

(25) 連続体の弾性安定解析

角野 晃二 小沢 善隆

三井 知男

序 連続体に作用する Follower Force は一般には Nonconservative であるが、或種の境界条件のもとでは Conservative になり、生じる不安定現象が Divergence type に限られることはよく知られているところであるが、不安定臨界前の変形が複雑な形状を示す弾性体においては、その安定域が極めて狭く、ごく僅かの Geometrical または Dynamical Disturbance によつて容易に Flutter type または Internal Resonance による Instability の生じる場合のあることを具体例を挙げて示すのが本論の目的である。

実験や実際の構造物においては、理想的な境界条件を満足させることは困難であり、何んらかの不整形はつねに存在するものと考えらるべきであり、負荷条件もまたしかりである。従つて上述のような配慮の意義は大きい。本論で述べる Circular Arch の例は不安定臨界前の変形が単純な場合の典型であり、部分球形殻は複雑な場合の例である。

(1) 部分球形殻 一様外圧を受ける周辺固定部分球形殻の挫屈解析については、過去2、30年間に膨大な研究の蓄積があり現在なお盛んに研究されているが、その結果もよく知られており、筆者がここに詳しく紹介するまでもないのであるが、本論への前提として簡単に概略を述べる。すなわち 実験による限界圧は理論計算によるそれより可成低いがこの実験値と解析値との不一致の原因は (i) 形状係数 $\lambda > 5.5$ の殻では非軸対称分岐挫屈の発生 (ii) 初期形状不整形の存在にあるとするもので、約20年前に得られた Budiansky, B., Weinitschke, H. J., Huang, N.C. 及び Keller, H. B. and Wolf, A. W. の結果が現在においても信頼され、最近の数値解析結果もこれらを裏付けており、また筆者等もそれを正確に認めている。しかし Sunakawa, M. and Ichida, K. の実験は挫屈直前直後の変形は軸対称であることを主張しており、上の解析的結論に対して否定的である。また最近形状初期不整形を精密に計測した実験が行われ、初期不整形効果について、解析値とよい一致をみており、非軸対称分岐に対しては肯定的である。しかし軸対称挫屈例がないわけではなく、なお断定的結論は避けるべきものと思われる。

(i) 平衡解析 筆者等は従来殆んど大多数の研究者が採用してきた Reipner, E. または Marguerre, K. 基礎方程式が大胆な省略のもとに成立していることに注意し、形状parameterとして a/h (半径・殻厚比)、 β (半開角) を独立に含み、外圧の従動性も考慮に入れた精密な非線形基礎微分方程式を立て、代数関数または Bessel 関数系を座標関数とする Galerkin-Method で解き、従来結果と比較した。しかし得られた結果は Global には Budiansky 等の結果とよい一致を示していると言えよう。逆に言えば Reipner または Marguerre 方程式による解は形状係数の可成広範囲 (少なくとも $\beta \leq \pi/3$) においても充分信頼し得る2ことが明らかになった。その理由としては挫屈直前の最大撓みがせいぜい殻厚の1/2程度であり、従つて開角が大きい殻においても高次非線形項及び圧力の従動性の影響が微小で無視し得るためと考えられる。

記号. a : 球の曲率半径, h : 殻厚(一定), β : 半開角(rad), $H = a(1 - \cos\beta)$, $L = a\beta$: 半弧長
 θ, φ : 経線及緯線方向座標変数(rad), $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\beta \leq \varphi \leq +\beta$, $\alpha = \varphi/\beta$, $-1 \leq \alpha \leq +1$.
 w, v : 中央面の法線方向及面内緯線方向変位, $y = w/h$, $z = v/\beta h$: 無次元化変位.
 $(\cdot)' = \partial_{\varphi}(\cdot)$, $(\cdot)'' = \partial_{\alpha}(\cdot)$, E : Young係数, ν : Poisson比, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 材曲げ剛度,
 p : 一様外圧(単位面積), $q = p/2E(a/h)^2$: 無次元化外圧, p_0 : 完全球殻線形古典性外圧.
 $q_0 = p_0/2E(a/h)^2 = 1/\sqrt{3(1-\nu^2)} \approx 0.605$: 完全球殻の無次元化古典外圧.
 $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$: 経線及緯線方向中央面内歪, N_θ, N_φ : 時々同方向面内
合応力, M_θ, M_φ : それぞれ同方向断面曲げ合応力, Q_φ : 緯線方向
断面剪断合応力.

