

(7) 薄肉らせんばりの近似理論に関する考察

○ 柿山裕之* 平嶋政治** 依田照彦**

1. 序

近年、都市部においては立地条件の制約等から、円弧ばりやらせんばりといった構造物が造られるようになってきた。これらの構造物の挙動を把握すべく、一次元棒理論に基づく理論が、薄肉円弧ばりに関しては、開断面・閉断面を包括する形で西野・深沢¹⁾により、また、曲率および捩率の一定な薄肉空間曲線ばりに関しては、平嶋・恵谷²⁾によりたてられている。しかし、これらの理論における平衡方程式は、一次元解析にも拘わらず複雑であり、設計にそのまま用いるのは困難である。

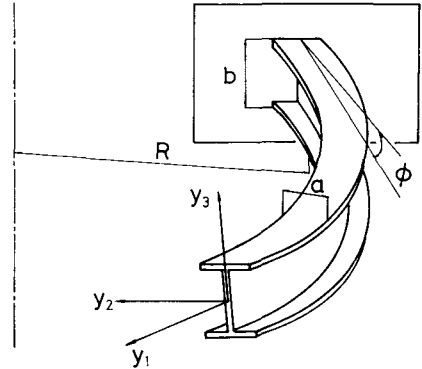


図1. 全体図、および、座標系

実際の設計においては、円弧ばりは直線部材の集合とみなし、また、通常のかせんばりでは捩率が小さい

との理由から、円弧ばりとみなして設計されている。薄肉円弧ばりにおける折れ線近似の妥当性については、これまでいくつかの研究^{3)~6)}が見受けられるが、薄肉らせんばりの折れ線近似の妥当性に関する報告は、薄肉らせんばりの平衡方程式の解を得るのが煩雑であるためか、ほとんど見受けられない。

本報告では、まず、薄肉らせんばりの平衡方程式である連立定数係数微分方程式の特性根を代数方程式の根としてではなく、固有値問題の固有値として求め、さらに固有ベクトルを用いて係数間の関係式を求めることにより、平衡方程式の解を算出した⁷⁾。次に、得られた解をもとに、変形の幾何量・断面力・応力を求め、薄肉らせんばりに対する折れ線近似の妥当性について調べた。

2. 薄肉らせんばりの平衡方程式の解

本報告では、平嶋・恵谷の研究²⁾における平衡方程式を用いて、薄肉らせんばりの変位・断面力・応力を求めた。 y_3 - y_1 平面内の棒軸の曲率 κ_2 を零とした。薄肉らせんばりの平衡方程式は以下のようになる²⁾。

$$N_{,1} + \kappa_3 M_{3,1} + \kappa_1 \kappa_3 M_2 = -\delta_1 - \kappa_3 m_3 \quad (1 \cdot a)$$

$$M_{3,1} + \kappa^2 M_3 + 2\kappa M_{2,1} + \kappa \kappa_3 M_1 - \kappa_3 N = \delta_2 - m_{3,1} - \kappa m_2 \quad (1 \cdot b)$$

$$M_{2,11} + \kappa^2 M_2 - 2\kappa M_{3,1} + \kappa_3 M_{1,1} = -\delta_3 - m_{2,1} + \kappa m_3 \quad (1 \cdot c)$$

* 早稲田大学大学院

** 早稲田大学理工学部

$$M_{1,1} - R_3 M_2 = -m_1 \quad (1 \cdot d)$$

ここに、 N : 軸力, M_k : y_k 軸まわりのモーメント ($k = 1, 2, 3$),

q_k : 作用線が y_k 軸に一致している分布荷重 ($k = 1, 2, 3$),

m_k : y_k 軸まわりの分布モーメント荷重 ($k = 1, 2, 3$),

R_3 : $y_2 - y_1$ 平面内の棒軸の曲率、すなわち、 $R_3 = \cos^2 \phi / R$,

r : 棒軸の振率、すなわち、 $r = \sin \phi \cdot \cos \phi / R$, ϕ : 薄肉らせんばりのピッチ角,

R : 薄肉らせんばりの平面曲線半径, y_k : 局所デカルト座標系 ($k = 1, 2, 3$),

$(\cdot)_{,1}$: 棒軸方向座標 θ^1 に関する微分

である。通常の構造物においては、棒軸の振率 r は小さく、薄肉らせんばり特有の断面定数の影響は小さいとみなせる⁸⁾ので、これらを含んだ項を零とすると、断面力は以下のように表わされる。

$$N = EA\varepsilon - EJ_{y_2} X_3 + EJ_{y_3} X_2 \quad (2 \cdot a)$$

$$M_2 = EJ_{y_3} \varepsilon - EJ_{y_2 y_3} X_3 + EJ_{y_3 y_3} X_2 + EJ_{\omega y_3} X_{1,1} \quad (2 \cdot b)$$

$$M_3 = -EJ_{y_2} \varepsilon + EJ_{y_2 y_2} X_3 - EJ_{y_2 y_3} X_2 - EJ_{\omega y_2} X_{1,1} \quad (2 \cdot c)$$

$$M_{\omega} = EJ_{\omega y_2} X_3 - EJ_{\omega y_3} X_2 - EJ_{\omega \omega} X_{1,1} \quad (2 \cdot d)$$

