

## (8) 吊橋の面内振動における連成現象について

東原紘道<sup>\*</sup>  
大月哲<sup>\*\*</sup>

### 1 研究の概要

長径間吊橋の耐震設計の基礎を与える、吊橋の動的性状についての考察を行なう。吊橋は吊構造部(ケーブル、吊材および補剛トラス)および主塔から成る上部構造と、アンカースロックおよび橋脚から成る下部構造によって構成される、自由度の高い構造物である。のみならず、これらの部分構造は截然と区別される異質な構造特性を有しており、かつこれらは比較的に弱く結合されている。このような1つの総合体である吊橋は種々の型の運動をするが、地震時の挙動のうちで構造力学上最も重要と考えられるものは、橋軸方向の水平地震動に由るものである。従来の研究も重点的にこの問題に取り組んでいる。<sup>(1), (2)</sup> 本論文も同様に橋軸方向の水平地震動のもとでの振動を対象とする。

この場合、吊橋は橋軸を含む鉛直面内で振動する。もちろん話は微小変形の枠内に限られており、ケーブルの運動の非線形効果による面外励振を考える余地はない。

一般に多自由度系構造物の振動問題で最大の注意が拂われるのは、動的相互作用=共振の発生の可能性である。しかし通常の吊橋に対しては、上に列挙した部分構造の間の動的相互作用は無視できるとの著之がほぼ確立されている。例えば青柳の計算例によると、中央支間1100mの吊橋に對して、次のような結果が得られている。<sup>(2)</sup>

(1) 全体系の10次以下の低次モードはすべて吊構造部のモードであって、特にその基底モードの固有周期は8.8秒にも達する。

(2) 主塔の1次モードは1.1秒の固有周期をもつ。この近傍に固有周期を有する吊構造部のモードは、中央径間で6節点、側径間で3節点という高次波形のものである。

また主塔の2次モードの固有周期は0.35秒程度である。

(3) アンカースロックの1次モードは0.76秒の固有周期を有する。

したがって、これら主要部分構造の間では、低次モードにおいて共振が生じることではなく、上述のような、部分構造の間の動的相互作用を無視する近似が、正当化されうる。

このような安定な現象の解析は一面で、意外性のない、退屈なものもある。実際このように場合に、吊橋の振動にモード分解を施し、また入力地震動をスペクトル表示して応答を求めると、その作業は、多くの成分に纏かに分散した寄与分の集計に帰着する。設計者の目の前にあるのは、膨大な量の、しかも緩慢な変化しか認められないデータの奔流であって、最後に各種の応答量が打ち出されてくるわけである。そこにはいづれかの振動が特別の重要性をもつて立ち現れるということはない。

もとよりこのような平穏な状態はあくまで假定されたものであって、吊橋も、他の多くの多自由

\* 埼玉大学工学部建設工学科

\*\* (株)長大橋設計センター

度系構造物と同様に、内部共振の可能性を潜在的に有している。そして条件次第では共振が生じ、応答計算過程の数字の流れには一転して跳躍が現れて、同時に単純な力学的な相が浮かび上がっていくものである。このような理論的可能性のうちでも実際上の意義を強くもつものは、アンカースロックによって実現されうる。すなわち、上部構造の諸元は、橋梁のスケールに応じて、ほぼ定まっていて、このためその固有周期もほぼ確定するのに対して、アンカースロックの固有周期は、その諸元および周辺地盤の状況に応じて、広範囲に変化し、静的には等しく妥当な設計でありながら、しかもなお動的性質には大きな差異が生じうるのである。

例えば、前述の青柳モデルのアンカースロックは、海中の設置を想定して著しく縦長型を呈しているが、これが陸上に設置される場合には、より安定した形状を与えることができ、それに伴って、その1次固有周期も短縮する。その結果、このアンカースロックの1次固有周期は主塔の2次固有周期と接近する可能性がある。この場合には固有周期の短縮に伴い応答倍率がざつと半分程度になると期待できるので、変位応答は小さいであろうが、モード波形の曲率が大きいため、部材力（特に主塔の曲げモーメント）は大きくなる可能性があり、さらには速度もしくは加速度の応答も大きい可能性がある。