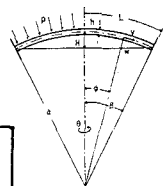


Fig 1

(ii)

Fig 2 A, B はそれぞれ
代数関数, Bessel関数
を用いた解析によつて
得られた軸対称最大
圧と形状係数 β, α
 λ との関係を示す.
 a/h は 100 に定めてある
ので形状係数は β^2
を示せばよいのであるが
従来の 1 parameter
 α (or λ) による解析
結果と比較するため,
 $\alpha(\lambda)$ 値も並記した.

この図によつて, 従来の
解析結果とよりも
筆者等の A, B 2 解
析が更によい一致を
示すことが明らかで
あろう.

図中の I, II ~ V は
撓みの緯線方向半波
数を示し, 最大圧に達
するまでは波数変化
のある場合もみられる
(これは一種の2次性

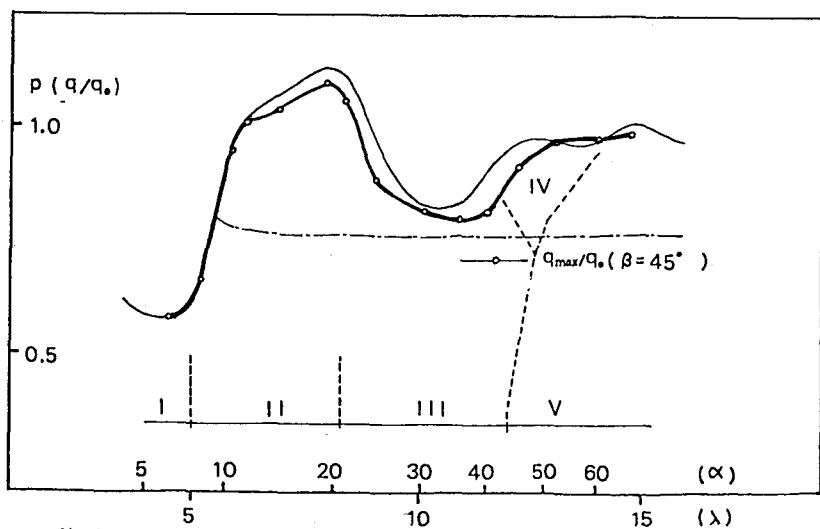
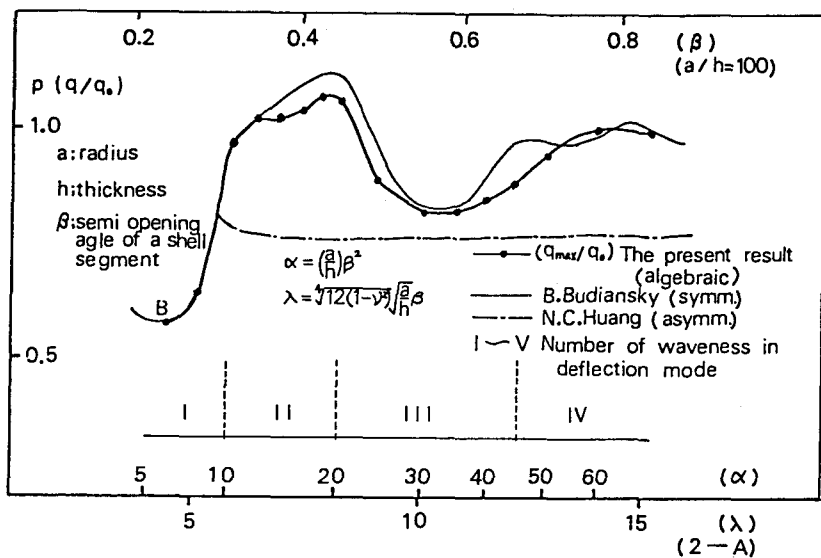


