

(26) 多室断面を有する連続箱桁の一般化座標法によるマトリックス構造解析

鳥取大学工学部 O 神部俊一 鳥取大学大学院 藤井洋宣

1 緒言

薄肉箱桁は薄板要素を立体的に組み合わせて構成された閉断面構造物であるため、剪断遅れや横断面のゆがみなどの現象を呈し、箱桁内部に取り付けられた隔壁の影響とあいまって、その静力学的挙動は複雑である。箱桁のこのような力学的特性を解明すべく従来から種々の解析手法が提案されているが、なかでも一般化座標法は有限要素法や有限帯板法と比べると、かなり少ない自由度で箱桁の静力学的挙動を比較的忠実に解析することが可能であり、現状では多室断面を有する薄肉箱桁に対する有用な解析手法の1つであると考えられる。

変形法に属する一般化座標法では、平衡方程式が横断面の変形の自由度に等しい数の面内方向並びに面外方向の一般化変位に関する2階の連立常微分方程式と与えられている。これらの方程式を解くのに、一般に以下に示すような数値解法的な解析手法

- (a) 境界条件を満足する適当な固有関数を用いて一般化変位と一般化荷重とを級数に展開する、
 - (b) 境界値問題を初期値問題に変換して Runge-Kutta 法などを用いて数値積分を行なう、
 - (c) 桁軸方向に要素分割して、これに Galerkin 法を適用し有限要素法的な定式化を討る、
- のいずれかが用いられているようである。これらの解析手法は、構造物の全体的な静力学的挙動を把握する上で必ずしも見通しのよい方法であるとはいえない。

著者等は、本来変形法に属する一般化座標法に応力法的手法を導入することによって一般化変位、一般化断面力などの基本量に対する閉じた形の行列表示による解析解を求め、二室ないしは三室の閉断面を有する単純支持箱桁と片持梁形式の箱桁を解析した結果については既に報告している^(1,2)。今回は、二室の閉断面を有する二径間連続箱桁を取り上げ、箱桁内部に取り付ける異なる隔壁の個数を変化させた場合に、それらが箱桁の静力学的挙動に対して如何なる影響を及ぼすかについて解析した結果を報告する。

2 基礎方程式

基礎方程式の誘導の詳細については、既に報告しているが、その概要を示すと以下のようである。

2.1 変位成分と応力度成分

桁軸方向に z 座標、横断面輪郭線方向に S 座標、さらに両座標に直交する方向に n 座標を設定する。

面外変位に関連する一般化座標 $q_i(s)$ 、一般化変位 $U_i(z)$ ($i=1, \dots, m$) を成分とする列ベクトルをそれぞれ U とし、面内変位に関連する一般化座標 $\psi_k(s)$ 、一般化変位 $V_k(z)$ ($k=1, \dots, n$) を成分とする列ベクトルをそれぞれ V とすれば変位成分と応力度成分とは次式で与えられる。

$$\text{変位成分; } u = {}^t \psi U, \quad v = {}^t \psi V \quad (1)_{1,2}$$

$$\text{応力度成分; } \sigma_z = E {}^t \psi U', \quad \tau_{zs} = G ({}^t \psi U' + {}^t \psi V') \quad (2)_{1,2}$$

ここに、 E 、 G はそれぞれ薄板要素のヤング係数と剪断弾性係数であり、 $(\dots)'$ 、 $(\dots)''$ はそれぞれ $d(\dots)/dz$ 、 $d(\dots)/ds$ を意味する。

2.2 構成方程式

(2)_{1,2} 式を一般化断面力の定義式に代入することにより、構成方程式は次式で与えられる。

$$M = \int_F \sigma_z \Psi d\bar{F} = EAU' \quad (3)_1$$

$$Q = \int_F \tau_{zs} \Psi dF = G(C'U + RV') \quad (3)_2$$

ここに、 F は薄板要素の断面積、 $\bar{F}$ はこれに補剛材断面積を考慮に入れた換算断面積である。 A , C , R および以下において現われる B はそれぞれ次式で定義される行列である。

$$\begin{aligned} A &= \int_{\bar{F}} \Psi^* \Psi d\bar{F}, & B &= \int_F \Psi^* \Psi dF \\ C &= \int_F \Psi^* \Psi dF, & R &= \int_F \Psi^* \Psi dF \end{aligned} \quad (4)_{1 \sim 4}$$

