

(5) 選点法によるせん断変形・回転慣性を考慮した梁・板の固有値問題解析

〇三 上 隆*, 苅 村 仁*

1. はじめに

構造工学の分野では、自由振動解析や座屈解析など、しばしば固有値問題に直面する。しかし、厳密に解かれるのはごく限られた問題であり、通常はガラーキン法、差分法、有限要素法などの近似解法に頼らざるを得ない。

本報告は、選点法により固有値問題の解析を試みたものである。ここで述べる選点法は、直交多項式の零点を選点とするもので、定式化が容易であり、比較的小容量の計算で数値解析が行える。数値例として、チモシェンコ梁理論に基づく柱の非保存的弾性安定問題、ミンドリン板の自由振動問題など取り上げ、本手法の有効性の検討を行った。

2. 解析方法

ここでは、チモシェンコ梁理論を用い、選点法による固有値問題の定式化を行う。

たわみを W 、曲げのみによる回転角を Φ とすると、考察している系の微分方程式と境界条件は次式で与えられる。

微分方程式；

$$\begin{aligned} L_{11}(W) + L_{12}(\Phi) - \lambda^2 W &= 0 \\ L_{21}(W) + L_{22}(\Phi) - \lambda^2 \Phi &= 0 \end{aligned}, \quad 0 < x < l \quad \text{----- (1)}$$

境界条件式；

$$B_i^1(W) + B_i^2(\Phi) = 0, \quad i = 1 \sim 4 \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 $L_{11} \sim L_{22}$ 、 B_i^1 、 B_i^2 は微分演算子 ($L_{11} \sim L_{22}$ は最高 2 階、 B_i^1 と B_i^2 は 1 階)、 λ^2 は固有値である。

W と Φ の試行関数として次式を用いる。

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{M+2} \begin{Bmatrix} a_i x^{i-1} \\ b_i x^{i-1} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

ここで、 a_i と b_i は任意定数、 M は内部選点数。

式 (3) で内部選点 x_j ($j=2, \dots, M+1$) と境界点 $x_1=0$ 、 $x_{M+2}=l$ での W と Φ の値 $W(x_i)$ 、 $\Phi(x_i)$ を求める。

ただし、選点は Shifted Legendre 多項式の零点とする。さらに、式 (3) で W と Φ の 1、2 次微分をとり内部選点、境界点での値を求め、それらを任意定数 a_i 、 b_i でなく $W(x_i)$ 、 $\Phi(x_i)$ で表めると次式となる。

$$\begin{aligned} \{W'\} &= [A]\{W\}, \quad \{W''\} = [B]\{W\} \\ \{\Phi'\} &= [A]\{\Phi\}, \quad \{\Phi''\} = [B]\{\Phi\} \end{aligned} \quad \text{--- (4)}$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ は $(M+2) \times (M+2)$ の正交マトリックスであり

$$\begin{aligned} \{W\}^T &= \{W(x_1) \ W(x_2) \ \dots \ W(x_{M+1}) \ W(x_{M+2})\}, \\ \{\Phi\}^T &= \{\Phi(x_1) \ \Phi(x_2) \ \dots \ \Phi(x_{M+1}) \ \Phi(x_{M+2})\}, \\ \{W'\}^T &= \{W'(x_1) \ W'(x_2) \ \dots \ W'(x_{M+1}) \ W'(x_{M+2})\}, \\ \{\Phi'\}^T &= \{\Phi'(x_1) \ \Phi'(x_2) \ \dots \ \Phi'(x_{M+1}) \ \Phi'(x_{M+2})\} \end{aligned} \quad \text{などである。}$$

固有方程式は以下の手順により得られる。

まず、 $2M$ 個の条件は微分方程式の内部選点での残差の条件より得られる。マトリックス表示すると、

$$\begin{aligned} [\alpha_1] \{\delta_1\} + [\alpha_2] \{\delta_2\} - \lambda^2 [I] \{\delta_1\} &= 0 \quad \text{--- (5)} \\ (2M \times 2M) \quad (2M \times 4) \quad (2M \times 2M) \end{aligned}$$

ここで、マトリックス $[\alpha_1]$ 、 $[\alpha_2]$ は、式 (4) のマトリックス $[A]$ 、 $[B]$ の成分で構成され、 $[I]$ は

* 北海道大学 工学部 土木工学科

単位マトリックスである。 $\{\delta_1\}$, $\{\delta_2\}$ は内部選点と境界点における未知量であり,

$$\{\delta_1\}^T = \{W(x_2) \dots W(x_{M+1}) \quad \bar{w}(x_2) \dots \bar{w}(x_{M+1})\}$$

$$\{\delta_2\}^T = \{W(x_1) \quad W(x_{M+2}) \quad \bar{w}(x_1) \quad \bar{w}(x_{M+2})\}$$