Fig. 2 A, B

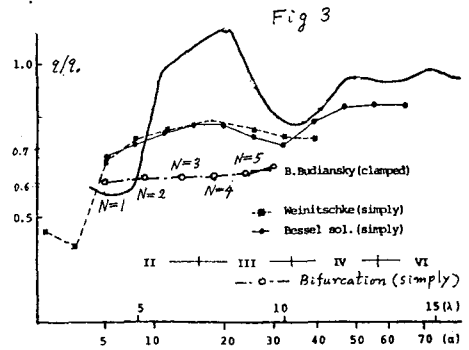
P vs α (or λ) curves

(2-B)

屈現象とみることもできる。) 単純支持 (周辺で $w=0, v=0, M_\theta=0$) の場合解析は比較的少ないが, Fig 3 に 筆者等の結果と Weinitschke のものを示した。なお筆者等の代数関数と採用した結果は 図の前者と極めてよく一致を示すので省略した。

なお単純支持の場合の実験はその困難性故行われていない。

なお $d=20, d=45$ の周辺固定殻における 押圧直前の 撓み分布, 応力 (N_θ) 分布の実験値 (Sunakawa-Ichida) と 筆者等の解析における 平衡 path 上の $p=0.5 \sim 0.6$ 付近のそれとを対比すると, 定性的にもまた定量的にも極めてよく一致して居り, 従って この時点迄は問題でなく, この後, 上述の軸対稱最大圧に達することなく, 必ず非対称分岐が生じるのかどうか問題であると 筆者等は考える。



(2) Dynamic Method による Stability Analysis. (1) で得た Equilibrium Path 上の各時点 (State) において 軸対称または非軸対称 mode の微小 disturbance を与え, 動的応答を調べるのであるが, この場合 Conservative な問題であるから, 不安定は Divergence type に限られる。 (i) 先づ非軸対称 disturbance (経線方向 $\cos N\theta$ 展開, 次数 $N=1, 2, \dots$) に対しては, Huang 等が隣接平衡状態 (非軸対称) の存在条件を Euler Method で求めたのと理論的には全く同当である。結果を Fig 3 ~ 6 に示す。

単純支持の場合 非対称分岐圧と軸対称最大圧との差は 固定の場合ほど一般的に大きくない。また 固定の場合 $d=10$ では $N=2$ mode に, $d=40 \sim 50$ では $N=7 \sim 8$ mode に最小分岐圧が存在するが $d=35 \sim 45$ では軸対称最大圧との差は僅少であり, この解析結果から必ず分岐が優先するとは言いがたいように思われる。(固定では $N=1$ mode は現れないが単純支持では $d=5$ で $q/q_0 = 0.62$ $N=1$ を示す (Fig 3)).

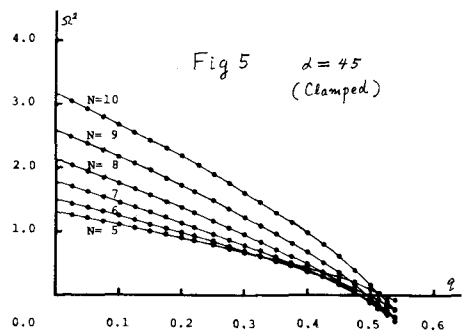
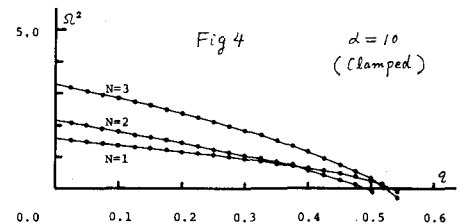
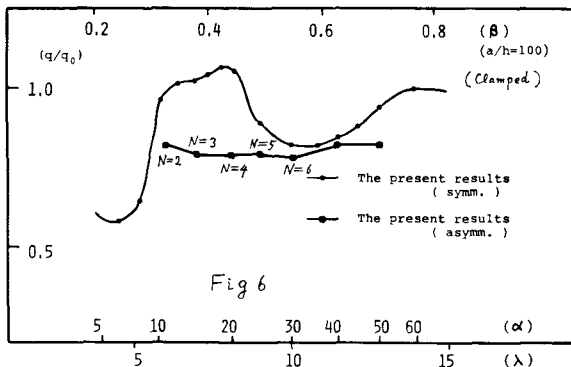


Fig 4, 5 は各展回次数 N に対する最小固有値 Ω^2 の圧力 q による変化をまとめて示したものである (従って各次数 N に対する第 2 以上の固有値は省略されている)