$$T = GJ_{TD} X_1 \quad (2 \cdot e)$$

$$M_1 = M_{\omega,1} + T \quad (2 \cdot f)$$

$$Q_2 = -M_{3,1} - r M_2 \quad (2 \cdot g)$$

$$Q_3 = M_{2,1} - r M_3 + R_3 M_1 \quad (2 \cdot h)$$

ここに、 M_{ω} : バイモーメント,

T : St. Venant のねじりモーメント,

Q_k : y_k 軸方向せん断力 ($k = 2, 3$),

E : 弾性定数

A : 等価断面積,

G : せん断弾性定数

J_{y_k} : 等価断面一次モーメント ($k = 2, 3$),

$J_{y_k y_l}$: 等価断面二次モーメント ($k = 2, 3$),

$J_{y_2 y_3}$: 等価断面相乗モーメント,

$J_{\omega y_k}$: そり相乗モーメント ($k = 2, 3$), $J_{\omega \omega}$: 曲げねじり定数,

J_{TD} : St. Venant のねじり定数, ε : 棒軸の伸びひずみ,

X_k : 棒軸の y_k 軸まわりの回転率 ($k = 2, 3$),

である。また、垂直応力 σ^{11} は、次のように書ける。

$$\sigma^{11} = \frac{1}{1 - R_3 y_2} (1 - y_2 X_3 + y_3 X_2 + \omega X_{1,1}) \quad (3)$$

ここに、 ω は、断面内の注目する点に関する扇形面積である。さらに、変形の幾何量は独立な変位を用いて以下のように表わされる。

$$\varepsilon = u^1_{,1} - R_3 u^2 \quad x_1 = \vartheta_{,1} - R_3 \vartheta \quad (4 \cdot a, b)$$

$$x_2 = \varphi_{,1} - r \psi + R_3 \vartheta \quad x_3 = \psi_{,1} + r \varphi \quad (4 \cdot c, d)$$

$$\varphi = -u^3_{,1} + r u^2 \quad \psi = u^2_{,1} + R_3 u^1 - r u^3 \quad (4 \cdot e, f)$$

ここに、 φ : y_2 軸まわりの回転角,

ψ : y_3 軸まわりの回転角,

u^k : y_k 軸方向変位 ($k = 1, 2, 3$),

ϑ : y_1 軸まわりの回転角

である。

分布荷重の作用しない場合を対象とし、平衡方程式(1)・断面力-変位関係(2)から断面力を消去すると、独立な変位成分(u^1, u^2, u^3, ϑ)表示の薄肉らせんばりの平衡方程式は次のようになる。

$$a_1 u^1_{,11} + a_2 u^1_{,1} + a_3 u^1 + a_4 u^2_{,111} + a_5 u^2_{,11} + a_6 u^2_{,1} + a_7 u^2 + a_8 u^3_{,111} + a_9 u^3_{,11} + a_{10} u^3_{,1} + a_{11} u^3 + a_{12} \vartheta_{,111} + a_{13} \vartheta_{,11} + a_{14} \vartheta_{,1} + a_{15} \vartheta = 0 \quad (5 \cdot a)$$

$$b_1 u^1_{,111} + b_2 u^1_{,11} + b_3 u^1_{,1} + b_4 u^1 + b_5 u^2_{,1111} + b_6 u^2_{,111} + b_7 u^2_{,11} + b_8 u^2_{,1} + b_9 u^2 + b_{10} u^3_{,1111} + b_{11} u^3_{,111} + b_{12} u^3_{,11} + b_{13} u^3_{,1} + b_{14} u^3 + b_{15} \vartheta_{,1111} + b_{16} \vartheta_{,111} + b_{17} \vartheta_{,11} + b_{18} \vartheta_{,1} + b_{19} \vartheta = 0 \quad (5 \cdot b)$$

$$c_1 u^1_{,111} + c_2 u^1_{,11} + c_3 u^1_{,1} + c_4 u^1 + c_5 u^2_{,1111} + c_6 u^2_{,111} + c_7 u^2_{,11} + c_8 u^2_{,1} + c_9 u^2 + c_{10} u^3_{,1111} + c_{11} u^3_{,111} + c_{12} u^3_{,11} + c_{13} u^3_{,1} + c_{14} u^3 + c_{15} \vartheta_{,1111} + c_{16} \vartheta_{,111} + c_{17} \vartheta_{,11} + c_{18} \vartheta_{,1} + c_{19} \vartheta = 0 \quad (5 \cdot c)$$

$$d_1 u^1_{,111} + d_2 u^1_{,11} + d_3 u^1_{,1} + d_4 u^1 + d_5 u^2_{,1111} + d_6 u^2_{,111} + d_7 u^2_{,11} + d_8 u^2_{,1} + d_9 u^2 + d_{10} u^3_{,1111} + d_{11} u^3_{,111} + d_{12} u^3_{,11} + d_{13} u^3_{,1} + d_{14} u^3 + d_{15} \vartheta_{,1111} + d_{16} \vartheta_{,111} + d_{17} \vartheta_{,11} + d_{18} \vartheta_{,1} + d_{19} \vartheta = 0 \quad (5 \cdot d)$$