4個の条件は, $x_1=0$, $x_{M+2}=1$ における境界条件より得られる。マトリックス表示すると,

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4 \times 2M) \quad (4 \times 4) \quad (6)$$

ここで, $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ は式(4)のマトリックス $[A]$ の成分で構成されるマトリックスである。

式(5)と式(6)より $\{\delta_2\}$ を消去すると, 固有方程式として次式が得られる。

$$[[\alpha] - \lambda^2 [I]] \{\delta_1\} = 0 \quad (7)$$

$$\text{ここで, } [\alpha] = [\alpha_1] - [\alpha_2]^{-1} [\beta_2] [\beta_1] \quad (8)$$

式(7)は内部選点における解の値 $\{\delta_1\}$ を固有ベクトルとする $(2M \times 2M)$ の大きさの固有方程式である。

以上のように, 本手法は考察している系の微分方程式と境界条件が与えられさえすれば, 式(4)のマトリックス $[A]$, $[B]$ を用いて, 式(7)の形の固有値問題へと容易に定式化が行えるものである。また, 本手法は微分演算子の自己随伴, 非自己随伴に関係なく適用が可能である。

3. 柱の非保存的弾性安定解析への適用

図-1に示す荷線方向力が作用する一端固定, 他端自由の柱の非保存的弾性安定問題を扱う。なお, ここでは次の2つの断面形状を考えた。

Case(1)として; 幅 (b) が一一定で高さ (h) が直線変化する場合

Case(2)として; 高さ (h) が一一定で幅 (b) が直線変化する場合

たねみを W , 曲げのみによる回転角を $\bar{w}$ と記し, チモシェンコ梁理論に基づく無次元化常微分方程式は次式となる。

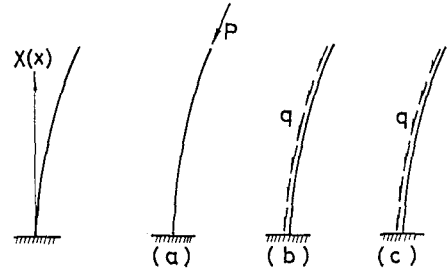


Fig.1 Columns used for numerical studies

- (a) Beck's problem
- (b) Leipholz's problem: $q = \text{const}$
- (c) Hauger's problem: $q = q_0(1-x)$

$$r^2 S^2 f_2 (\bar{w} - W') - r^2 (f_1 \bar{w}') - \lambda^2 f_1 \bar{w} = 0 \quad (9.a)$$

$$S^2 \{ f_2 (\bar{w} - W') \}' + \eta g_1 W'' + \eta g_2 (\bar{w} - W') - \lambda^2 f_2 W = 0 \quad (9.b)$$

ここで, $r^2 = A_0 L^2 / I_0$, $S^2 = k g A_0 L^2 / E I_0$, $\lambda^2 = \rho A_0 \omega^2 L^4 / E I_0$
($\lambda = d\omega / dx$), A_0 , I_0 = 固定端での断面積と断面二次モーメント, E = ヤング率, η = セン断弾性係数, L = 部材長, ρ = 密度, ω = 固有振動数, k = セン断補正係数。

式(9)の断面形状を表わす関数 f_1 と f_2 は固定端での幅, 高さを b_0 , h_0 , 自由端でのそれらを b_1 , h_1 と記すと次のようである。

$$\text{Case(1)に対して; } f_1 = f_2^3, \quad f_2 = 1 - \alpha x \\ \alpha = (h_0 - h_1) / h_0$$

$$\text{Case(2)に対して; } f_1 = f_2 = 1 - \alpha x \\ \alpha = (b_0 - b_1) / b_0$$

荷重パラメータ η と荷重状態に依存する関数 g_1 と g_2 は次のようである。

$$\text{Beckの問題; } \eta = PL^2 / (E I_0), \quad g_1 = 1, \quad g_2 = 0$$

$$\text{Leipholzの問題; } \eta = \int L^3 / (E I_0), \quad g_2 = 1 \\ g_1 = 1 - x$$

$$\text{Haugerの問題; } \eta = \int_0 L^4 / (E I_0), \quad g_2 = 1 - x \\ g_1 = (1 - x)^2 / 2$$

