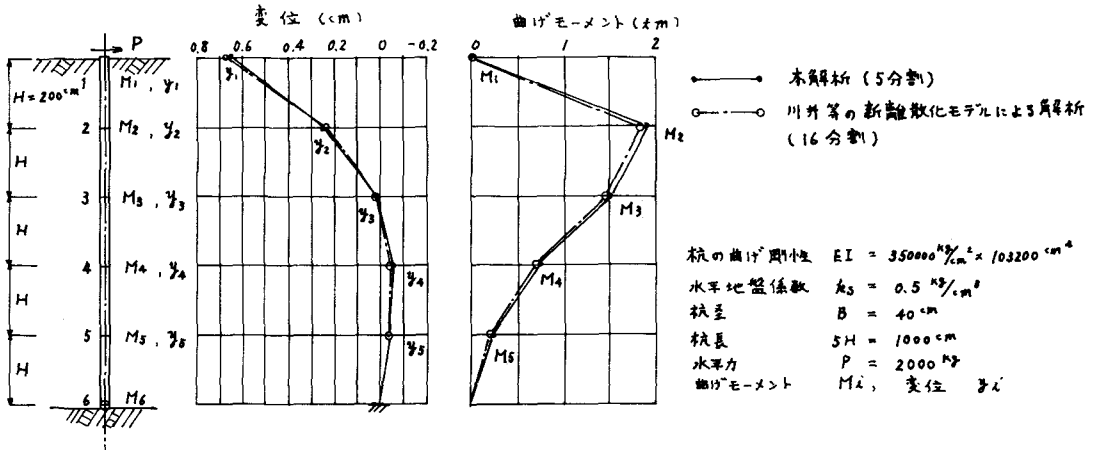


図-10 杭・地盤系モデルと解析結果

図-10 に示すような杭・地盤系モデル (杭頭自由, 杭脚ピン) に水平力 P が作用する場合、まず全歪エネルギー W は、(1) 式と (4) 式から次のようになる。

$$W = \frac{H}{6EI} [M_2^2 + (M_2^2 + M_2 M_3 + M_3^2) + (M_3^2 + M_3 M_4 + M_4^2) + (M_4^2 + M_4 M_5 + M_5^2) + M_5^2] + \frac{1}{6} k_s B H^3 [(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) + (R_2^2 + R_2 R_3 + R_3^2) + (R_3^2 + R_3 R_4 + R_4^2) + (R_4^2 + R_4 R_5 + R_5^2) + R_5^2] \quad (22)$$

ここで $R_i = Y_i/H$ である。一方独立なメカニズム (仮想変位) に対する仮想変位式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[M_2 - \frac{1}{6} k_s B H^3 (2R_1 + R_2) + P H \right] R_1 = 0 \\ & \left[-2M_2 + M_3 - \frac{1}{6} k_s B H^3 (R_1 + 4R_2 + R_3) \right] R_2 = 0 \\ & \left[M_2 - 2M_3 + M_4 - \frac{1}{6} k_s B H^3 (R_2 + 4R_3 + R_4) \right] R_3 = 0 \\ & \left[M_3 - 2M_4 + M_5 - \frac{1}{6} k_s B H^3 (R_3 + 4R_4 + R_5) \right] R_4 = 0 \\ & \left[M_4 - 2M_5 - \frac{1}{6} k_s B H^3 (R_4 + 4R_5) \right] R_5 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

以上の関係式から、(13)式を樹て、エネルギー汎関数 J の最小化条件 (14)式を計算すれば、未知量 $M_1, M_2, \dots, R_1, R_2, \dots$ が計算される。計算結果の比較の為に、所謂川井モデルの新離散化モデル⁽⁶⁾を解析モデルとし、本解析 (5分割要素) と新離散化モデルによる解析 (16分割要素) の結果を図-10に示す。これから、両者は殆んどよく一致していることがわかる。就中新離散化モデルによる解析では16分割要素、本解析が僅か5分割要素にも拘らず、変位のみならず応力でも本解析が新離散化モデルによる解析によく迫っていることがわかる。

3.3 格子梁の崩壊時変形解析

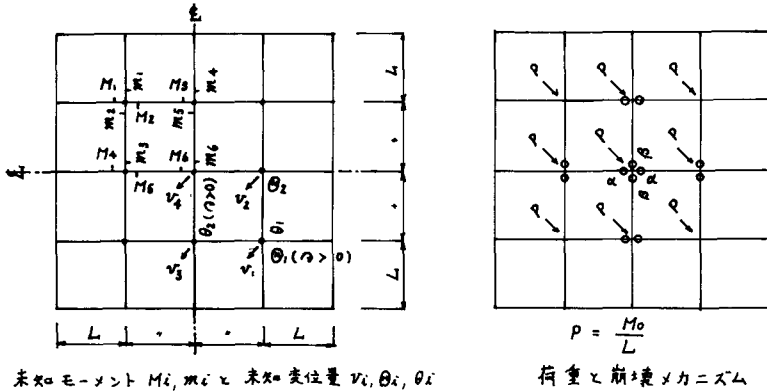


図-11 格子梁モデルと崩壊メカニズム

図-11に示すような正方形格子梁モデルの崩壊時の変形解析を行ってみる。⁽⁴⁾ まず歪エネルギー W を求めると次のようになる。但し全ての部材の曲げ剛性 $EI = \text{一定}$ 、全ての降伏モーメント $M_0 = \text{一定}$ とする。

$$W = \frac{L}{6EI} \left[4M_1^2 + 4(M_2^2 + M_2M_3 + M_3^2) + 2M_4^2 + 2(M_5^2 + M_5M_6 + M_6^2) + 4m_1^2 + 4(m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2) + 2m_4^2 + 2(m_5^2 + m_5m_6 + m_6^2) \right] \quad (24)$$

