(9) 非線型弾性柱の動的安定問題における振動数条件

労働省　吉川幸雄

1. はじめに

非保存力を含めた外力を受ける構造物の安定問題を解析する動的安定判別法によって、いわゆる弾性安定問題の展望は開かれてきた。この解法は動力学的分野に威力を発揮したばかりでなく、静力学的分野の従来の不安定現象も総括的に捉えられるようになった[1]。したがって、この安定解析法は、より普遍性のある解法であるといえよう。

ここに著者は非保存力を受ける系の中で、系の材料が従来の線型弾性でなく、非線型弾性を有している場合について動的安定解析を試みていた[2]。このとき得られた結論は、線型弾性系における座屈値とは異なる臨界値が非線型弾性系では導かれるというものであった。しかもその臨界値は、線型弾性系で得られる値よりも低い値であり、安定問題において危険な要素を含む内容であった。

そこで非線型弾性柱が非保存力を受けているときの安定問題をさらに詳しく解明することにより、系の不安定状態がいかなる条件によって特徴づけられているのかを解析したのが本研究である。このような解析を試みることによって、非線型弾性系の安定・不安定を支配する関係が得られるものとすれば、この関係は対応する線型弾性系の臨界条件をも当然説明し得る内容も含むと考えられる。すなわち線型弾性の場合を特殊なときとして、より一般の非線型弾性系を支配している関係を求めんとして、本研究では系の固有振動数によって特徴づけられる臨界振動数条件式を導いた。そして適用例として、すでに従来の研究結果によって明らかにされている2自由度系に対応した第1次と第2次の固有振動数によって導かれていた臨界値について説明する。

2. 基礎式

非保存力を受ける非線型弾性柱の安定問題を解析するために、Fig.-1に与える接線方向従動力を受けるN自由度モデル柱を考える。直接に連続体について解析することは非線型系であるため数学的な煩雑さを増すだけであり、安定解析を目的にするのであれば系のもつ固有振動数を解析の対象とすればよい。そこで本解析では、この多自由度モデルにより固有振動数の調査を行なう。

Fig.-1のモデル柱において、ヒンジで結合された剛部材の共通長さをl、各集中質量を$m_1, m_2, \cdots, m_N$、各部材の回転角を$\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_N$とする。

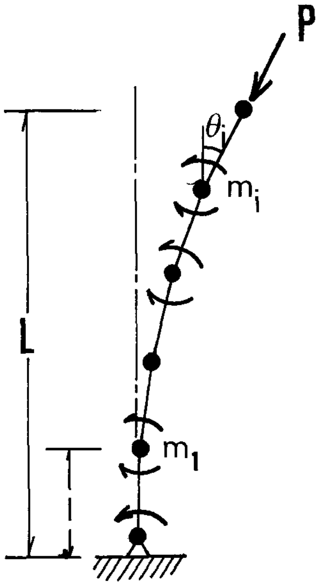

Fig.- 1

柱の非線型弾性を表現するために、復元ポテンシャルUをFig.-2に示すように、無次元の微小な相対的変位δに対して、

$$U = \frac{1}{2}c\delta^2 - \frac{1}{3}d\delta^3 - \frac{1}{4}d'\delta^4 - \cdots \qquad (1)$$

$$(c>0,\ d>0,\ d'>0,\ \cdots)$$

で導入する。この復元ポテンシャルUを有するヒンジで一連の剛部材が結合されているものとし、ここに外力Pが加われれば、柱は非線型な復元モーメントを呈することになる。ここで、cは線型バネ定数で構造部材でいう初期線型曲げ剛性EIに対応し、また$d, d', \cdots$は非線型バネ定数である。

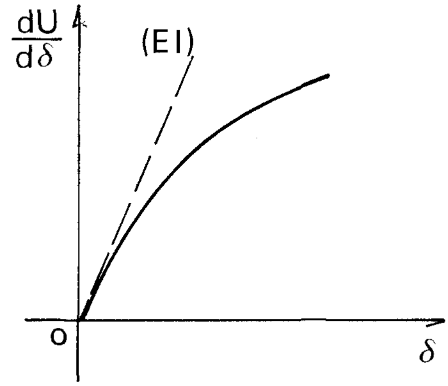

Fig.-2

この(1)で与えられる復元力を有する柱に接線方向従動力Pが作用するとき、運動方程式は相対変位δを $\delta = \vartheta_k - \vartheta_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,N;\ \vartheta_0 = 0)$として、一般に