境界条件は次式で与えられる。

$$x=0 \text{ で固定; } W = \bar{w} = 0 \quad (10.a)$$

$$x=1 \text{ で自由; } \bar{w}' = W' - \bar{w} = 0 \quad (10.b)$$

なお, 以下の数値例では, 中央断面としせん

断補正係数は Cowper¹⁾の理論式を用いポアソン比 $= 0.3$ とした。

3.1) 数値計算例

① 無負荷状態での固有振動数

外力が存在しないとき式(9)で $q = p_1 = p_2 = 0$ であり、式(9)および式(10)を解くと、それらの解は無負荷状態でのチモシェンコ梁の固有振動数に相当する。

表一に等断面(式(9)で $q_1 = q_2 = 1$)に対する $r = s = 10$ と $r = s = 20$ の固有振動数を5次まで示す。本計算値は高次振動数において差(厳密解に対する相対誤差が0.1%以内)がみられるものの、良好な結果が得られている。

② 非保存的弾性安定解析

臨界荷重の決定、安定および不安定の判定は次のようである。与えられた荷重パラメーター q で式(7)を満たす2M個の固有値 λ を求める。このとき λ が正の実数から一つでも負値をとるときダイバージェンス形不安定、正値から複素数へと変化するときフラッター形不安定となる。したがって、考察している系の臨界荷重は、 λ が正の実数から負の実数あるいは複素数へと移行する最小の荷重パラメーター q を求めることにより得られる。なお、以下の図表では、臨界荷重 P, q, p_0 の右肩に*を付し表わした。

表一2に一樣断面の Beck 問題に対する収束性の検討を示す。これは種々の細長比 (L/r) に対し内部選点数 $M = 5, 6, \dots, 11$ と変化させ臨界荷重を求めたものである。細長比によらず $M \geq 7$ で一定値に収束している。なお、Leipholz と Hauger の問題に対しても同様な結果が得られたことを付記する。

図一2 (a), (b) と表一3に一樣断面の解析結果を示す。計算に用いた内部選点数は $M = 11$ である。図一2 (a) および (b) は Beck の問題と Leipholz の問題の臨界荷重に与える細長比 L/r (10 ~ 100) の影響を図示したものである。図中、点線は曲げ理論による結果で、Beck の問題で $q = 2.013$, Leipholz の問題で $q = 4.058$ である。表一3は Hauger の問題に対する結

Table 1. Nondimensional frequencies
($\lambda = \omega \sqrt{\rho A_0 L^4 / EI_0}$)

Number of modes	$r = s = 10$		$r = s = 20$	
	Exact	Present	Exact	Present
1	3.366	3.366	3.476	3.476
2	17.230	17.230	20.454	20.454
3	39.794	39.794	52.715	52.715
4	64.349	64.350	93.766	93.771
5	89.890	89.894	140.496	140.522

Table 2. Convergence study for Beck's problem
($\eta = p^* L^2 / \pi^2 EI_0$)

L/r	$M=5$	$M=6$	$M=7$	$M=8$	$M=9$	$M=10$	$M=11$
10	1.0235	1.0234	1.0234	1.0234	1.0234	1.0234	1.0234
50	1.9508	1.9516	1.9501	1.9501	1.9501	1.9501	1.9501
200	2.0269	2.0286	2.0262	2.0262	2.0262	2.0262	2.0262
1000	2.0320	2.0337	2.0313	2.0313	2.0313	2.0313	2.0313

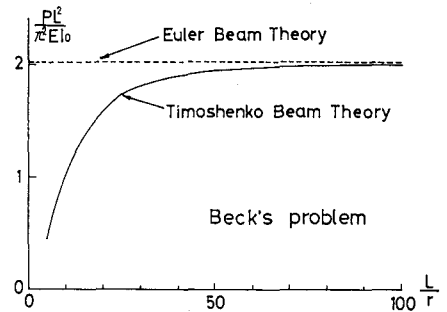


Fig.2(a) Critical load versus the slenderness ratio (Beck's problem)

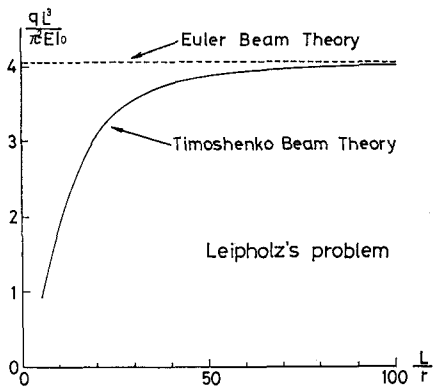


Fig.2(b) Critical load versus the slenderness ratio (Leipholz's problem)