逆にアンカースロックの固有周期の増大も考えられる。実測例を検討すると、海中の地盤の剛性は $1 \cdot 0 \times 10^5$  (ton/m<sup>2</sup>)程度ということがありうる。<sup>3)</sup> この条件を青柳モデルが採用している寸法の直方体アンカースロックにあてはめると、アンカースロックのロッキングに対する地盤のはね強さは、青柳モデルの1/4程度に低下してしまう（青柳モデルは、アンカースロックの重心高さが高さの1/4ということから窺えるように、地盤強さが非常に大きいだけでなく、アンカースロックの形状も、直方体とはよほど違った、安定な構造を想定していると言えよう）。そうするとアンカースロックの1次固有周期は1.2秒程度に達し、主塔の基底モードの固有周期にほぼ一致してしまう。

青柳モデルの例を含めて、長径間吊橋のアンカースロックの固有周期は、主塔の1次ヒ2次の固有周期の中間に位置するのが通例であるが、上述のように、アンカースロックの固有周期がシフトして（後述するように、吊橋の各部分構造の相互作用が弱いため、アンカースロックの固有周期の変化がもたらす主塔の固有周期の変化は微小である）、主塔のいずれかの固有周期ヒ一致することは不可能とは言えない。しかもこのような固有周期の一致が生じるとき、主塔が入力地震動に激しく応答することが後の解析で示される。この種の動的カップリングは、ひとたび生じると致命的な影響を及ぼす例が多いので、その可能性を合理的に消去できるまで、設計の1つの限界状態を画するものとして、詳細に分析することが極要である。のみならず、吊橋の部分構造相互の連成関係の考察は、実用上の価値とは別に、言わばM. Weberの理念型として、吊橋が潜在的に有しているタイナミックスの理解に有用であり、ひいては前述したモード分析過程を流れるデータの洪水をよく統御しうるEngineering Senseの理論的基礎を与えるものである。

上述のように、アンカープロックヒ主塔の連成には2つの型が存在しうるが、本論文では専ら第2の型について論じる。これは第2の型の影響の方が重大と予想されること、また第1の型ではケーブルの水平運動が不可欠の役割を担って関与するのに対し、第2の型ではケーブルは単に力を伝達するに留まるので、考察が簡明なことによる。

## 2 解析モデル

吊橋の運動方程式を線型の範囲で評価する。まず上部構造に対しても

- (1) ケーブル水平張力の、振動に伴なう変動量は、死荷重時のそれに比して無視する。
- (2) 吊材の伸びを無視する。
- (3) 吊材の傾斜に伴なう水平力の伝達を無視する。
- (4) (1) に呼応して、主塔の鉛直方向伸縮を無視する。

下部構造に対しても、

- (5) アンカースロックおよび橋脚を剛体と見なす。
- (6) 地盤反力は線型とし、さらに適当なばねで置換する。

このとく、各下部構造の復元力は、或る点のまわりの回転およびその点の水平運動に対する2つのばねに集約される。さらに現実の設計を考慮して、

- (7) 中央径間にセンタータイを設ける。
- (8) 死荷重時において、主塔が1次モードでほぼ座屈するような諸元を与える。

計算上の便宜を考えて、次のような近似をする。

- (9) 死荷重強度は各径間毎に一定である。
- (10) 各径間で吊材間隔は一定である。
- (11) ~~補剛~~トラスの断面剛性は、吊材取付点でのみ変化する。
- (12) 主塔断面剛性は区分的に一定で、後に定義する質量点でのみ変化する。