ここに、 a_j ($j = 1 \sim 15$)、 b_k, c_k, d_k ($k = 1 \sim 19$)は、棒軸の曲率 κ_3 、捩率 τ 、弾性定数 E 、せん断弾性定数 G 、および、断面定数を含む定数であり、その一部を示せば、以下のようになる。

$$a_4 = -E J_{y_2} + \kappa_3 E J_{y_2 y_2} \quad (6 \cdot a)$$

$$a_5 = -2 \tau E J_{y_3} + \tau \kappa_3 E J_{y_2 y_2} - \tau \kappa_3^2 E J_{\omega y_2} \quad (6 \cdot b)$$

$$a_6 = -\kappa_3 E A + (\kappa_3^2 + \kappa_3^2) E J_{y_2} - \tau^2 \kappa_3 E J_{y_2 y_2} - 2 \tau^2 \kappa_3 E J_{y_3 y_3} + \tau^2 \kappa_3^2 E J_{\omega y_3} \quad (6 \cdot c)$$

ここで、連立定数係数微分方程式の解として、

$$u^2 = \tilde{A} \exp[\lambda \theta^1] \quad u^3 = \tilde{B} \exp[\lambda \theta^1] \quad (7 \cdot a, b)$$

$$u^1 = \tilde{C} \exp[\lambda \theta^1] \quad \vartheta = \tilde{D} \exp[\lambda \theta^1] \quad (7 \cdot c, d)$$

とおき、(5)式に代入すると、以下の $\tilde{A} \sim \tilde{D}$ に関する連立方程式が得られる。

$$f_{1,1} \tilde{A} + f_{1,2} \tilde{B} + f_{1,3} \tilde{C} + f_{1,4} \tilde{D} = 0 \quad (8 \cdot a)$$

$$f_{2,1} \tilde{A} + f_{2,2} \tilde{B} + f_{2,3} \tilde{C} + f_{2,4} \tilde{D} = 0 \quad (8 \cdot b)$$

$$f_{3,1} \tilde{A} + f_{3,2} \tilde{B} + f_{3,3} \tilde{C} + f_{3,4} \tilde{D} = 0 \quad (8 \cdot c)$$

$$f_{4,1} \tilde{A} + f_{4,2} \tilde{B} + f_{4,3} \tilde{C} + f_{4,4} \tilde{D} = 0 \quad (8 \cdot d)$$

上式において、 $f_{k,j}$ ($k, j = 1, 2, 3, 4$)は λ を含む定数であり、その内容の一部は次のように表わされる。

$$f_{1,1} = a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \quad (9 \cdot a)$$

$$f_{2,1} = b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 \quad (9 \cdot b)$$

$$f_{3,1} = c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4 \quad (9 \cdot c)$$

$$f_{4,1} = d_1 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda + d_4 \quad (9 \cdot d)$$

一般に、 $\tilde{A} \sim \tilde{D}$ が非自明解を持つ条件、すなわち、係数行列が零になることより、代数方程式の根として λ を求める方法が多く用いられているが、ここでは、(8)式を固有値問題に変換することを考える⁷⁾。まず、境界条件を考慮し、次式で定義される定数を導入する。

$$\tilde{E} = \tilde{A} \lambda \quad \tilde{I} = \tilde{B} \lambda \quad \tilde{L} = \tilde{C} \lambda \quad (10 \cdot a, b, c)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= \tilde{B} \lambda & \tilde{J} &= \tilde{F} \lambda & \tilde{M} &= \tilde{J} \lambda & (10 \cdot d, e, f) \\
\tilde{G} &= \tilde{C} \lambda & & & & & (10 \cdot g) \\
\tilde{H} &= \tilde{D} \lambda & \tilde{K} &= \tilde{H} \lambda & \tilde{N} &= \tilde{K} \lambda & (10 \cdot h, i, j)
\end{aligned}$$

(10)式を用い、(8)式を書き直せば、以下の固有値問題が得られる。

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & R_{1,4} & R_{1,5} & R_{1,6} & R_{1,7} & R_{1,8} & R_{1,9} & R_{1,10} & R_{1,11} & R_{1,12} & R_{1,13} & R_{1,14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} & R_{2,4} & R_{2,5} & R_{2,6} & R_{2,7} & R_{2,8} & R_{2,9} & R_{2,10} & R_{2,11} & R_{2,12} & R_{2,13} & R_{2,14} \\
R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & R_{3,4} & R_{3,5} & R_{3,6} & R_{3,7} & R_{3,8} & R_{3,9} & R_{3,10} & R_{3,11} & R_{3,12} & R_{3,13} & R_{3,14} \\
R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} & R_{4,5} & R_{4,6} & R_{4,7} & R_{4,8} & R_{4,9} & R_{4,10} & R_{4,11} & R_{4,12} & R_{4,13} & R_{4,14}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\tilde{A} \\
\tilde{B} \\
\tilde{C} \\
\tilde{D} \\
\tilde{E} \\
\tilde{F} \\
\tilde{G} \\
\tilde{H} \\
\tilde{I} \\
\tilde{J} \\
\tilde{K} \\
\tilde{L} \\
\tilde{M} \\
\tilde{N}
\end{pmatrix}
= \lambda
\begin{pmatrix}
\tilde{A} \\
\tilde{B} \\
\tilde{C} \\
\tilde{D} \\
\tilde{E} \\
\tilde{F} \\
\tilde{G} \\
\tilde{H} \\
\tilde{I} \\
\tilde{J} \\
\tilde{K} \\
\tilde{L} \\
\tilde{M} \\
\tilde{N}
\end{pmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $R_{m,n}$ ($m=1 \sim 4$, $n=1 \sim 14$) は、 α_j^i ($i=1 \sim 15$)、 bR , cR , dR ($R=1 \sim 19$) を含む定数であるが、その形は複雑であるので、省略する。ここで、特性根は固有値 λ として求まり、また、 u^1 , u^2 , u^3 , φ の係数間の関係式は固有ベクトル $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$ により、得られる。その際、他の固有ベクトル $\{\tilde{E}, \dots, \tilde{N}\}$ は必要としない。