Table 3. Critical loads ($\eta = q_0^* L^4 / \pi^2 EI_0$) for Hauger's problem

L/r	T-B	E-B
10	5.127	15.259
15	8.452	15.259
20	10.645	15.259
25	12.004	15.259
50	14.321	15.259
100	15.016	15.259
500	15.251	15.259
1000	15.258	15.259

T-B = Timoshenko beam theory
E-B = Euler beam theory

果であり細長比 (L/r) = 10, 15, 20, ---, 1000 について計算した。この問題の曲げ理論による臨界荷重は $\eta = 15.26$ である。以上の図表より次の点が理解される。細長比の値が小さいとき、せん断変形・回転慣性の臨界荷重に与える影響が顕著である。例えば、細長比 $L/r = 10$ での臨界荷重は $L/r = 100$ のもののほぼ 50% (Beck の問題), 45% (Leipholz の問題), 35% (Hauger の問題) である。一方、細長比が大きくなるにつれ、臨界荷重は曲げ理論によるものに漸近していく。細長比 $L/r = 100$ での臨界荷重は、曲げ理論による結果の 99% (Beck, Leipholz の問題), 98% (Hauger の問題) である。したがって、細長比 $L/r \geq 100$ では曲げ理論によって臨界荷重の算定が可能と思われる。

図-3 と表-4 に、それぞれ断面が Case (1) ; 幅が一定で高さが直線変化, Case (2) ; 高さが一定で幅が直線変化する場合の Beck, Leipholz, Hauger の問題に対する臨界荷重を示す。

各図表とも $\alpha (= 0 \sim 0.6)$ と細長比 ($L/r = 20, 50, 100, 1000$) で整理されている。ただし、 α は Case (1) のとき $\alpha = (h_0 - h_1)/h_0$, Case (2) のとき $\alpha = (b_0 - b_1)/b_0$ である。なお、表-4 の E-B 欄は Sankaranarayanan の³⁾ 曲げ理論に基づく有限要素解である。以上の図表より次の点が理解される。臨界荷重は Case (1), (2)

とも α の値が大きくなるにつれ減少し、その影響は幅が一定で高さが直線変化する場合 (Case (1)) に著しい。また、 α の影響は Beck の問題に対して顕著である。細長比 (L/r) の臨界荷重に与える影響は、それが小さいとき著しいが、 $L/r \geq 100$ では曲げ理論により臨界荷重の算定が可能である。

Table 4(a). Critical loads ($\eta = p^* L^2 / \pi^2 EI_0$) for Beck's problem

α	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	1.616	1.950	2.010	2.031	2.0315
0.1	1.543	1.863	1.921	1.941	1.9413
0.2	1.468	1.775	1.831	1.850	1.8511
0.3	1.393	1.687	1.741	1.760	1.7599
0.4	1.317	1.600	1.652	1.670	1.6708
0.5	1.240	1.514	1.565	1.583	1.5837
0.6	1.165	1.433	1.483	1.500	1.5006

Table 4(b). Critical loads ($\eta = q^* L^3 / \pi^2 EI_0$) for Leipholz's problem

α	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	3.125	3.875	4.011	4.057	4.0579
0.1	3.006	3.719	3.848	3.892	3.8938
0.2	2.884	3.560	3.682	3.724	3.7256
0.3	2.758	3.398	3.514	3.553	3.5543
0.4	2.630	3.233	3.343	3.380	3.3811
0.5	2.498	3.067	3.170	3.206	3.2058
0.6	2.365	2.900	2.997	3.031	3.0315

Table 4(c). Critical loads ($\eta = q_0^* L^4 / \pi^2 EI_0$) for Hauger's problem

α	L/r				E-B
	20	50	100	1000	
0	10.644	14.321	15.018	15.260	15.2900
0.1	10.309	13.808	14.470	14.701	14.7017
0.2	9.962	13.280	13.907	14.124	14.1242
0.3	9.600	12.736	13.328	13.533	13.5365
0.4	9.222	12.173	12.729	12.922	12.9286
0.5	8.827	11.591	12.111	12.290	12.2903
0.6	8.412	10.990	11.474	11.642	11.6418