行列 A , R が対称行列であることは明らかであるが、それぞれ一次独立な関数列 Ψ_i ($i=1, \dots, m$), Ψ_n ($n=1, \dots, n$) から構成される Gram の行列でもあるので正値定符号であり、従って、正則である。

2.3 一般化荷重

薄板要素に作用する荷重の S , z および n 方向の荷重強度をそれぞれ q_s , q_z および q_n とし、一般化座標 Ψ_n ($n=1, \dots, n$) に関連して定まる n 方向の一般化座標 χ_n ($n=1, \dots, n$) を成分とする列ベクトルを X とする。これらの記号を用いると、一般化荷重は次式によって定義される。

$$M^* = \int_S q_s \Psi ds, \quad Q^* = \int_S (q_s \Psi + q_n X) ds \quad (5)_{1,2}$$

ここに、 S は横断面輪郭線の全周である。

2.4 平衡方程式と境界条件式

横断面輪郭線方向の曲げ剛性を無視できるという仮定のもとで、構成方程式を付帯条件とするポテンシャルエネルギー停留の原理を箱桁に適用すれば、一般化断面力で表示された平衡方程式と境界条件式が最終的に次式で表される。

$$\text{平衡方程式; } M' - \gamma^{-1} H A^{-1} M + C K^{-1} Q^* + M^* = 0 \quad (6)_1$$

$$Q' + Q^* = 0 \quad (6)_2$$

ここに、 $\gamma = E/G$ である。 H は、 $H = B - C K^{-1} C$ で定義される対称行列であり、しかも正値半定符号であることが二次形式の理論を用いることによって証明できる。

$$\text{境界条件式; } {}^t(M - M_e^*) \delta U|_{z=z_1} = 0, \quad {}^t(Q - Q_e^*) \delta V|_{z=z_1} = 0 \quad (7)_{1,2}$$

$${}^t(M - M_e^*) \delta U|_{z=z_2} = 0, \quad {}^t(Q - Q_e^*) \delta V|_{z=z_2} = 0 \quad (7)_{3,4}$$

ここに、添字 e を付した量は桁の端部における値であることを意味する。

3 無次元換算量

本研究では、一般固有値問題の固有値とモーダルマトリックスの算定を含めて行列演算によって解析が行われている。これらの演算を精度よく行なうためには、無次元換算量を導入することが望ましい。そこで、全ての物理量について無次元化を計るために次のような基準量

$$\begin{aligned} t_c; & \text{薄板要素の基準厚さ,} & l_c; & \text{支間長の基準になる長さ} \\ d_c; & \text{薄板要素の基準巾,} & P_c; & \text{載荷荷重の基準量} \end{aligned}$$

を用い、全ての無次元換算量には対応する量の上に横棒を付けて表わす。

一般化座標を表示する関数として多項式を選ぶと、これらの無次元換算量は次式によって関係づけられる。

$$\text{一般化座標; } \varphi_j = \bar{\varphi}_j d_c^{m_j} \quad (j=1, \dots, m), \quad \psi_k = \bar{\psi}_k d_c^{n_k} \quad (k=1, \dots, n)$$

$$\chi_\ell = \bar{\chi}_\ell d_c^{s_\ell} \quad (\ell=1, \dots, n) \quad (8)_{1,3}$$

ここに、 m_j, n_k および s_ℓ は一般化座標 φ_j, ψ_k および χ_ℓ が有する基本量 $[L]$ の次元指数である。

(8)_{1,2} 式を (1)_{1,2} 式 から (4)_{1,4} 式迄の所要の関係式に用いることによって、以下に示す無次元換算量の表示式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{一般化変位; } U_j &= \bar{U}_j \frac{P_c}{E} d_c^{-(m_j+1)} \left(\frac{d_c}{l_c} \right) & (j=1, \dots, m) \\ V_k &= \bar{V}_k \frac{P_c}{E} d_c^{-(n_k+1)} & (k=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)_{1,2}$$