次に、 u^1 , u^2 , u^3 , φ の係数間の関係式を明らかにするために、斉次解を以下のように置く。

$$u^2 = \sum_{j=1}^{14} \alpha_j^2(\theta^1) C_j^* \quad u^3 = \sum_{j=1}^{14} \beta_j^3(\theta^1) C_j^* \quad (12 \cdot a, b)$$

$$u^1 = \sum_{j=1}^{14} \gamma_j^1(\theta^1) C_j^* \quad \varphi = \sum_{j=1}^{14} \delta_j^1(\theta^1) C_j^* \quad (12 \cdot c, d)$$

ここに、 $\alpha_j^i(\theta^1)$, $\beta_j^i(\theta^1)$, $\gamma_j^i(\theta^1)$, $\delta_j^i(\theta^1)$, ($i=1 \sim 14$) は、棒軸方向座標 θ^1 の関数であり、 C_j^* ($j=1 \sim 14$) は、境界条件より定まる未定定数である。

まず、固有値 λ が複素数の場合を考えると、その共役複素数もまた固有値であるので、固有値、固有ベクトルは以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\lambda_{2j-1} &= \zeta_j + i \mu_j & \lambda_{2j} &= \zeta_j - i \mu_j \\
(j &= 1 \sim \text{複素数である固有値の個数} / 2) & & (13 \cdot a, b)
\end{aligned}$$

上記の固有値に相当する固有ベクトルは、

$$\{A, \dots, D\} = \left\{ \zeta_j \pm i \mu_j, \dots, \zeta_j \pm i \mu_j \right\} \quad (14)$$

と表われ、この固有値 λ_{2j-1} , λ_{2j} に対応する係数 $\alpha_{2j-1}(\theta')$, $\beta_{2j-1}(\theta')$, $\gamma_{2j-1}(\theta')$, $\delta_{2j-1}(\theta')$, $\alpha_{2j}(\theta')$, $\beta_{2j}(\theta')$, $\gamma_{2j}(\theta')$, $\delta_{2j}(\theta')$ は、次のようになる。

$$\alpha_{2j-1}(\theta') = \exp[\zeta_j \theta'] \cos \mu_j \theta' \quad \alpha_{2j}(\theta') = \exp[\zeta_j \theta'] \sin \mu_j \theta' \quad (15 \cdot a, b)$$

$$\beta_{2j-1}(\theta') = R_j^2 \alpha_{2j-1}(\theta') - S_j^2 \alpha_{2j}(\theta') \quad \beta_{2j}(\theta') = S_j^2 \alpha_{2j-1}(\theta') + R_j^2 \alpha_{2j}(\theta') \quad (15 \cdot c, d)$$

$$\gamma_{2j-1}(\theta') = R_j^3 \alpha_{2j-1}(\theta') - S_j^3 \alpha_{2j}(\theta') \quad \gamma_{2j}(\theta') = S_j^3 \alpha_{2j-1}(\theta') + R_j^3 \alpha_{2j}(\theta') \quad (15 \cdot e, f)$$

$$\delta_{2j-1}(\theta') = R_j^4 \alpha_{2j-1}(\theta') - S_j^4 \alpha_{2j}(\theta') \quad \delta_{2j}(\theta') = S_j^4 \alpha_{2j-1}(\theta') + R_j^4 \alpha_{2j}(\theta') \quad (15 \cdot g, h)$$

ここに、

$$R_j^l = \frac{\zeta_j^l \cdot \zeta_j^l + \mu_j^l \cdot \mu_j^l}{(\zeta_j^l)^2 + (\mu_j^l)^2} \quad S_j^l = \frac{\zeta_j^l \cdot \mu_j^l - \zeta_j^l \cdot \mu_j^l}{(\zeta_j^l)^2 + (\mu_j^l)^2} \quad (l = 2, 3, 4) \quad (16 \cdot a, b)$$

である。

固有値が実数の場合は簡単になり、固有値とそれに対応する固有ベクトルを

$$\lambda_j = \zeta_j \quad (j = [14 - \text{複素数である固有値の個数}] \sim 14) \quad (17)$$

$$\{A, \dots, D\} = \left\{ \zeta_j, \dots, \zeta_j \right\} \quad (18)$$

と表わすと、未定定数の係数は以下のようにになる。

$$\alpha_j(\theta') = \exp[\zeta_j \theta'] \quad (19 \cdot a)$$

$$\beta_j(\theta') = \frac{\zeta_j}{\zeta_j} \alpha_j(\theta') \quad \gamma_j(\theta') = \frac{\zeta_j}{\zeta_j} \alpha_j(\theta') \quad \delta_j(\theta') = \frac{\zeta_j}{\zeta_j} \alpha_j(\theta') \quad (19 \cdot b, c, d)$$