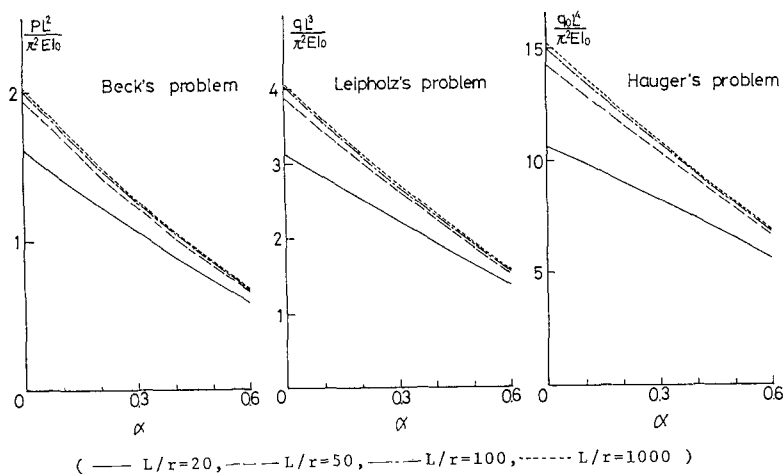


Fig.3 Variation of critical load with $\alpha = (h_0 - h_1)/h_0$; Case (1)

4. ミンドリン板の自由振動問題への適用

図-4に示すような板厚が一方向(Y方向)に直線変化し、相対する2辺($X=0, a$)で単純支持、他の2辺が任意のミンドリン板を扱う。

ミンドリン板の基本式⁴⁾は、左右向変位を w 、 X および Y 方向の回転角を ψ_x, ψ_y とすると次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= M_x^0 + M_{xy}^0 + (\rho h^3/12) \psi_x^{**} \\ Q_y &= M_{xy}^0 + M_y^0 + (\rho h^3/12) \psi_y^{**} \\ Q_x^0 + Q_y^0 &= \rho h w^{**} \end{aligned} \right\} \text{-----}(11)$$

ここで、 $(\cdot)^0 = \partial(\cdot)/\partial X$, $(\cdot)^* = \partial(\cdot)/\partial Y$, $(\cdot)^{**} = \partial^2(\cdot)/\partial Y^2$, t = 時間, ρ = 密度, h = 板厚であり、モーメント(M_x, M_y, M_{xy})とせん断力(Q_x, Q_y)は次式である。

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\psi_x^0 + \nu \psi_y^*) \\ M_y &= -D(\psi_y^0 + \nu \psi_x^*) \\ M_{xy} &= -(1-\nu)D(\psi_x^* + \psi_y^0)/2 \\ Q_x &= k G h (w^0 - \psi_x), \quad Q_y = k G h (w^* - \psi_y) \end{aligned} \text{-----}(12)$$

ここで、 $D = E h^3/12(1-\nu^2)$, ν = ポアソン比, E = ヤング率, G = せん断弾性係数, k = せん断補正係数。

なお、板厚の変化は $Y=0, b$ での板厚を h_0, h_1 とすると次式で表わされる。

$$h = h_0(1 + \alpha Y/b) \text{-----}(13)$$

ここで、 $\alpha = (h_1 - h_0)/h_0$ -----(14)

変位関数は $X=0, a$ で単純支持の条件を満たす次式を用いる。

$$\left\{ \begin{matrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{matrix} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} h_0 W(y) \sin m\pi x \\ \bar{\psi}_x(y) \cos m\pi x \\ \bar{\psi}_y(y) \sin m\pi x \end{matrix} \right\} e^{i\omega t} \text{-----}(15)$$

ここで、 $y = Y/b$, $x = X/a$, m = 波数, ω = 固有円振動数。

以上の諸式より、ミンドリン板の Y 軸方向座標

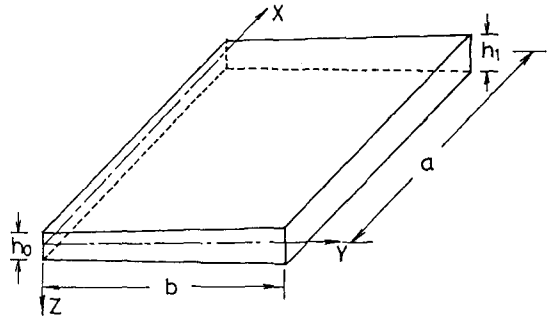


Fig.4 Geometry and dimensions of plate

$y \in [0, 1]$ に関する無次元化微分方程式は次式と得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(\bar{\psi}_x) + L_{12}(\bar{\psi}_y) + L_{13}(W) - \Omega^2 \bar{\psi}_x &= 0 \\ L_{21}(\bar{\psi}_x) + L_{22}(\bar{\psi}_y) + L_{23}(W) - \Omega^2 \bar{\psi}_y &= 0 \\ L_{31}(\bar{\psi}_x) + L_{32}(\bar{\psi}_y) + L_{33}(W) - \Omega^2 W &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(16)$$