(ii) 軸対称 Disturbance による固有値—圧力曲線を Fig 7~9 に示す。ここで非軸対称固有値にはみられなかった特徴として Equilibrium path の Divergence Point に達するまでの途中に主要固有値の非常に接近するものがある。例えば固定 $\alpha = 20$ における $q = 0.6$, 固定 $\alpha = 45$ における $q = 0.3$, 単純支持 $\alpha = 40$ における 0.3 近傍である。これはこの近傍において安定域が狭くなっていることを示し、次に述べるような種々の検討が必要となる。なお固有値 0 を与える Divergence Point の圧力値 q は Equilibrium Path の First Max. Value とよく一致することが認められる。

(3) Nonconservative Disturbance 付加

による安定域の検討

上述のような隣接固有値をもつ平衡状態においては、a) 極く僅かな動的外力の付加 (例えば "Step Load") によって Internal Resonance による振動の生じる可能性があり、線形及び非線形変分方程式により動的性状を調べる必要がある。

b) 周辺支持条件を僅かに緩めることによって Normal follower force (Hydro static pressure) は NonConservative になる。従って周辺条件を少々変化させた平衡状態を求めその安定性を調べる

c) Tangential Follower Force は周辺支持条件のもとでも Nonconservative であるので、これを僅か附加した場合の Equilibrium Path を求め対応状態の安定性の变化を調べる
ここで (c) による検討結果を示す。

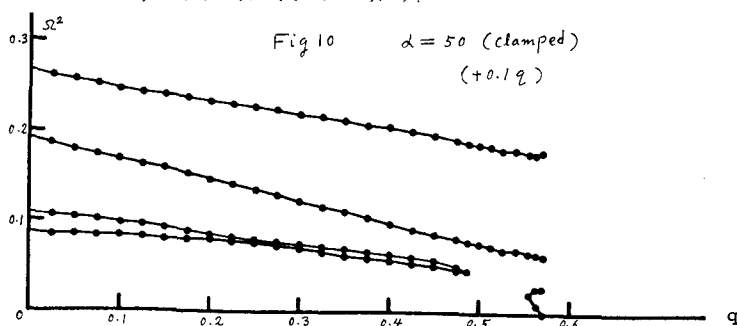
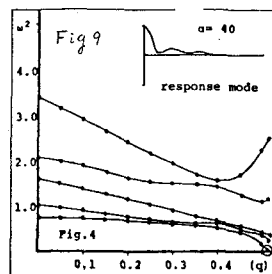
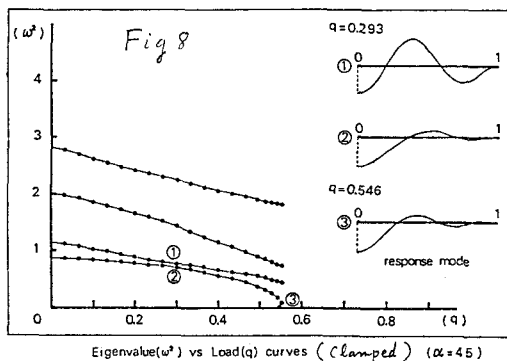
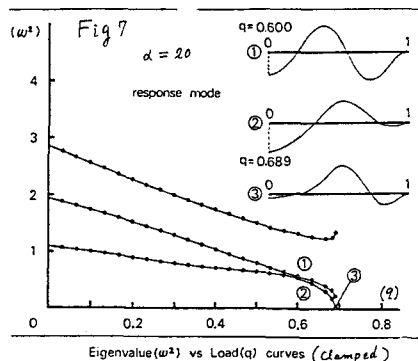
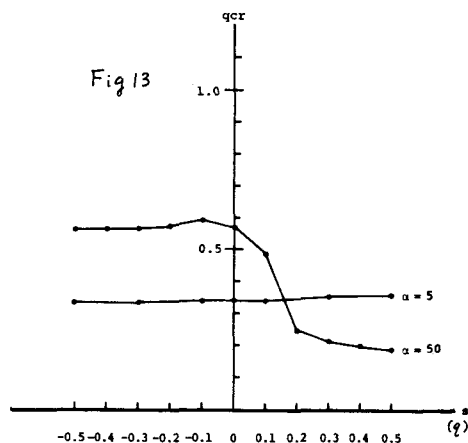
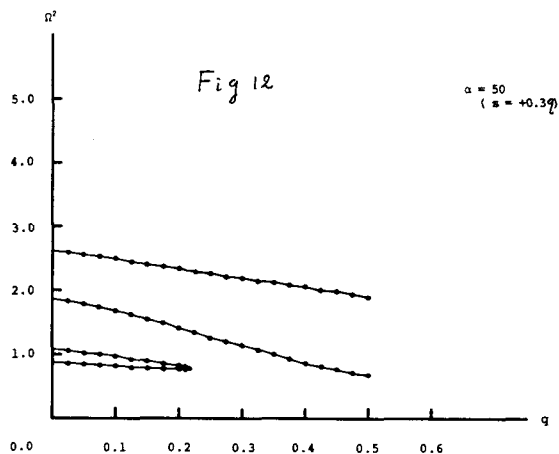