固有値が重根となるのは、振率 $\omega = 0$ のとき、すなわち、円弧ばりの場合のみであり、そのときの未定定数の係数については省略する。

以上により得られた、連立定数係数微分方程式 (5) の斉次解 (12) と、薄肉らせんばりの境界条件とにより、薄肉らせんばりの変位・断面力・応力の値を算出した。

3. 薄肉らせんばりの断面定数と平面曲線半径 R との関係

本報告では、数値計算例として、図 2. に示された二軸対称薄肉工型断面を有する、ピッチ角 $\phi = 6^\circ$ の両端固定らせんばりを使用した。図心軸を解析軸とし、ピッチ角 ϕ を 6° としたときの、この断面に関する断面定数と薄肉らせんばりの平面曲線半径 R との関係を図 3. ~ 9. に示す。図中において、 $\circ$ は直線ばりの断面定数であることを示している。

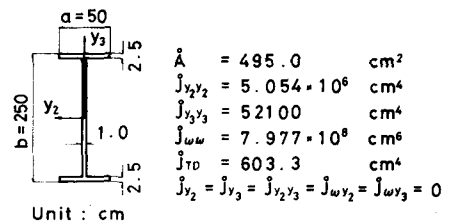


図 2. 使用断面

これらの図より、等価断面積 A 、等価断面二次モーメント $J_{y_2 y_2}$ 、 $J_{y_3 y_3}$ 、曲げねじり定数 J_{wyw} 、および、St. Venant のねじり定数 J_{tw} は、通常の構造物における平面曲線半径 R では、直線ばりの値にほぼ一致し、さらには、直線ばりの場合には値を持たない、等価断面一次モーメント J_{y_2} 、そり相乗モーメント J_{wy_3} が、平面曲線半径 R の増大とともに零に収束することがわかる。

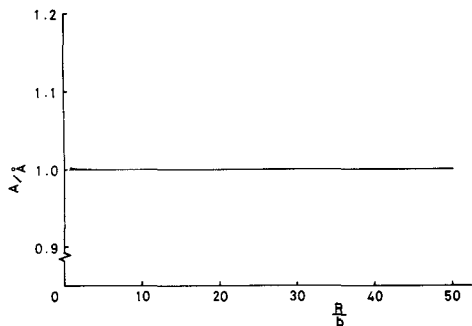


図3. 等価断面積 A と R/b の関係

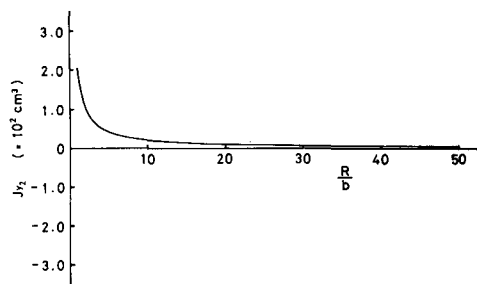


図4. 等価断面一次モーメント J_{y2} と R/b の関係

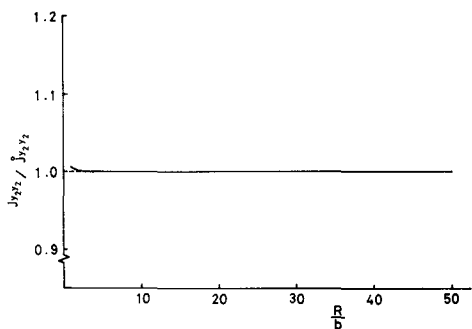


図5. 等価断面二次モーメント J_{y2^2} と R/b の関係

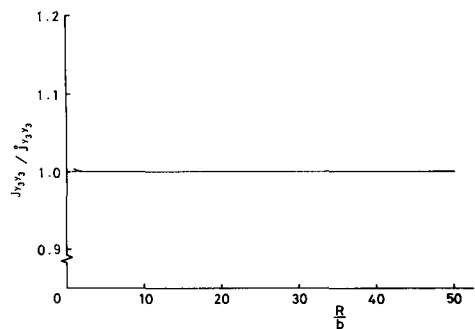


図6. 等価断面二次モーメント J_{y3^2} と R/b の関係

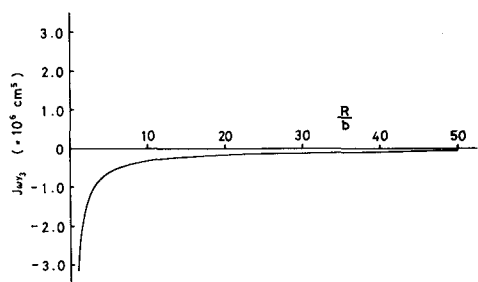


図7. そり相乗モーメント J_{wy3} と R/b の関係

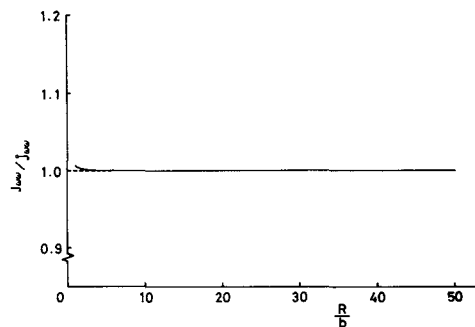


図8. 曲げねじり定数 J_{ww} と R/b の関係

なお、薄肉らせんばりにおいても、二軸対称断面では、図心軸を解析軸とした場合、等価断面一次モーメント J_{y3} 、等価断面相乗モーメント J_{y2y3} 、そり相乗モーメント J_{wy2} は、値を持たない。