ここで、固有振動数パラメータ Ω と微分演算子 $L_{11} \sim L_{33}$ は以下で与えられる。

$$\Omega^2 = 2(1+\nu) \rho a^2 \omega^2 / E$$

$$L_{11} = -\beta^2(\cdot)'' - \frac{3\alpha\beta^2}{f(y)}(\cdot)' + \left\{ \frac{12k\delta^2}{f^2(y)} + \frac{2m^2\pi^2}{1-\nu} \right\}(\cdot)$$

$$L_{22} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} m\pi\beta(\cdot)' - \frac{3\alpha\beta m\pi}{f(y)}(\cdot)$$

$$L_{13} = -\frac{12k m\pi\delta}{f^2(y)}(\cdot)$$

$$L_{21} = m\pi\beta \frac{1+\nu}{1-\nu}(\cdot)' + \frac{6\nu\alpha\beta m\pi}{(1-\nu)f(y)}(\cdot)$$

$$L_{22} = -\frac{2\beta^2}{1-\nu}(\cdot)'' - \frac{6\alpha\beta^2}{(1-\nu)f(y)}(\cdot)' + \left\{ \frac{12k\delta^2}{f^2(y)} + m^2\pi^2 \right\}(\cdot)$$

$$L_{23} = -\frac{12k\alpha\beta}{f^2(y)}(\cdot)'$$

$$L_{31} = -k\delta m\pi(\cdot)$$

$$L_{32} = k\alpha\beta(\cdot)' + \frac{k\alpha\beta\delta}{f(y)}(\cdot)$$

$$L_{33} = -k\beta^2(\cdot)'' - \frac{k\alpha\beta^2}{f(y)}(\cdot)' + k m^2\pi^2(\cdot)$$

ここで、 $\beta = a/b$, $\delta = a/h_0$, $f(y) = 1 + \alpha y$, $(\cdot)' = d(\cdot)/dy$, $y \in [0, 1]$

$y=0$ と $y=1$ での境界条件は次式のものをを用いた。

$$\left. \begin{array}{l} \text{単純支持; } w = M_y = \psi_x = 0 \\ \text{固定; } w = \psi_x = \psi_y = 0 \\ \text{自由; } M_y = M_{xy} = \delta_y = 0 \end{array} \right\} \text{---(17)}$$

式(16)と(17)に対する変点法の適用も2.で述べた手順で行え、最終的には大きさ(3M×3M)の式(7)の固有方程式に帰着される。

なお、以下に示す数値例は、せん断補正係数 $k_s = \pi^2/12$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

① 一様な厚さのミンドリン板

くくでは、種々の境界条件の正方形板について解析する。 a/h_0 は次の2種類が考慮された。すなわち、薄板に対しては $a/h_0 = 100$ 、比較的厚い板に対しては $a/h_0 = 10$ である。なお、境界条件は次のような表示で表わした。例えばSCSFは、単純支持—固定—単純支持—自由である。

表一ち(a)~(c)に、本計算値と有限帯板法(FSM)⁵⁾、レーレー・リッツ法⁶⁾および古典理論値の比較がなされている。なお、 m =波数、 n =モード次数である。本法による結果はFSM値とよく一致し、また正解に対して上界値を与えるレーレー・リッツ法の結果より

Table 5(a). Frequency parameters Ω for SCSC plates

$\frac{a}{h_0}$	Solution procedure	Mode m,n					
		1,1	2,1	1,2	2,2	3,1	1,3
10	Present, M=8	1.300	2.394	2.884	3.839	4.231	4.948
	Present, M=11	1.300	2.394	2.884	3.839	4.231	4.935
	F S M	1.300	2.394	2.885	3.839	4.232	4.936
	Rayleigh-Ritz	1.302	2.398	2.888	3.852	4.237	4.939
	Classical Solution	1.413	2.671	3.383	4.615	4.988	6.299
100	Present, M=8	0.1411	0.2668	0.3376	0.4604	0.4977	0.6340
	Present, M=11	0.1411	0.2668	0.3376	0.4604	0.4977	0.6279
	F S M	0.1411	0.2668	0.3376	0.4604	0.4977	0.6279
	Rayleigh-Ritz	0.1411	0.2668	0.3377	0.4608	0.4979	0.6279
	Classical Solution	0.1413	0.2671	0.3383	0.4615	0.4988	0.6299