運動方程式を求める作業の中核は、然るべく賦与された質量点の集合に対する変位と荷重の関係である。これを実行する最も定石的な方法は、変位法に基づき、ポテンシャルエネルギーの計算を介して、剛性行列を定めるものであろう。<sup>4)</sup>しかし当面の問題に限って言えば、この方法はいくぶん機械的に実行できるといふこと以外に利点がない。多くの骨組構造で効果を発揮する剛性行列のバンド性も、吊橋の場合にはきわめて弱い。

吊橋の構造の特徴は、部分構造への分解が自然になされ、しかもそれらを結ぶ境界点がごく少ないことである。このような構造には部分構造法が適合している。これに依れば、吊橋の力学的諸量の計算プログラムを大巾にコンパクトにできるばかりでなく、結果の解釈および検証に便利である。そしてこの部分構造法には、応力法—柔性行列による定式化の方が適している。部分構造への分割例を図1に示す。

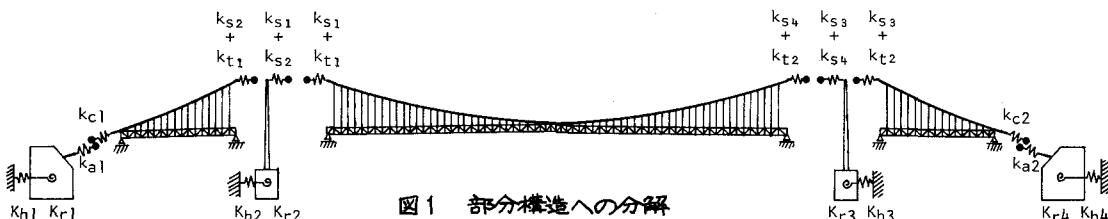


図1 部分構造への分解

すなわち1つの部分構造に着目すると、残余の全部分構造は、境界点を介して作用するばねに等価になる。このときの換算ばね(小文字のk)は、以下の手順に従って、各部分構造のみの解析に

よって順次求められる。

- ① アンカースロックの解析によって  $k_{c1}, k_{c2}$  を定める。
- ② 主塔および橋脚の解析によって  $k_{t1}, k_{t2}$  を定める。
- ③ 側径間の吊構造部の解析によって  $k_{s1}, k_{s2}$  を定める。
- ④ 中央径間の吊構造部の解析によって  $k_{s2}, k_{s3}$  を定める。
- ⑤ 再び側径間の吊構造部の解析によって  $k_{a1}, k_{a2}$  を定める。

これで吊橋は、それぞれの境界点に既知の強さのはねをもった部分構造に分解された。そこであらためて次のような荷重に対する変形を計算すればよい。計算は ①—⑤ と ⑥—⑩ の 2 系列から成るが、スロクリームは共通であることに注意されたい。

- ⑥ 補剛トラスに作用する鉛直荷重
- ⑦ ケーブルおよび中央径間の補剛トラスに作用する水平荷重
- ⑧ 主塔および橋脚に作用する水平荷重
- ⑨ アンカースロックに作用する水平荷重
- ⑩ アンカースロックおよび橋脚に作用するトルク

以上の計算によって行列  $[K]$  が決定される。同時に、各下部構造の基礎に単位の水平変位を与えた場合の各質量点の変位  $\{g_i\}$  ( $i = 1 \sim 4$  は下部構造の番号) も算定される。

換算ばねの強さ [ $t/m$ ] のオーダーは、 $k_a = O(10^6)$ ,  $k_s = O(10^4)$ ,  $k_c = O(10^3)$ 、また前述のとおり主塔がほぼ座屈しているので、 $k_t \approx 0$  であり、主塔の水平変位に対する抵抗は主に  $k_s$  によって担当される。 $k_a$  が大きいので、多くの現象では  $k_a = \infty$  の近似が成り立つ。逆に  $K_{h1}, K_{r1} \gg k_c$  であるので、アンカースロックの変位に及ぼす他の部分構造の影響はしばしば無視される。