Fig 10, 11 に 綫線方向に一樣な Tangential Follower Force $+0.1q$, $+0.3q$ を附加した平衡 path の固有値—圧力曲線を示す。それぞれ $q = 0.49$, $q = 0.23$ 近傍で固有値は複素数になり、Flutter Instability を起こすことを示している。なお Follower Force 附加量と固有値が複素数になる限界圧力との関係を Fig 13 に示す。 $\alpha = 50$ では $+0.15q$ で限界圧は半減するが逆方向の負荷には反応しない。また近接固有値をも

ない $\alpha = 5$ の殻では 負荷圧の量, 向き如何に拘らず 反応の方向とが認められる。



以上の解析結果より 軸非対称分岐 (bifurcation), 軸対称 (Snapthrough) 何れも不安定が優先するものは 充分検討の余地があると思われる。

References

- (1) Budiansky, B., Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells. Proc. IUTAM Symp. On the Theory of Elastic Shells, Delft, Netherlands (1959)
- (2) Weinitschke, H.J., On the Stability Problem for Shallow Spherical Shells, J. Math. and Phys. (1960)
- (3) Keller, H.B. and Wolfe, A.W., On the Nonunique Equilibrium States of Buckling Mechanism of Spherical Shells. Appl. Math. (1963)
- (4) Huang, N.C., Unsymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells. J.AIAA (1963)
- (5) Weinitschke, H.J., Asymmetric Buckling of Clamped Spherical Shells. NASA TN D1510, Washington, D.C. (1962)
- (6) Tillman, S.C., On the Buckling Behavior of Shallow Spherical Caps under a Uniform Pressure Load. Int. J. Solids. Structures. Vol. 6. (1970)
- (7) Sumino, K. and Akizuki, K., An introduction to the Study of Buckling Behavior of Spherical Shells. Transaction of The Architectural Institute of Japan. No. 253 Mar. 1977 (in Japanese)
- (8) Sunakawa, M. and Ichida, K., Buckling of the Spherical Shells subjected to External Pressure. Journal of

なか Circular Arch の解析例については 付録に示すはとどめるが 両端 Hing, 固定, 何れにおいても 半周角 β の増大はともなつて 不安定 mode の優先順位は

Snap $\rightarrow$ Bifurcation $\rightarrow$ Snap

β	5°	128°	180°
	(Hing)	(Hing)	
β	15°	120°	180°
	(clamped)	(clamped)	

のように変化するが, 近接固有値をもつ 平衡状態は存在しない。これは 不安定変形 mode が極めて単純なためと考えられる。

終りに, 筆者等は 安定域の構造と理論的に分析する必要性を主張する。

the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences.

Vol. 21. No. 232 (1973)

- (9) Sunakawa, M., A Note on Stability of Shells. Report of Inst. of Space & Aeronautical Science. Univ. of Tokyo (1973)

- (10) Uemura, M., Axisymmetrical Buckling of Initially Deformed Shallow Spherical Shell under External Pressure. Int. J. Nonlinear Mechanics Vol. 6. (1971)

- (11) 山田聖志, 内山和夫, 山田大寿

外圧を受ける部分球殻の座屈に関する実験的研究 I, II.

第29, 30回応用力学連合講演会論文抄録集(1979, 1980).