Table 5(b). Frequency parameters Ω for SCSS plates

$\frac{a}{h_0}$	Solution procedure	Mode m,n					
		1,1	2,1	1,2	2,2	3,1	1,3
10	Present, M=8	1.092	2.296	2.542	3.611	4.184	4.547
	Present, M=11	1.092	2.296	2.542	3.611	4.184	4.541
	F S M	1.092	2.296	2.542	3.611	4.184	4.541
	Rayleigh-Ritz	1.092	2.298	2.543	3.616	4.187	4.543
	Classical Solution	1.154	2.521	2.862	4.203	4.893	5.525
100	Present, M=8	0.1153	0.2519	0.2858	0.4195	0.4883	0.5533
	Present, M=11	0.1153	0.2519	0.2858	0.4195	0.4883	0.5511
	F S M	0.1153	0.2519	0.2858	0.4195	0.4883	0.5513
	Rayleigh-Ritz	0.1153	0.2521	0.2858	0.4199	0.4889	0.5533
	Classical Solution	0.1154	0.2521	0.2862	0.4203	0.4893	0.5525

Table 5(c). Frequency parameters Ω for SCSF plates

$\frac{a}{h_0}$	Solution procedure	Mode m,n					
		1,1	2,1	1,2	2,2	3,1	1,3
10	Present, M=8	0.5974	1.482	1.883	2.719	3.056	3.826
	Present, M=11	0.5975	1.483	1.884	2.720	3.057	3.827
	F S M	0.5975	1.483	1.884	2.720	3.057	3.827
	Rayleigh-Ritz	0.6033	1.495	1.900	2.744	3.073	3.855
	Classical Solution	0.6191	1.613	2.035	3.075	3.533	4.421
100	Present, M=8	0.0616	0.1601	0.2028	0.3053	0.3511	0.4403
	Present, M=11	0.0617	0.1606	0.2030	0.3061	0.3518	0.4408
	F S M	0.0619	0.1611	0.2033	0.3070	0.3526	0.4413
	Rayleigh-Ritz	0.0622	0.1612	0.2045	0.3075	0.3526	0.4438
	Classical Solution	0.0619	0.1613	0.2035	0.3075	0.3533	0.4421

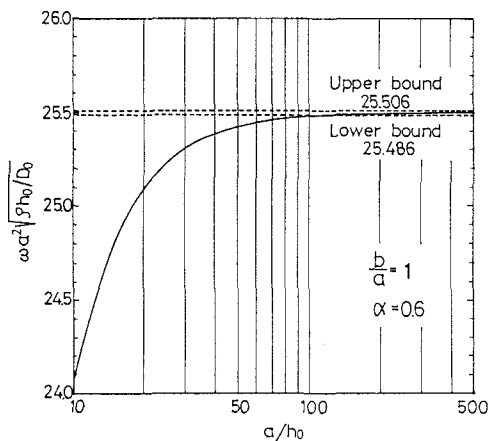


Fig.5(a) Variation of fundamental frequency with (a/h_0) for tapered plates simply supported on all edges; $b/a=1$, $\alpha=0.6$

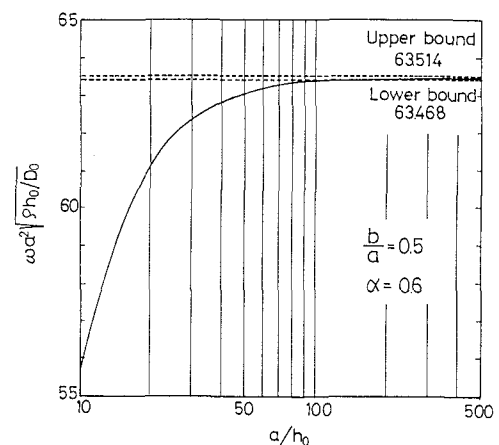


Fig.5(b) Variation of fundamental frequency with (a/h_0) for tapered plates simply supported on all edges; $b/a=0.5$, $\alpha=0.6$

低目の値を示している。

② 厚さが一方向に直線変化するミンドリン板
厚さが変化する矩形ミンドリン板の研究はあまりなされていないようである。ここでは、 a/h_0 を種々変化させ、古典理論^{7),8)}との比較により、本手法の有効性の検討を行う。解析に用いた境界条件は四辺単純支持である。

Appelらは⁸⁾、古典理論により基本固有振動数の厳密解に対する上界値と下界値を求めている。テーパー比 $\alpha=0.6$ とし、アスペクト比 $b/a=1$ および $b/a=0.5$ に対する基本固有振動数を、 $a/h_0=10\sim500$ について示すと図-5(a),(b)となる。ただし、内部選点数 $M=11$ である。本計算値は、 a/h_0 を増すにつれAppelらの値に漸近し、ほぼ $a/h_0 \geq 100$ では上界値と下界値の間の値となっている。