慣性力の導入は Lumped mass 法による。質量点の自由度を選択的に与え、図 2 のように配する。このとき

- (1) 前述の仮定 (2) の故に、ケーブルの鉛直変位は補剛トラスのそれに等しいので、前者の質量を後者の質量に吸収させる。
- (2) 同じく仮定 (7) の故に、中央径間の補剛トラスは橋軸方向の振動をするので、そのための自由度を賦与する。

この計算によって質量行列  $[M]$  が決定される。こうして運動方程式 (1) が求められる。

$$\{\ddot{u}\} = [K]^{-1} (-[M]\{\ddot{u}\}) + \sum \{g_i\} z_i \quad (1)$$

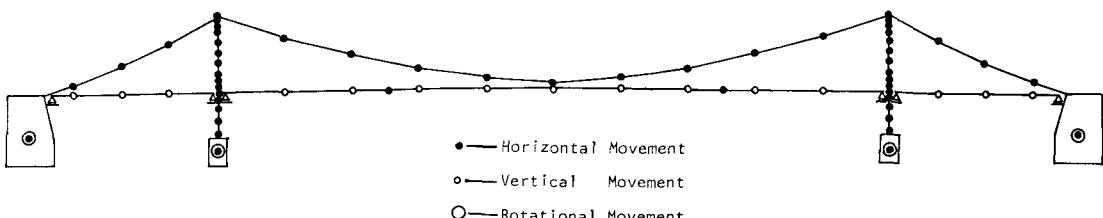


図2 質量点

### 3 モード分析

固有値問題を解いてモード  $[\Phi]$  を決定する。

$${}^t[\Phi][M][\Phi]=[I], \quad {}^t[\Phi][K][\Phi]=[Q]=\begin{bmatrix} & \\ & \omega_r^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\{u\}=\{v\}+\sum\{q_i\}z_i$  とおく。いま  $z_i \propto e^{i\omega_r t}$  とすると

$$\{v\}=[S(\omega_r)z_i](\{\phi_r\}, \{q_i\})\{\phi_r\}e^{\pm i\omega_r t} \quad (3)$$

実際の入力地動  $v$  は非常に複雑であって、 $\{u\}$  もしくは  $\{v\}$  の応答値の計算は膨大な集計を伴うが、内部共振が存在する場合には、その現象に焦点を絞ればよいので、現象はかえって単純になり、見通しがよくなる。特に変位応答の共振現象は、適当なベクトル空間における、静的応答ベクトル  $\{q_r\}$  から、固有ベクトル  $\{\phi_r\}$  を媒介とする、着目部分構造系への2段階射影と解釈されうるので、理解が楽である。<sup>5)</sup>

変位以外の応答量は、適当な行列  $[Q]$  によって、式(3)から計算される。

$$\{q\}=[S(\omega_r)z_i](\{\phi_r\}, \{q_i\})[Q]\{\phi_r\}e^{\pm i\omega_r t} \quad (4)$$

### 4 応答の計算

応答解析の実行に先立って、図3に示すとおりの系統的な構造系に対してモードの比較検討を行なう。これらのモデルの中には、先行の研究で使用されたモデルが含まれており、それらの結果との照合が意図されている。すなわちモデル A<sub>2</sub> は小西らによるものであり、同じく A<sub>3</sub> は青柳によるものである。以下で考察する本論文の応答計算は B<sub>3</sub> 型による。B 系列のモデルは、それぞれ対応する A 系列のモデルのケーブルおよび中央径間の補剛トラスに水平運動の自由度を賦与したものである(図2参照)。