$$\begin{aligned} \text{一般化断面力; } M_j &= \bar{M}_j P_c d_c^{m_j} \left(\frac{t_c}{l_c} \right) & (j=1, \dots, m) \\ Q_k &= \bar{Q}_k P_c d_c^{n_k} \left(\frac{t_c}{l_c} \right) & (k=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)_{1,2}$$

$$\begin{aligned} \text{断面定数; } a_{ij} &= \bar{a}_{ij} d_c^{(m_i+m_j+1)} t_c & (i, j=1, \dots, m) \\ b_{ij} &= \bar{b}_{ij} d_c^{(m_i+m_j-1)} t_c & (i, j=1, \dots, m) \\ c_{ik} &= \bar{c}_{ik} d_c^{(m_i+n_k)} t_c & (i=1, \dots, m), (k=1, \dots, n) \\ r_{\ell\ell} &= \bar{r}_{\ell\ell} d_c^{(n_\ell+n_\ell+1)} t_c & (\ell, \ell=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)_{1,4}$$

ここに、 a_{ij}, b_{ij}, c_{ik} および $r_{\ell\ell}$ は行列 A, B, C および R の要素である。

次に、実用上重要な荷重である箱桁の上側フランジに鉛直下向きに作用する分布荷重 Q^* と、横方向線荷重 P^* とに対して無次元換算量を求めると、(5)₂ 式と (8)₃ 式とから以下になる。

$$\text{一般化荷重; } Q_\ell^* = \bar{Q}_\ell^* \frac{P_c}{l_c d_c} d_c^{(s_\ell+1)} \left(\frac{t_c}{l_c} \right)$$

$$P_l^* = \bar{P}_l^* \frac{P_c}{l_c} d_c^{(s_l+1)} \left(\frac{t_c}{l_c} \right) \quad (l=1, \dots, P) \quad (12)_{1,2}$$

ここに、 P は上側フランジの鉛直方向の面内変位に関する一般化座標、 χ の個数である。なお、無次元換算量を用いて(3)_{1,2}、(6)_{1,2}、(7)_{1,2}式を書き改めると以下になる。

$$\text{構成方程式； } \bar{M} = \alpha \bar{A} \bar{U}', \quad \bar{Q} = \gamma^{-1} ({}^t \bar{C} \bar{U} + \bar{R} \bar{V}') \quad (13)_{1,2}$$

$$\text{平衡方程式； } \bar{M}'' - \gamma^{-1} \alpha^{-2} \bar{H} \bar{A}^{-1} \bar{M} + \alpha^{-1} {}^t \bar{C} \bar{R}^{-1} \bar{Q}^* + \bar{M}^*{}' = 0 \quad (14)_{1,2}$$

$$\bar{Q}' + \bar{Q}^* = 0$$

ここに、 $\alpha = d_c/l_c$ であり、 $(\dots)'$ は括弧内の無次元換算量を $\bar{z} = z/l_c$ に関して微分することを意味している。

$$\text{境界条件式； } {}^t(\bar{M} - \bar{M}_c^*) \delta \bar{U} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_1} = 0, \quad {}^t(\bar{Q} - \bar{Q}_c^*) \delta \bar{V} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_1} = 0 \quad (15)_{1,2}$$

$${}^t(\bar{M} - \bar{M}_c^*) \delta \bar{U} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_2} = 0, \quad {}^t(\bar{Q} - \bar{Q}_c^*) \delta \bar{V} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_2} = 0 \quad (15)_{3,4}$$

4 解析解と解析方法

文献(1)に示されている解法手順に従えば、Fig.1に示すような载荷条件と境界条件のもとにある桁について、全く同様にして解析することができる。一般固有値問題 $\bar{H} \bar{x} = \bar{\lambda}^2 \bar{A} \bar{x}$ の $\bar{A}$ に関して正規化されたモーダルマトリックスを $\bar{X}$ とし、固有値 $\bar{\lambda}_j^2$ ($j=1, \dots, m$) から構成される対角行列を $\bar{\Omega}_m^2 = \text{diag}(\bar{\omega}_j^2) = \gamma^{-1} \alpha^{-2} \text{diag}(\bar{\lambda}_j^2)$ とする。(14)₁式に $\bar{M} = \bar{A} \bar{X} \bar{\tilde{M}}$ なる変換を施して対角化し、境界条件を適用して解けば、 $\bar{\tilde{M}}$ に対する解として次式を得る。