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{m_{kj}\ddot{\vartheta}_j + a_{kj}\vartheta_j + \phi_k(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_N)\right\} = 0 \qquad (2)$$

$$(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

なるN個の式でかける。ここで左辺の$m_{kj}\vartheta_j$は慣性項を、$a_{kj}\vartheta_j$は復元力と外力による項を、そして$\phi_k(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_N)$は非線型項を表わす。また変数の上のドットは時間$t$による微分を示す。

(2)式において非線型項のないときは、線型弾性系の運動方程式に対応し、その振動数方程式は、

$$A = \left|\,(a_{kj} - \omega^2 m_{kj})\,\right| = 0 \qquad (3)$$

とかける。ここでωは線型系の固有振動数を表わし、Aはk行j列の要素が$(a_{kj} - \omega^2 m_{kj})$である行列式を表わす。この行列式において、$i$次の固有振動数$\omega = \omega_i$とおいたときに得られる行列式$A$を$A_i$とし、$k$行$j$列の余因数を$(A_i)_{kj}$とすると、係数$\alpha_{kj}$が

$$\alpha_{kj} = \frac{(A_i)_{kj}}{\sqrt{\sum_{r,s=1}^{N} m_{kj}(A_i)_{rj}(A_i)_{sj}}} \qquad (4)$$

で与えられる座標変換

$$\vartheta_k = \sum_{j=1}^{N}\alpha_{kj}\,q_j \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \qquad (5)$$

を導入すると、一般化座標ϑ_kは基準座標q_kに変換される[3]。さらに以降の解析のために無次元化して、非線型弾性パラメータ$\beta, \beta', \cdots$を

$$\beta = \frac{d}{c},\ \beta' = \frac{d'}{c},\ \beta'' = \frac{d''}{c},\ \cdots\cdots \qquad (6)$$

と定めると、運動方程式(2)は次のようになる。

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \varphi_k(q_1, q_2, \cdots, q_N) \quad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{7}$$

上式で右辺は非線型項を表わし、

$$\varphi_k(q_1, q_2, \cdots, q_N) = -\frac{\partial U'}{\partial q_k}$$

$$; U' = \frac{1}{3}\beta\sum_{i,j,k=1}^{N} B_{ijk} q_i q_j q_k + \frac{1}{4}\beta'\sum_{i,j,k,l=1}^{N} B_{ijkl} q_i q_j q_k q_l + \cdots \tag{8}$$

で与えられる。ここで U' は復元ポテンシャル U の非線型部であり、$B_{ijk}, B_{ijkl}, \cdots$ は変換(5)により得られる係数を示す。

3. 臨界振動数条件

N個の固有振動数 ω_k ($k=1, 2, \cdots, N$) と基準座標 q_k によって表現された非線型弾性柱の運動方程式(7)は、一般に非線型微分方程式となるため解を直接求めることはできない。そこで、非線型弾性度 $\beta, \beta', \cdots$ が小さいと仮定して、近似解法として非線型振動論で論じられているKrylov & Bogoliuboffによる平均化法をとり入れる。この方法は解の振幅及び位相が時間の経過に対してゆるやかに変化すると仮定できる非線型に適用して有効に解の挙動を解明することができるとされている。

そこで系の微小振動に対して、ある振動数 ω_0 近傍に自励的に発生する振動を含む励起振動数 ω があるとして、時間変数を無次元化し $\tau = \omega t$, $\omega = \omega_0(1-\lambda)$, $\gamma_k = \omega_k/\omega_0$ とおく。ここで λ は小さい量を仮定して、固有振動数にいわゆる変調を起こさせ、ω を変化し得るパラメータと考える。すると(7)式は、あらためて τ による微分をドットで表わして、

$$\ddot{q}_k + \gamma_k^2 q_k = -2\lambda\gamma_k^2 q_k + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\partial U'}{\partial q_k} \tag{9}$$

とかける。ここに上式に対して、次の形の解

$$q_k = Q_k(\tau)\sin(\gamma_k\tau + \nu_k(\tau)), \quad \dot{q}_k = \gamma_k Q_k(\tau)\cos(\gamma_k\tau + \nu_k(\tau)) \tag{10}$$

を導入して、新変数 $Q_k(\tau)$, $\nu_k(\tau)$ について解けば、解の振巾と位相が決定される。(9)式を条件とし、これを解くと、第1近似解として次式の第1変化率が求められる。ただし $\bar{q}_k = \gamma_k\tau + \nu_k(\tau)$ である。