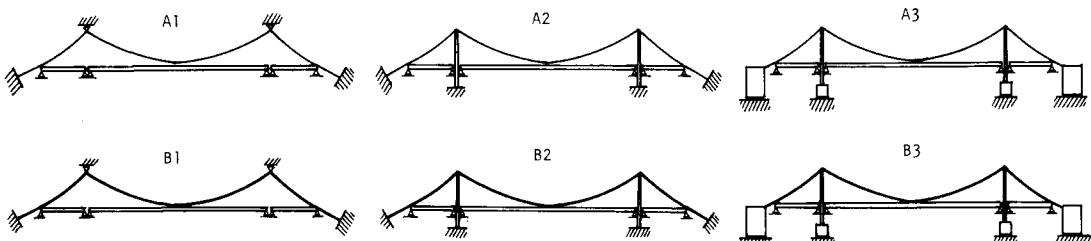


図3 モデルの比較(ケーブルの太線は質量点の存在を示す)

系列 1 → 2 → 3 に従って逐次添加される部分構造の振動が支配的なモードは、単純に重ね合せられるだけで、以前から存在しているモードは、新規の部分構造の影響をほとんど受けない。これは部分構造の相互作用の弱さの表現でもあるが、下部構造の自由度が小さいこと、自由度の大きい上部の各部分構造の固有周期帯にずれがあること、そしてこれらの部分構造の結合が著しく弱いことから説明される。この相互作用の弱さは吊橋の連成問題を容易にする。

径間長  $250 + 1000 + 250$  [m] の3径間単純支持吊橋の応答解析の結果の1例を表1に示す。

Periodは固有周期[秒], Structureはそのモードへの寄与の支配的な部分構造を示し, s(吊構造部の鉛直振動), t(補剛トラスの橋軸方向振動), c(ケーブルの橋軸方向振動), T(主塔の曲げ振動), A(アンカーフロックの2自由度振動), P(橋脚の2自由度振動)などを含む。現実を考慮して、下部構造は非対称になつてあり、さらに橋脚の非対称性は主塔の非対称性をもたらしていくので、L, Rで左右を区別する。M.S.F.=Modal Split Functionは着目しようとする右アンカーフロックに対する式(3)の内積項である。Dは最大変位であり、Mは最大曲げモーメントである。

表1の例は、主塔と下部構造が共振しない標準的なもので、モードの分布状況をよく表わしている。図2で見られるように、70のモードが存在し、そのうちの低次の30個を取り出したものであるが、上部構造では、まずsが現われ、全体系の10次以降にTが続き、最後にcが20次以降に登場する。既に1でも一般的に述べたとおり、下部構造の1次モードは、主塔の1次と2次のモードの中間に位置している。

次に右アンカーフロックの地盤のばね強さを変更して、その固

有周期を主塔に近づけた場合の計算結果である。表1からも判るように、右主塔の固有周期の方が短かく、それだけ共振条件を成立させやすいと言えるが、1で指摘したように、左主塔との共振も可能である。前頁で述べたとおり、右アンカーフロックの条件の変更があつても、そのモードのみが移動するだけで、他の部分構造はほとんど影響を受けない。