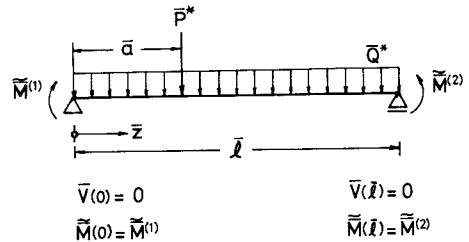


Fig. 1 Analytical Structural Model

$$\bar{\tilde{M}}(\bar{z}) = \bar{K}_1(\bar{z}) \bar{\tilde{M}}^{(1)} + \bar{K}_2(\bar{z}) \bar{\tilde{M}}^{(2)} + \bar{K}_3(\bar{z}) {}^t \bar{X} \bar{Q}^* + \bar{K}_4(\bar{z}) {}^t \bar{X} \bar{P}^* \quad (16)$$

$\bar{K}_1(\bar{z})$, $\bar{K}_2(\bar{z})$, $\bar{K}_3(\bar{z})$ および $\bar{K}_4(\bar{z})$ は次式で定義される対角行列である。

$$\bar{K}_1(\bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\bar{z}}{l} \bar{E}_p & \bar{O}_{p3} \\ \bar{O}_{3p} & \bar{S} \bar{h}_q^{-1}(\bar{z}) \bar{S} \bar{h}_q(\bar{z}) \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_2(\bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\bar{z}}{l} \bar{E}_p & \bar{O}_{p3} \\ \bar{O}_{3p} & \bar{S} \bar{h}_q^{-1}(\bar{z}) \bar{S} \bar{h}_q(\bar{z}) \end{bmatrix} \quad (17)_{1,2}$$

$$\bar{K}_3(\bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{z} \bar{E}_p & \bar{O}_{p3} \\ \bar{O}_{3p} & \bar{\Omega}_q^{-2} (\bar{E}_q - \bar{S} \bar{h}_q(\bar{z}) \bar{S} \bar{h}_q^{-1}(\bar{z}) - \bar{S} \bar{h}_q^{-1}(\bar{z}) \bar{S} \bar{h}_q(\bar{z})) \end{bmatrix} \quad (17)_3$$

$$\bar{K}_4(\bar{z}) = \left(\begin{array}{c|c} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}} \bar{z} - (\bar{z} - \bar{\alpha}) u(\bar{z} - \bar{\alpha}) \right\} \bar{E}_p & \bar{O}_{p3} \\ \hline \bar{O}_{qP} & \bar{\Omega}_4^{-1} \left\{ \bar{S}h_g(\bar{z}) \bar{S}h_g(\bar{\alpha}) \bar{S}h_g(\bar{z}) - \bar{S}h_g(\bar{z} - \bar{\alpha}) u(\bar{z} - \bar{\alpha}) \right\} \end{array} \right) \quad (17)_4$$

ここに、 $p + q = m$ (p は固有値零の重複度である)

$$\bar{S}h_g(\bar{z}) = \text{diag}(\sinh \bar{\omega}_j \bar{z}) \quad (j=1, \dots, m), \quad \bar{z} = \bar{l} - \bar{z}, \quad \bar{\alpha} = \bar{l} - \bar{\alpha}$$

$u(\bar{z} - \bar{\alpha})$ は単位段階関数である。

$\bar{V}(\bar{z})$, $\bar{U}(\bar{z})$ に対する解析解は、上記の $\bar{M}(\bar{z})$ を残りの平衡方程式 (14)₂ と構成方程式 (13)₂ に用いれば求まるが、ここでは省略する。

これらの解析解を用いると、内部に剛な隔壁が取り付けられ両端が単純支持されに連続箱桁を容易に解析することができる。それには、隔壁の縁に作用する剪断流から構成される一般化断面力と中間支承上の断面に作用する一般化断面力 $\bar{M}$ を不静定量に選り、これらをそれぞれ対応する一般化変位 $\bar{V}$ と $\bar{U}$ とに対する連続条件から決定すればよい。