4. 折れ線近似

本報告では、直接剛性法を用いて、折れ線近似モデルの値を算出した。薄肉直線ばりの二軸対称

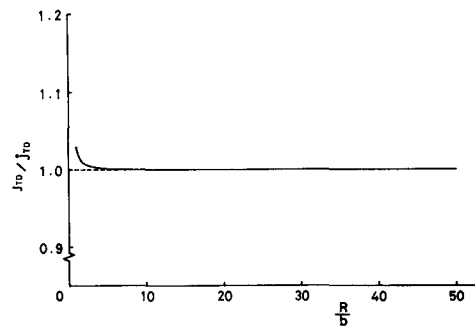


図9. St. Venantのねじり定数 J_{T0} と R/b の関係

断面においては、せん断中心は断面の図心に一致することにより、解析軸は図心軸のみとなるので、薄肉直線ばりの主座標系における平衡方程式⁹⁾

$$\begin{aligned} E A u'_{,11} &= 0 & E J_{y_2 y_2} u''_{,1111} &= Q_2 & E J_{y_3 y_3} u''_{,1111} &= Q_3 & (20 \cdot a, b, c) \\ E J_{\omega \omega} \vartheta_{,1111} - G J_{T0} \vartheta_{,11} &= m_1 & & & & & (20 \cdot d) \end{aligned}$$

より作成された、剛性マトリックスを使用した。個々の要素剛性マトリックスを重ね合わせて、全体剛性マトリックスを作成する際、 y_2 軸が常にらせんばりの円柱座標系の基準横断面に平行になるように、個々の剛性マトリックスに座標変換を施した。この結果、近似的にはあるが、棒軸の捩率 θ が折れ線近似モデルに導入された。また、厳密解と比較することを考慮し、全体座標系で算出された値に、各節点の接線方向の座標変換を施した。

5. 厳密解と近似解の比較

薄肉らせんばりにおける折れ線近似の妥当性を示すために、数値計算モデルとして、先に図2. で示した断面を有する、部材長 $l = 62.83\text{m}$ 、平面曲線半径 $R = 40\text{m}$ 、ピッチ角 $\phi = 6^\circ$ の両端固定らせんばりを用いた。材料定数は、弾性定数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.30$ とした。

まず、近似解の厳密解への収束を調べるために、薄肉らせんばりの中央点の断面図心に、軸力 $\bar{N}$ 、 y_2 軸方向せん断力 $\bar{Q}_2$ 、 y_3 軸方向せん断力 $\bar{Q}_3$ 、および、 y_1 軸まわりのモーメント $\bar{M}_1$ を載荷したときの、各々の荷重に対する、載荷点の主たる変位(軸力 $\bar{N}$ に対しては y_1 軸方向変位 u^1 、 y_2 軸方向せん断力 $\bar{Q}_2$ に対しては y_2 軸方向変位 u^2 、 y_3 軸方向せん断力に対しては y_3 軸方向変位 u^3 、 y_1 軸まわりのモーメント $\bar{M}_1$ に対しては y_1 軸まわりの回転角 ϑ)の近似解の厳密解への収束を図10.~13.に示す。図中において、縦軸は近似解()Aを厳密解()Eで除した値であり、横軸は部材要素数である。

これらの図より、折れ線近似モデルの値は、要素数を増やせば厳密解に収束すること、また、本報告で使用した、両端固定・中央点載荷の薄肉らせんばりにおいては、10要素の折れ線近似モデルで、妥当な近似解が得られることが判明した。

次に、折れ線近似モデルの値が、薄肉らせんばりの挙動を捉えているかどうかを調べるために、先に示した両端固定ばりの中央点の断面図心に、鉛直方向せん断力 0.01t ($\bar{Q}_y = -9.945 \times 10^{-3}\text{t}$ 、 $\bar{N} = 1.045 \times 10^{-3}\text{t}$) を載荷させた場合における、変位 ($u^1, u^2, u^3, \vartheta, \varphi, \psi, \chi$)、および、