表1 モード分析結果

Period	Structure	M.S.F.	D <sub>side</sub>	D <sub>center</sub>	D <sub>tower</sub>	M <sub>side</sub>	M <sub>center</sub>	M <sub>tower</sub>
8.79	s	8.4	0.7	27.9	0.2	15	175	7
6.06	s	48.1	10.1	39.3	2.9	218	287	103
4.61	s	26.5	14.7	31.2	3.4	325	425	131
3.60	s	6.4	38.6	5.3	5.7	882	90	248
3.39	s	0.5	3.9	28.2	0.5	90	810	21
2.92	s	28.0	36.3	15.5	1.4	874	315	69
2.41	s	7.1	5.0	31.5	0.6	129	1448	35
1.94	t, s	20.5	9.8	23.5	3.7	285	1122	327
1.78	t, s	16.2	6.8	25.8	3.6	213	1782	389
1.46	s	1.1	0.4	28.2	0.5	14	3061	80
1.41	t	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
1.22	s	0.6	0.3	28.6	5.2	18	3907	1137
1.21	TL	1.2	2.4	2.7	69.4	145	322	15240
1.1420	s	1.0	23.9	0.1	1.0	2537	20	248
1.1419	s	0.2	49.2	0.2	1.4	5226	15	324
1.08	s	0.4	0.1	30.4	0.2	5	4990	39
1.04	TR	13.5	0.7	0.7	1.4	46	73	347
0.83	AL, PL	45.8	1.5	1.7	18.8	170	221	5136
0.81	AL, PL	29.0	1.1	0.6	30.4	75	61	11474
0.79	AR	208.4	1.4	1.4	3.4	119	173	1377
0.74	c, t, AR, AL	86.0	3.5	3.9	11.9	365	464	4452
0.61	PR	2.2	0.2	0.4	1.1	37	83	289
0.58	t	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
0.57	t	5.4	3.8	1.5	10.0	919	182	2585
0.5526	s	0.7	36.9	0.1	0.7	9954	15	187
0.5525	s	1.3	41.0	0.2	0.6	11030	33	165
0.42	c, TRL	6.9	1.4	2.7	38.6	844	992	20990
0.36	c, TRL	5.1	2.6	2.6	47.2	1041	1076	36674
0.3454	s	0.0	54.9	0.0	4.5	28844	7	3689
0.3453	s	0.4	2.8	0.2	2.7	1466	83	2245

表2では、13次および14次のモードにおいて、右アンカーブロックと左主塔の振動が同調しているのが認められる。但しM.S.F.は14次の方が3倍ちかくあり、逆にD<sub>tower</sub>は13次の方がやはり3倍ちかくあり、完全な共振状態ではないが、その違いは本質的でない。絶対的な応答量は、式(3)により、M.S.F.とDもしくはMとの積で与えられるので、これら2つの達成モードの卓越は圧倒的である。

吊橋全体としての応答には、入力地動の性状、減衰の強さおよび各下部構造への入力波動の位相の関係が複雑に関与する。また応答値にはすべての下部構造からの入力が寄与するので、左主塔の応答に対する上記の共振の効果は、云わば稀釈されるのであるが、それでも表2の場合の左主塔の曲げモーメントは、感度分析のいずれのケースにおいても、表1の場合をほぼ50パーセントも超過するものであった。或はこの数字も設計不可能ではないかも知れない。しかし何よりも、アンカーブロックに十分安定な諸元を与えて、さらに振動観測などによって、その固有周期の不確定性を狭め、以て上述の達成の可能性を除去することが極要であろう。

#### 参考文献

- 1) 小西一郎・山田・高岡：長大吊橋の地震応答と耐震設計法に関する研究、土論159, 1968
- 2) 青柳史郎：地震動の位相差を考慮した長大吊橋の地震応答について、土論190, 1971
- 3) 土木学会：本州四国連絡橋の耐震、地盤に関する調査報告書、1980
- 4) Abdel-Ghaffar,A.M. and Housner,G.W.: Vibrations in Suspension Bridges, Proc.6th WCEE, 1977, Vol.11, 3-303
- 5) 東原・大月：橋軸方向地動のもとでの吊橋の振動、土論(投稿中)

表2 モード分析結果(共振時)