5 数値計算例

5.1 構造モデル

計算に用いた箱桁の断面諸元と載荷状態とを Fig. 2 に示し、隔壁の配置図を Fig. 3 に示す。

Fig. 2 において、括弧内の数値は補剛材の断面積を考慮に入れた換算鋼板厚である。

載荷荷重は、鋼道路橋示方書の活荷重に関する規定に準拠して定められている。

5.2 一般化座標の選定

直線箱桁の場合、鉛直対称軸を有するから荷重を対称成分と逆対称成分とに分解して取り扱えば、対応する一般化座標も対称モードと逆対称モードとになり、計算を進める上で好都合である。

一般化座標の形状を Fig. 4 から Fig. 6 に示してある。面外変位に関連する全ての一般化座標 φ_j ($j=1, \dots, 8$) は一様な軸方向変位に対応する一般化座標と直交条件を満たすように定めてある。

このようにすれば、行列 B が正則となり、一般化変位 $\bar{U}$ に対する解析解が求まるからである。

以下においては、横断面のゆがみに関連する一般化座標の定め方について説明する。 φ_2 と φ_8 とはそれぞれ横断面の対称ゆがみと逆対称ゆがみに起因するそりに対応する一般化座標で文献

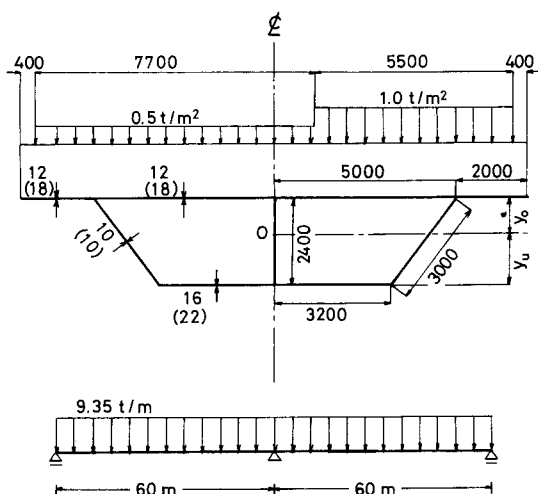


Fig. 2 Cross Sectional Dimensions and Loading Condition

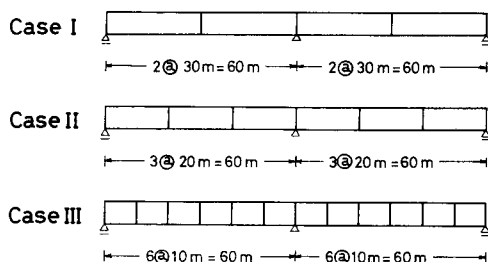


Fig. 3 Diaphragm Spacing

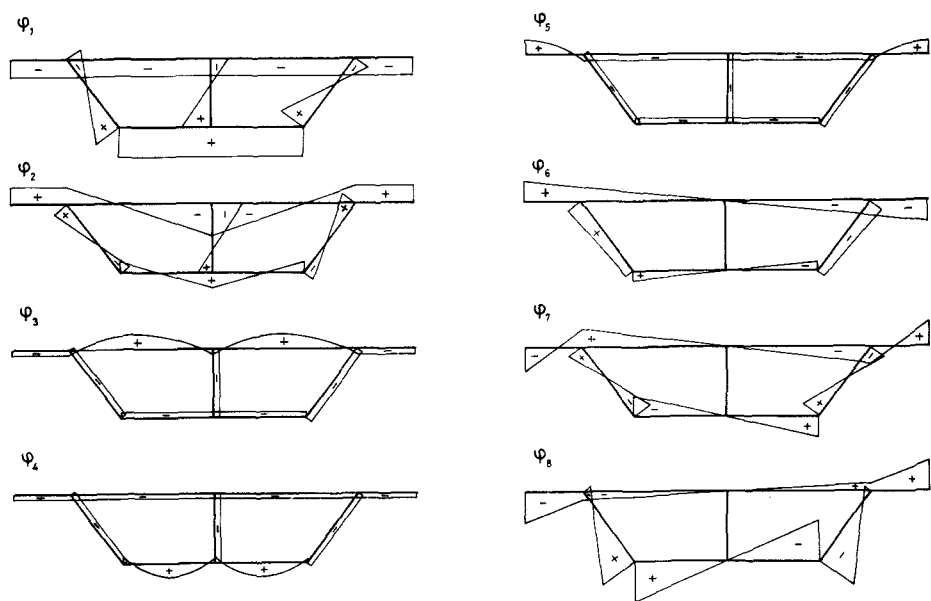


Fig. 4 Longitudinal Generalized Coordinates