ここで、実際には $M_i = m_i$ であり、しかも交叉部では捩れ剛性を無視すれば $M_i = M_{i+1}$ 、 $m_i = m_{i+1}$ であるが、交叉部の回転角 θ_i 、 θ_i を求めるために便宜上 $M_i \neq M_{i+1}$ 、 $m_i \neq m_{i+1}$ とした。

一方独立なメカニズムに対する仮想仕事式は次のようになる。但し $R_i = v_i/L$ とする。

$$\left[M_1 + M_2 - M_3 + m_1 + m_2 - m_3 \right] R_1 = PL R_1 \quad (25)$$

$$\{-2M_2 + 2M_3 + m_4 + m_5 - m_6\} R_2 = PL R_2 \quad (26)$$

$$\{M_4 + M_5 - M_6 - 2m_2 + 2m_3\} R_3 = PL R_3 \quad (27)$$

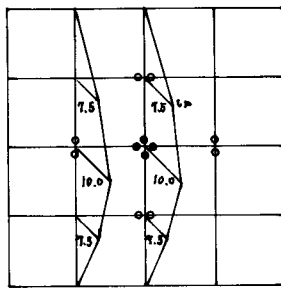
$$\{-2M_5 + 2M_6 - 2m_5 + 2m_6\} R_4 = PL R_4 \quad (28)$$

$$\{-M_1 + M_2\} \Theta_1 = 0, \{-M_4 + M_5\} \Theta_2 = 0, \{m_1 - m_2\} \Theta_1 = 0, \{m_4 - m_5\} \Theta_2 = 0 \quad (29) \sim (32)$$

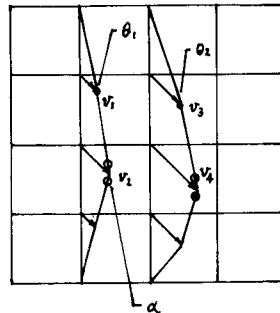
次に崩壊時に形成されているヒンジが仮定仕事式は、モーメント M_3 , m_3 に対して塑性回転角 α , β が生ずるとすれば次のようになる。

$$\{M_3 - M_0\} \alpha = 0, \{m_3 - M_0\} \beta = 0 \quad (33)$$

ゆえに (14) 式に従ってエネルギーの最小化条件から、未知のモーメント、未知の変位、回転角および塑性回転角が計算される。崩壊荷重は $P = M_0/L$ であることはリミットアナリシスから容易に求められるので、この崩壊解析ではこの P を用いる。以上から得られた解析結果を図-12に示す。



曲げモーメント (○・最終発生ヒンジ)



$$\begin{aligned} v_1 &= 3.5 \frac{L^3}{6EI} \times 10^2 \\ v_2 &= v_3 = 6.2 \frac{L^3}{6EI} \times 10^2 \\ v_4 &= 7.1 \frac{L^3}{6EI} \times 10^2 \\ \theta_1 &= 2.9 \frac{L}{6EI} \times 10^4 \\ \theta_2 &= 2.1 \frac{L}{6EI} \times 10^4 \\ \alpha &= 7.0 \frac{L}{6EI} \times 10^3 \end{aligned}$$

変形・回転角・塑性回転角

図-12 格子梁モデルと解析結果

§ 4. おわりに

仮定仕事法の原理は、力学において普遍的に應用されているが、本論では、エネルギーの最小化の爲の付帯条件に仮定仕事式をラグランジュ未定乗数の考え方として導入し、応力と変位を未知量とした混合法として解くのに特色がある。直接剛性法による変位法は勿論一般の構造解析に多大なメリットがあるが、プログラムを作成して完成させる迄の時間や労力を考えると、本論では崩壊解析を含めた多様な構造物を、誰でも単純明快な展開で、しかも容易に解けるメリットがあると思われる。

〈参考文献〉

- (1) R.K. Linsley; *Matrix Method of Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976
- (2) Donald E. Grierson
- (3) 石川 信隆他
- (4) Philip G. Hodge; *Plastic Analysis of Structures*, McGRAW-HILL, 1959
- (5) 堀江文雄・太田 勲; 鉄骨系フレームの崩壊時変形解析, 第31回応用力学連合会, 1981.11
- (6) 川村 忠男他; 新しい要素系による地盤を考慮した管組構造物の極限解析, 第27回構造工学シンポジウム, 1981.2

(※1) 大牟創業(株) 設計技術部, (※2) 大牟創業(株) 代表取締役 工博

Consideration on the Structural Analysis based on Virtual
Work's Method

T. Ohta (*1)
S. Imamura (*1)
F. Horie (*2)

In the present structural analysis we often usually use the displacement method as the direct stiffness method. The force method seems like unsuitable for the purpose of the systematically constructed analysis as compared with the displacement method. However, the force method is more powerful when the structures exist under the specially conditions, e.g., the structures subjected to thermal field, compatible fitting and having the special connections such as hinges, rollers and semi rigid devices.

This paper formulates the structural analysis method that is based on the hybrid method, i.e., the principle of this method is equivalent to the energy method which is connected constrainedly to the virtual works introduced to the individual virtual mode (individual mechanism). This method seems as unpractical at first appearance for the structural analysis, but anyone is able to try readily its applications to the complicated and the special structural models such as the collapse mechanism model, beams-soil foundation model and the framed and trussed structure model.

(*1) Department of technical division, Company of Daiko-Sogyo
(*2) President, Company of Daiko-Sogyo, Dr. Eng.