表-6(a),(b)にアスペクト比 $b/a=1$ 、テーパー比 $\alpha=1$ と 0.6 に対する固有振動数を示す。せん断変形と回転慣性の影響は高次固有振動数に、そして波数 m が増すにつれて大きくなる。

5. おわりに

本論文では、固有値問題の一解析法として、選点法による解法を提示し、4モリエング梁理論に基づく柱の非保存的弾性安定問題およびミンドリン板の自由振動問題に適用を試みた。

数値例が示すように、本手法は比較的簡単な手続きで問題の定式化ができ、少ない選点数で高精度の解析が可能なものと思われる。

参考文献

- 1) Cowper, G. R., The shear coefficients in Timoshenko's beam theory. *J. Appl. Mech.*, Vol.33(1966), pp.335-340.
- 2) Huang, T. C., The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *J. Appl. Mech.*, Vol.28(1961), pp.579-584.

Table 6(a). Values of $\omega a^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ for linearly tapered plates simply supported on all edges; $b/a=1.0$, $\alpha=1.0$

m	n	Classical Solution Rayleigh-Ritz F S M	Present, $M=11$		
			$a/h_0=10$	$a/h_0=50$	$a/h_0=100$
1	1	29.209	27.117	29.112	29.184
	2	72.551	61.733	71.960	72.388
	3	144.590	109.853	142.289	143.951
	4	-	165.241	239.945	243.609
2	1	71.759	61.378	71.209	71.616
	2	116.540	92.004	115.028	116.132
	3	188.509	135.070	184.551	187.363
	4	-	186.204	280.257	286.693
3	1	139.754	108.324	137.799	139.244
	2	190.187	135.642	186.191	189.083
	3	-	261.994	254.529	259.910
	4	-	363.095	218.393	348.570

Table 6(b). Values of $\omega a^2 \sqrt{\rho h_0/D_0}$ for linearly tapered plates simply supported on all edges; $b/a=1.0$, $\alpha=0.6$

m	n	Classical Solution Rayleigh-Ritz F S M	Present, $M=11$		
			$a/h_0=10$	$a/h_0=50$	$a/h_0=100$
1	1	25.498	24.076	25.435	25.482
	2	63.550	55.866	63.158	63.446
	3	126.923	101.287	125.349	126.478
	4	-	154.736	211.183	214.378
2	1	63.218	55.693	62.841	63.122
	2	101.864	84.175	100.874	101.612
	3	165.118	125.434	162.553	164.457
	4	-	175.167	247.753	252.154
3	1	124.752	100.495	123.387	124.441
	2	165.908	125.734	163.322	165.258
	3	-	229.153	224.153	227.781
	4	-	318.159	206.720	308.264

- 3) Sankaran, G.V. et al., Stability of tapered cantilever columns subjected to follower forces. *Comput. Structures*, Vol.6(1976), pp.217-220.
- 4) Mindlin, R.D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, Vol.18(1958), pp.31-37.
- 5) Dawe, D.J., Finite strip models for vibration of Mindlin plates. *J. Sound Vibration*, Vol.59(1978), pp.441-452.
- 6) Dawe, D.J. et al., Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. *J. Sound Vibration*, Vol.69(1980) pp.345-359.
- 7) Pulmano, V.V., Vibration of tapered plates by finite strip method. *ASCE*, Vol.102, No. EM3(1976), pp.553-559.
- 8) Appl, F.C., Fundamental frequency of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness. *J. Appl. Mech.*, Vol.31(1964), pp.163-168.

Eigenvalue Analysis of Beams and Plates Including Shear
Deformation and Rotatory Inertia by the Collocation Method

Takashi MIKAMI* and Jin YOSHIMURA*

In this paper, the collocation method is applied to the eigenvalue problems in structural mechanics. The collocation points are given by the roots of the orthogonal polynomial. In formulation, in order to decrease the computational effort, the eigenvalue equation is written in terms of the solution at the collocation points rather than the coefficients in the trial functions.

To investigate the applicability of the method, this paper deals with the stability problems of columns under non-conservative loads according to Timoshenko beam theory and the free vibrations of Mindlin plates.

From the numerical results presented in this paper, the following conclusion can be drawn;

- (1) The method is suitable for the problems considered due to its simplicity, generality, and straightforward solution procedure.
- (2) Both self-adjoint and non-self-adjoint problems can be handled easily without special treatment.
- (3) High accurate results can be obtained even with a reasonably small number of collocation points.

* Department of Civil Engineering, Hokkaido University, Sapporo