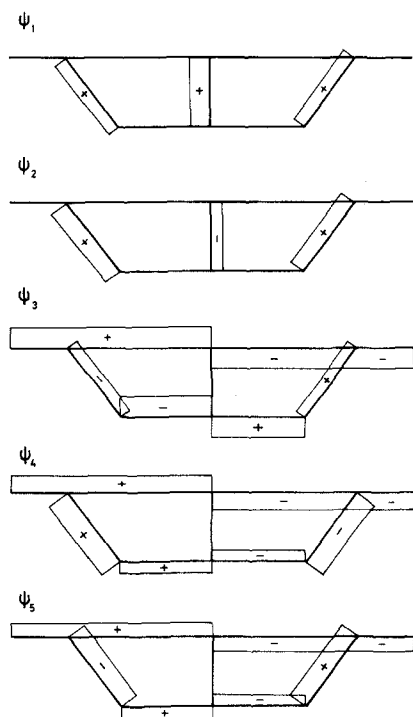


Fig. 5 Transverse Generalized Coordinates

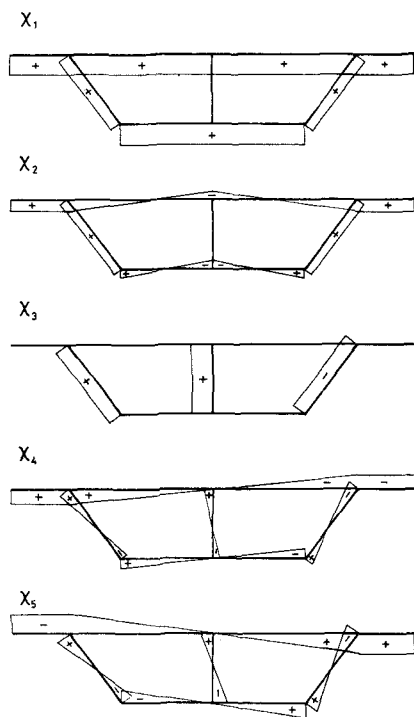


Fig. 6 Transverse Generalized Coordinates Normal to Plate Elements

(3)に依拠して定められている。 ψ_2 は φ_2 に対応した面内変位に関連する一般化座標であるが、横断面のゆがみが水平軸周りの曲げに対して独立であるという考えに基づき、このゆがみ変形が初等曲げ理論から算定される剪断流に対して仕事をしないという条件を設定することによって定められている。同様に、 ψ_3 は φ_3 に対応しており、このゆがみ変形が単純撓り理論による剪断流に対して仕事をしないという条件から定められている。

5.3 計算結果

Fig.7, Fig.8は、横断面の対称ゆがみに対応する一般化変位 $\bar{V}_2$ と一般化断面力 $\bar{M}_2$ の桁軸方向の分布状態が剛な隔壁の配置によって如何なる影響を受けるかを示している。Case Iの隔壁の配置に対して算定された垂直応力度の代表的な二つの位置にある横断面内の分布をFig.9, Fig.10に示す。破線は初等曲げ理論に基づいて算出された値であり、括弧内の数字によって示されている。

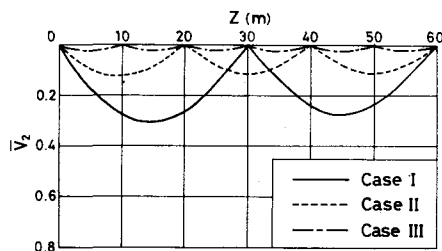


Fig. 7 Transverse Generalized Coordinates Related to Symmetrical Distorsion of a Cross Section