Period	Structure	M.S.F.	D <sub>side</sub>	D <sub>center</sub>	D <sub>tower</sub>	M <sub>side</sub>	M <sub>center</sub>	M <sub>tower</sub>
8.79	s	8.6	0.7	27.9	0.2	15	175	7
6.06	s	49.6	10.1	39.3	2.8	218	286	102
4.62	s	27.9	14.7	31.2	3.4	323	426	130
3.60	s	7.0	38.6	5.3	5.7	883	90	248
3.39	s	0.6	3.9	28.2	0.5	90	810	21
2.92	s	32.1	36.3	15.4	1.4	872	312	70
2.41	s	8.7	5.0	31.5	0.6	126	1448	34
1.95	t,s	29.5	10.1	23.2	3.8	293	1091	333
1.78	t,s	24.7	6.8	26.0	3.5	210	1802	381
1.46	s	2.7	0.4	28.2	0.5	14	3062	80
1.40	t	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
1.22	s	17.9	0.4	28.6	6.6	23	3889	1433
1.214	TL, AR	73.1	2.4	3.8	64.7	132	486	14198
1.207	TL, AR	200.8	0.4	2.5	24.8	25	238	5477
1.14195	s	4.8	29.2	0.1	1.1	3104	14	265
1.14187	s	1.6	46.3	0.2	1.3	4911	14	300
1.08	s	0.8	0.1	30.4	0.2	5	4991	42
1.04	TR	19.8	0.6	0.7	1.4	39	67	293
0.83	AL,PL	5.6	1.3	2.1	20.1	157	219	5718
0.81	AL,PL	1.5	1.3	0.6	29.4	84	64	11118
0.75	c,t, AL	8.7	3.8	4.2	12.3	388	501	4839
0.61	PR	0.7	0.2	0.4	1.2	37	84	291
0.58	t	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
0.57	t	2.2	3.8	1.5	10.0	917	182	2582
0.5526	s	0.3	36.8	0.1	0.7	9913	15	187
0.5525	s	0.6	41.2	0.2	0.6	11068	33	163
0.42	c,TRL	5.1	3.0	2.8	38.8	849	992	21104
0.36	c,TRL	6.0	2.6	2.6	47.2	1038	1080	36635
0.3454	s	0.0	54.9	0.0	4.5	28844	7	3689
0.3453	s	0.7	2.8	0.2	2.8	1466	84	2278

Dynamical Coupling of Substructures of Suspension Bridges  
in their In-Plane Vibrations

H. Higashihara\*  
S. Ohtsuki \*

Suspension bridges consist of various substructures which have different dynamical characteristics, and there are many types of dynamical interactions. Most suspension bridges are designed, however, under the assumption that these interactions can practically be neglected. This convention is ordinarily well justified by the fact that the ranges of eigenfrequencies of the major substructures of suspension bridges are usually so distant enough that dynamical coupling among them cannot but occur at higher modes of vibration which are not fatal in general.

Unfortunately this is not always true. Under extreme and yet practical conditions, eigenfrequencies of fundamental modes of some substructures can come close. Especially, towers and anchor blocks have this sort of opportunity. In usual cases, the lowest eigenfrequencies of the latter are situated between the lowest and the next ones of the former. However, this order is not always definite, because of the sensitiveness of the dynamic characteristics of the anchor blocks to the site conditions.

First, dimensions of the anchor blocks are widely changeable. For example, they are very tall when they are located in the sea. Second, the stiffness of the foundation of the anchor blocks are generally far more variable. Therefore, the anchor blocks have a wide range of eigenfrequencies, and, in extreme cases, they come up to either of the first two eigenfrequencies of the towers. All the worse, there usually remains a gross error about the stiffness of the foundation even if it has been estimated carefully by locus in quo measurement. Engineers must therefore take the possibility of the dynamic coupling into consideration, if there is not enough distance between the eigenfrequencies.

In this paper, the properties of the dynamic coupling between the lowest modes of the towers and the anchor blocks are investigated. Conventional modal analysis is applied and, after some sensitivity analysis, a coupling mode is identified and discussed. Serious influence on the bending moment of the towers is demonstrated.

Study of these dynamical interaction requires a variety of sensitivity analysis. This is only feasible if a fast computation program is available. A special program was developed for this study. This program, based on the idea of the substructure decomposition associated with the flexibility matrix methods, carries the total process of analysis very quickly. Basic strategy of this method is also presented.

\* Saitama University, Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering  
\* Long Span Bridge Consultants, Inc.