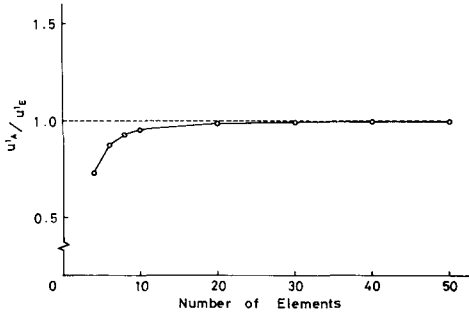


図10. $\bar{N}$ 載荷時における u_A^1 の厳密解への収束

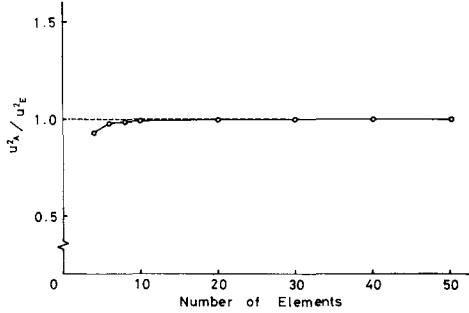


図11. $\bar{Q}_2$ 載荷時における u_A^2 の厳密解への収束

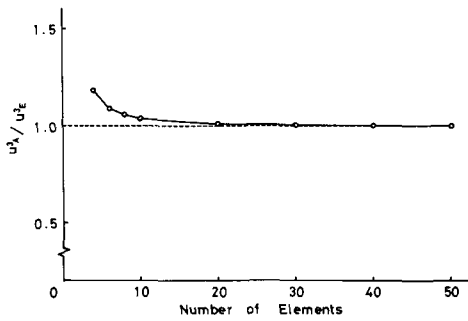


図12. Q_3 載荷時における u_A^3 の厳密解への収束

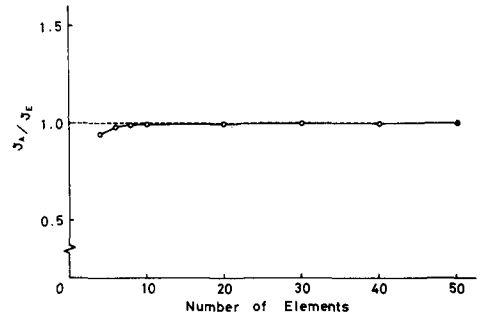


図13. M_1 載荷時における v_A の厳密解への収束

垂直応力 σ^{11} を図14.~22.に示す。なお、図中の縦軸には、変位・応力をとり、横軸は、着目点の上端（構軸方向座標の原点）からの距離である。曲線は厳密解を表わし、プロットは10要素折れ線近似モデルの値である。

全般的に良い近似が得られているが、設計の際用いられる等価円弧ばりでは算出し得ない、 u^1 、 u^2 、 v の彎動をも折れ線近似モデルの値が的確に捉えている点に注目されたい。