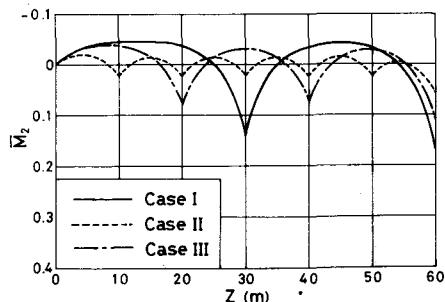


Fig. 8 Longitudinal Internal Generalized Force Related to Symmetrical Distorsion of a Cross Section

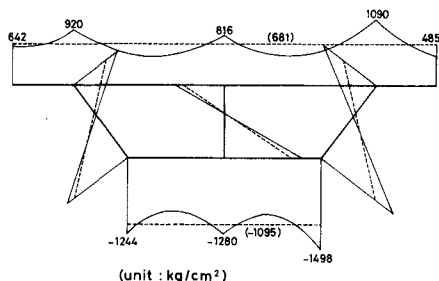


Fig. 9 Normal Stress Distribution on the Cross Section at the Intermediate Support (Case I)

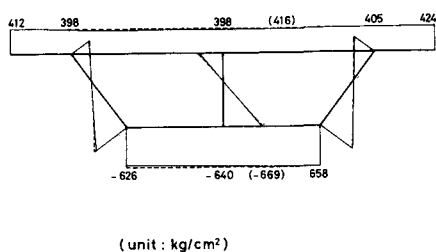


Fig.10 Normal Stress Distribution on the Cross Section Located at $z = 55m$ (Case I)

6 結論

1. 行列演算を精度よく行なえるよう一般座標法における基本量と基礎方程式の全てを無次元化する手法を示した。
2. 隔壁の個数を増やすと横断面のゆがみが急激に減少しそり応力を減少させる上で非常に効果的である。
3. 剪断遅れ現象は、中間支承上断面において顕著に現われ支間中央に向って急激に減衰する。

参考文献

- (1) 神部俊一・藤井洋宣：薄肉箱桁のマトリックス構造解析，鳥取大学工学部研究報告，第10巻第1号，pp. 167~174，1979。
- (2) 神部俊一・藤井洋宣：片持ち梁形式鋼製箱桁のマトリックス構造解析，鳥取大学工学部研究報告，第11巻，pp. 310~317（印刷中）。
- (3) G. Sedlacek: Die Anwendung der erweiterten Biege und Verdrehtheorie auf die Berechnung von Kasten-trägern mit verformbarem Querschnitt, Strasse Brücke Tunnel 9/1971

A Matrix Method of Analysis for a Continuous Box Girder
with Multi-celled Cross Sections
by Generalized Coordinate Method

by
Shun-ichi KAMBE* and Hironobu FUJII**

This paper presents a matrix method for analysing a continuous steel box girder with multi-celled cross sections by using the generalized coordinate method, developed by V. Z. Vlasov. In this paper, a technique to represent all of the physical quantities and basic equations in a non-dimensional form. This paper uses the force method in developing a technique for obtaining the closed form solutions for the generalized displacements and internal generalized forces, thereby making it possible to analyse a continuous box girder. The procedure is as follows: The equilibrium equations can be expressed in terms of the internal generalized forces under the assumption that the frame flexural rigidity of a cross section is negligible. Then, we find the closed form solutions for the internal generalized forces acting in the longitudinal direction by diagonalizing the corresponding matrix equation by the use of the modal matrix of a generalized eigen-value problem. With these solutions, we can determine the generalized displacement from the constitutive equations. Once the closed form solutions for these quantities are obtained, we can analyse a continuous box girder by the idea of the force method in the following way;

- (1) Select the internal generalized forces acting in the longitudinal direction at the intermediate supports as redundants.
- (2) Determine the redundants from the conditions of continuity for the corresponding generalized displacements.

The proposed matrix method may prove useful in analysing systematically the salient behavioral characteristics of a multi-celled continuous box girder caused by

- (a) shear lag phenomenon,
- (b) cross-sectional distortion,
- (c) settlement of rigid interior and end diaphragms.

It was found from the numerical calculations that rigid interior diaphragms were effective in limiting distortional deformation of the cross section and shear-lag phenomenon appeared predominantly on the cross section at the intermediate support of a continuous girder and decayed quickly toward the center of the span.

* Department of Ocean Civil Engineering, Tottori University, Tottori.

** Student in the Master Course of Tottori University.