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_k &= -\lambda\gamma_k Q_k \sin 2\bar{q}_k - \frac{1}{\gamma_k Q_k \omega_0^2}\frac{\partial U'}{\partial \bar{q}_k} \\ \dot{\nu}_k &= \lambda\gamma_k(1-\cos 2\bar{q}_i) + \frac{1}{\gamma_k Q_k \omega_0^2}\frac{\partial U'}{\partial Q_k} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ここで上式の各右辺の非線型ポテンシャル項は、係数 $B_0', B_{k_1k_2}', B_{k_1k_2k_3}'', \cdots$ を Q_k の多項式として、

$$\frac{1}{\omega_0^2}U' = \frac{1}{3}\beta\left\{B_0' + \sum_{k_1,k_2=1}^{N} B_{k_1k_2}'\sin(k_1\bar{q}_1 + k_2\bar{q}_2)\right\} + \frac{1}{4}\beta'\left\{B_0'' + \sum_{k_1,k_2,k_3}^{N} B_{k_1k_2k_3}''\sin(k_1\bar{q}_1 + k_2\bar{q}_2 + k_3\bar{q}_3)\right\} + \cdots$$

とかかれるため、一般には

$$\frac{1}{\omega_0^2}U' = B_0 + \sum_{k_1k_2\cdots k_n} B_{k_1k_2\cdots k_n} \sin(k_1\bar{q}_1 + k_2\bar{q}_2 + \cdots + k_n\bar{q}_n) \qquad (12)$$

の形になる。そこで、この変化率を積分して振巾Q_kを求めんとすれば、解の各項の分母には、$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2$, $k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+k_3\gamma_3$, ････ なる式があらわれる。このような項は内部共鳴項として性格づけられ、一般に($\gamma_k=\omega_k/\omega_0$ ゆえ)、

$$\boxed{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots \quad + k_i\omega_i = 0} \qquad (13)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

が満たされるとき、対応する項は発散項となり、振巾Q_kの安定性に寄与することとなる。

4. 安定解析

振動数条件(13)は少なくとも安定性に寄与する条件であり、整数の組

$$(k_1, k_2, \cdots, k_i) \; ; i = 1, 2, \cdots, N$$

のすべてについて系の臨界状態を与えるか否かはいえない。すなわち条件(12)は解の安定性にとって、必要条件であり、整数のある定められた組について系が不安定に入るか否かの確認のためには十分性を調べねばならない。そのため基本式(7)の周期解の安定性を条件(13)の下で検討する。

基本式(7)は、以上までの考察により

$$\ddot{q}_k = -\omega_k^2 q_k + \beta\sum_{k_i,k_j} b_{k_ik_j} q_{k_i}q_{k_j} + \beta'\sum_{k_i,k_j,k_l} b_{k_ik_jk_l} q_{k_i}q_{k_j}q_{k_l} + \cdots \qquad (14)$$

の形にかかれ、系が条件(13)を満たす内部共鳴の状態にあるときは、励起振動数ω_{k_j} ($i \neq j$)において励起モードがあったとし、初期位相ν_jを適当に選んで $q_{k_j} = Q_{k_j}\cos\omega_{k_j}\tau$ を考える。上式は、このとき $\omega_{k_j} = 2T$ とおいて、

$$\frac{d^2 q_k}{dT^2} + (\omega_k^2 - \beta b_{k_ik_j}Q_{k_j}\cos 2T - \beta'\cdots) q_k = \beta\sum b_{k_ik_i} q_{k_i}^2 + \cdots$$

となる。この式で右辺はq_{k_i}の2次以上の項となり無視すると、同次方程式

$$\frac{d^2 q_k}{dT^2} + (g_k - 2h_k\cos 2T - \cdots) q_k = 0 \qquad (15)$$

が得られ、Mathieu方程式となる。ここで

$$g_k = \left(\frac{2\omega_k}{\omega_{k_j}}\right)^2, \quad h_k = \frac{\beta Q_{k_j} b_{k_ik_j}}{2\omega_k^2} g_k, \quad \cdots\cdots \qquad (16)$$

このようにして得られた(15)については、周期解の安定性が、Mathieuの安定線図を作成することによって判定できる。すなわちモードkにおいて系が(14)で表わされるとき、内部共鳴のある条件(13)を満たす状態に陥ったとすると、他のモードk_jが励起する。この状態が引き続いて他のモードを引き起こして不安定状態にまで達するか否かは、モードkについて安定線図上において不安定領域に周期解q_kが存在するかどうかで判定できるのである。