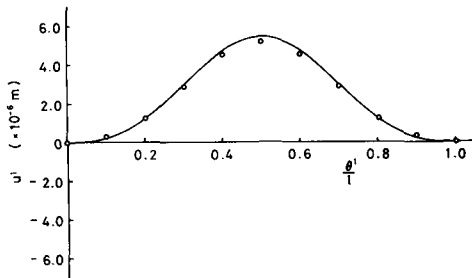


図14. 鉛直方向せん断力による u^1

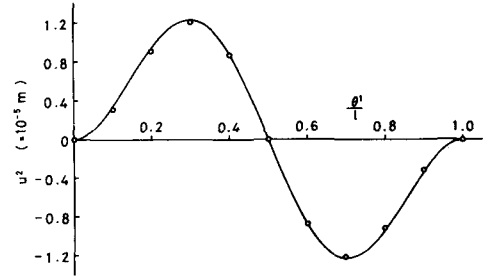


図15. 鉛直方向せん断力による u^2

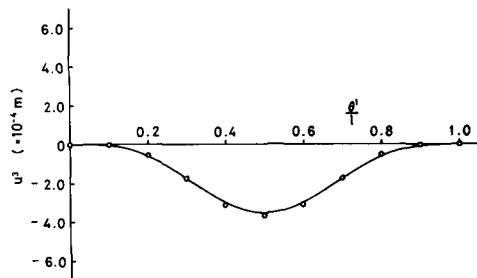


図16. 鉛直方向せん断力による u^3

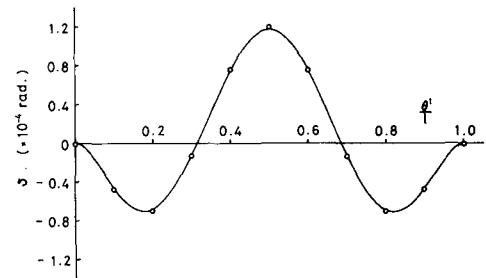


図17. 鉛直方向せん断力による v

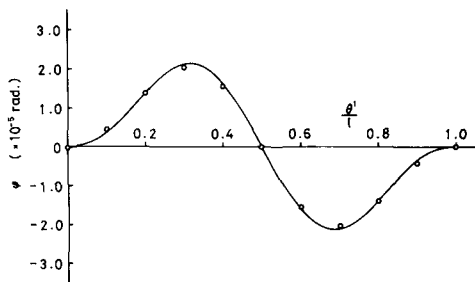


図18. 鉛直方向せん断力による ψ

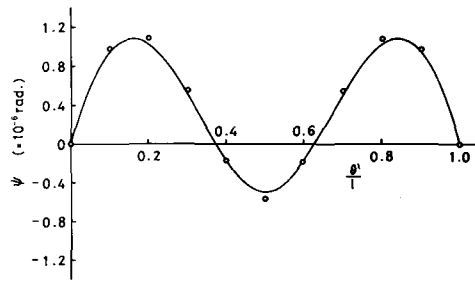


図19. 鉛直方向せん断力による ψ

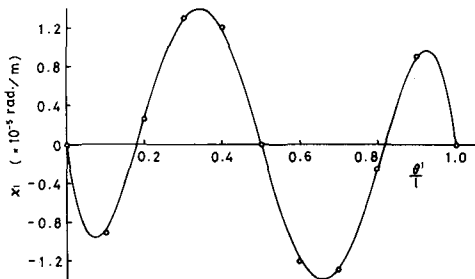


図20. 鉛直方向せん断力による χ_1

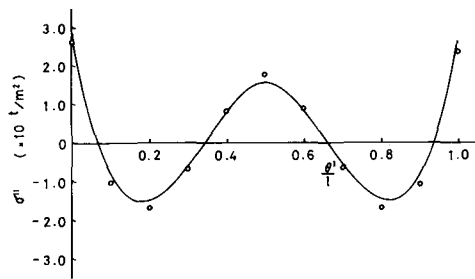


図21. 鉛直方向せん断力による σ^{11}

6. 結語

本報告では、薄肉らせんばりに対する折れ線近似の妥当性を、固有値問題を介して得られた平衡方程式の解をもとにして確かめた。

その際、数値計算モデルとして二軸対称断面を有する薄肉らせんばりを用いたため、折れ線近似においては、図心軸を解析軸とすれば、主座標系で作成された剛性マトリックスを使用することができた。しかし、任意断面における主座標系では、引張り・圧縮現象の解析軸となる図心軸と、ねじり現象の解析軸となるせん断中心軸とが一致せず、この任意断面を有する薄肉らせんばりの折れ線近似においては、主座標系で作成された要素剛性マトリックスに座標変換を施し、重ね合わせて全体剛性マトリックスを作ることはできない。現在、この任意断面を有する薄肉らせんばりへの折れ線近似の適用を試みている。

さらに、実際には、一定の曲率と振率を有するらせんばりは少なく、曲率・振率とも軸線に沿って変化することが多いが、このような場合にも、折れ線近似は有用である。今のところ、この場合の折れ線近似の妥当性を理論的に調べることはできないが、本報告において、一定の曲率と振率を有する薄肉らせんばりに対して、その妥当性が確かめられたことを考慮すれば、曲率・振率が軸線に沿って変化する薄肉らせんばりの設計においても、十分に使用に耐え得るであろうことは想像にかたくない。

なお、数値計算は東京大学大型計算機センターのM-200Hを使用して行い、固有値問題の解は、数値計算副プログラムライブラリー、MSLⅡのうち γ DEF1Mを用いて求めた。

謝辞： 固有値問題を介して、連立定数係数微分方程式の解を算出するプログラムを作成するにあたり、東京電機大学・助手・井浦雅司先生に有益な助言を頂きました。記して、深謝の意を表します。

参考文献

- 1) 西野・深沢；ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，第247号，1976年3月。
- 2) 平嶋・恵谷；開断面薄肉らせんはりの理論，土木学会論文報告集，第281号，1979年1月。
- 3) 結城・前田；薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，第224号，1974年4月。
- 4) 薄木・稼農；薄肉断面曲線材の変形法による解析，土木学会論文報告集，第235号，1975年3月。
- 5) 鈴木・上野・西野；折れ線近似による曲線橋の解析，第26回構造工学シンポジウム講演論文集，1980年2月。
- 6) 布山・依田・平嶋；薄肉円弧ばりの近似解析手法に関する考察，第31回応用力学連合講演会講演論文抄録集，1981年11月。
- 7) 井浦雅司；非閉鎖形変断面円錐殻のフーリエ解析，昭和56年度日本建築学会大会学術講演梗概集，1981年9月。
- 8) 築地恒夫；初期曲率・初期振率を有する薄肉断面曲線はりの基礎方程式，土木学会論文報告集，第230号，1974年10月。
- 9) V. Z. Vlasov 著，奥村敏恵・他共訳；薄肉はりの理論，技報堂，1967年。

Analysis of Thin-Walled Helicoidal Beams using Physical Approximation

by Hiroyuki FUYAMA*, Masaharu HIRASHIMA** and Teruhiko YODA**

The increasing use of thin-walled curved and twisted beams has created a need for a simple but thorough analysis of stresses as well as displacements and stress resultants in tortuous members. The curved geometry of such structures, and the complicated flexibility coefficients to be generated, make the problem very difficult and cumbersome. In general, it may be adequate to determine the stresses and displacements by reducing the helicoidal beam to its horizontal projection and then to analyze it as a curved beam. However, the rigorous treatment of the curved beam becomes so elaborated that it is of little use to the design engineer.

In this paper, an attempt is made to develop a practical analysis of thin-walled helicoidal beams, employing physical approximation by an assemblage of straight beam elements. Little work has been done numerically to verify the applicability of the physical approximation to the thin-walled helicoidal beams. To show the validity of the physical approximation by an assemblage of straight beam elements, a consistent one-dimensional theory of thin-walled helicoidal beam with open cross-section is demonstrated, in which particular emphasis is placed on the derivation of analytically exact solution with the help of the Eigen Value Problem.

The convergence of the solution on a physically approximate model represented by an assemblage of straight beam elements to that of the thin-walled helicoidal beam is shown for the I-sectioned beam with fixed ends, subtending a horizontal angle of 90 degrees, and having a slope of 6 degrees. The present physical approximation is considered to be valid for design purposes in that excellent accuracy is observed for displacements and stresses.

The proposed physical approximation in this work involves the generation of the exact stiffness matrix for thin-walled straight beam. Once this step is performed, the analysis proceeds in an analogous way to that followed in any thin-walled spatial beam by the stiffness matrix. Hence, this work can be applied to any thin-walled spatial beam by dividing the total span into many segments and treating each one as a different thin-walled straight beam.

* Graduate student, Graduate School of Science and Engineering, Waseda University.

** Department of Civil Engineering, Waseda University.