5. 解 析 例

与えられた非線型弾性柱の安定解析を、2自由度柱を例にとって解析例を示す。かんたんのため非線型ポテンシァル U' は $\beta \neq 0$, $\beta' = \beta'' = \cdots = 0$ のときを考えて、基本式(14)は、

$$\ddot{q}_K + \omega_K^2 q_K = \beta\left(b_{K_iK_i} q_{K_i}^2 + b_{K_iK_j} q_{K_i} q_{K_j} + b_{K_jK_j} q_{K_j}^2 \right) \tag{17}$$

$$(i, j = 1, 2)$$

とかける。ここで $b_{K_iK_i}, \cdots$ は非線型項を表わす係数である。系(17)においてモード $k=1$ について、内部共鳴が起こり、条件(13)が、k_1, k_2 を整数として

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = 0 \tag{18}$$

と満たされているとき、モード $k_j = 2$ について励起 $q_{k_j} = Q_{k_j} \cos \omega_{k_j}$ が起こる。このときモード $k=1$ における(14)式は、同次方程式

$$\frac{d^2 q_1}{dT^2} + (g_1 - 2h_1 \cos 2T)\, q_1 = 0\ ;\ \omega_2 \tau = 2T,\ g_1 = \left(\frac{2\omega_1}{\omega_2}\right)^2,\ h_1 = \frac{\beta Q_2 b_{12}}{2\omega_1^2} q_1 \tag{19}$$

で近似される。そこで安定線によって、いくつかの整数の組 (k_1, k_2) に対して安定解析を試みた結果をFig.-3に示す。

1) $(n_1, n_2) = (1, 0)$ のとき
 $\omega_1^2 = 0$ より 静的不安定

2) $(n_1, n_2) = (1, -1)$ のとき
 $\omega_1^2 = \omega_2^2$ より 動的不安定

3) $(n_1, n_2) = (2, -1)$ のとき
 $4\omega_1^2 = \omega_2^2$ より動的不安定

4) $(n_1, n_2) = (3, -1)$ のとき
 条件付で動的不安定

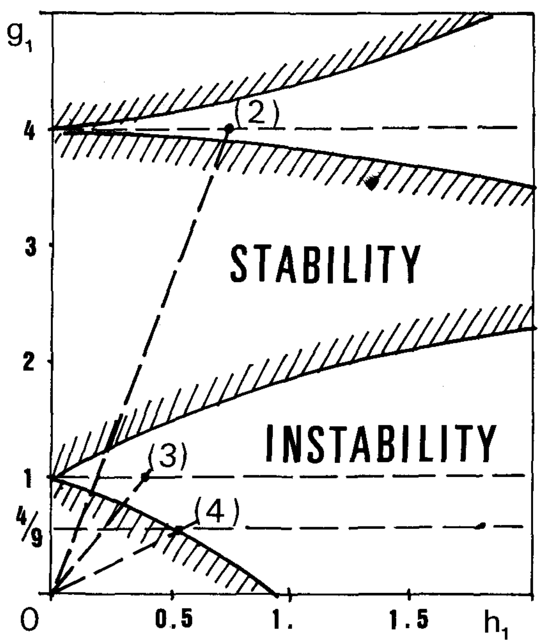

Fig.- 3

参考文献 1) V.V.Bolotin: Nonconservative Problems of the Theory of…, Pergamon Press.
H.Leipholz: Stability Theory, Academic Press, 1970
2) 吉川幸雄: 非保存力を受ける非線型弾性柱の曲げ座屈, 土木学会論文集, No318.
3) 山本敏男: 機械力学, 朝倉書店, pp142~145, 1970
4) N.N.Bogoliubov etal: Asymptotic Methods in the theory of…, Gordon etal.

Frequency Conditions on Dynamic Stability of Non-linear Elastic Systems

Yukio Yoshikawa*

It has been widely recognized that the stability of elastic systems subjected to follower forces is studied by using the kinetic criterion. Such a dynamic method is based on investigating linear small motions induced as a result of perturbations of the positions of equilibrium of systems.

There have been many studies of linear elastic systems with follower forces reported in the literature. However, very little is known about the influences of non-linear elasticity on stability of systems.

The present paper discusses the stability of systems subjected to follower forces for non-linear elastic columns. For such problems, approach to stability is made by introducing the process of averaging methods in the theory of non-linear oscillations. To investigate, furthermore, the state of equilibrium of such systems, the analysis is based on homogeneous equations of motion -"Mathieu equations"- in the vicinity of the state to be characterized.

This investigation proves that the stability of systems is ruled by frequency conditions;

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \cdots + n_n\omega_n = 0,$$

$$(n_n ;\ \text{integer})$$

and this relation is the necessary condition for the determination of critical load.

* Ministry of Labor