角野晃二 日本大学生産工学部

教授, 工博

小沢善隆 同 助手, 工修

三井和男 同 助手, 工修

(Appendix)

Nonlinear Basic Equations

Method of Analysis

$$N_{\psi}^* + (N_{\psi} - N_{\theta}) \cot \psi + Q_{\psi} - p(w' + v) = 0 \quad (1) \quad y = \sum_k a_k f_k(x), \quad z = \sum_{\ell} a_{\ell+n} g_{\ell}(x)$$

$$Q_{\psi}^* + Q_{\psi} \cot \psi - N_{\psi} - N_{\theta} - p(a + v' + v \cot \psi - 2w) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (\ell = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$- \frac{1}{a} N_{\psi} (w'' + 2v' - w)$$

$$f_k = x^{2m} (1-x^2)^{2n}, \quad g_{\ell} = x (1-x^2)^{2\ell}$$

$$- \frac{1}{a} N_{\theta} (w' \cot \psi + 2v \cot \psi - w)$$

$$(m, n) = (0, 1), (1, 1), (2, 1)$$

$$(3, 1), (6, 1), (1, 4), (2, 4)$$

$$- \frac{1}{a} [N_{\psi}^* + (N_{\psi} - N_{\theta}) \cot \psi] (w' + v) = 0 \quad (2)$$

$$(m, n) = (0, 1), (2, 1), (3, 1)$$

$$(6, 1), (1, 4), (2, 4)$$

$$Q_{\psi} = \frac{1}{a} (M_{\psi}^* + M_{\psi} \cot \psi - M_{\theta} \cot \psi) \quad (3)$$

$$f_7 = (1-x^2)^2 (x^2 - \frac{1}{4})$$

$$M_{\theta} = D(k_{\theta} + v k_{\psi}), \quad M_{\psi} = D(k_{\psi} + v k_{\theta}) \quad (4)$$

$$f_k = \frac{I_0(\alpha_k x)}{I_0(\alpha_k)} - \frac{J_0(\alpha_k x)}{J_0(\alpha_k)}$$

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\psi}), \quad N_{\psi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\psi} + \nu \epsilon_{\theta}) \quad (5)$$

$$\sum_j^{2n+1} E_{jm} a_j + \sum_j^{2n+1} \sum_k^{2n+1} E_{jkm} a_j a_k$$

$$k_{\psi} = \frac{1}{a^2} (w' + v), \quad k_{\theta} = \frac{1}{a^2} (w' + v) \cot \psi \quad (6)$$

$$+ \sum_j^{2n+1} \sum_k^{2n+1} \sum_m^{2n+1} E_{jkm} a_j a_k a_m = 0$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{a^2} (v \cot \psi - w) + \frac{1}{2a^2} (v \cot \psi - w)^2 \quad (7)$$

$$(a_{2n+1} = q)$$

$$\epsilon_{\psi} = \frac{1}{a} (v' - w) + \frac{1}{2a^2} [(\dot{v} - w)^2 + (\dot{w} + v)^2]$$

$$\delta y(t, x) = \sum_k \delta a_k(t) \cdot f_k(x),$$

variational differential equations

$$\delta z(t, x) = \sum_{\ell} \delta a_{\ell+n}(t) \cdot g_{\ell}(x)$$

$$\delta N_{\psi}^* + (\delta N_{\psi} - \delta N_{\theta}) \cot \psi - p(\delta \dot{w} + \delta v) - \delta a h \delta v'' = 0$$

$$\delta a_k(t) = X_k e^{i\omega t},$$

$$\delta Q_{\psi}^* + \delta Q_{\psi} \cot \psi - \delta N_{\psi} - \delta N_{\theta} - p(\delta v'' + \cot \psi \delta v - 2\delta w)$$

$$\lambda^2 = \rho a^2 \frac{1-\nu^2}{E} \omega^2$$

$$- \frac{1}{a} (N_{\psi} \delta w'' + \delta N_{\psi} w'') - \frac{1}{a} (N_{\theta} \delta \dot{w} + \delta N_{\theta} \dot{w}) + \rho a h \delta w'' = 0$$

$$(k, \ell = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Stability Analysis for Elastic Continua.

Kohji Sumino , Yoshitaka Ozawa ,
Kazuo Mitzui .

Abstract - The axisymmetrical buckling behavior of clamped spherical shells with considerably small opening angle under uniform external quasistatic pressure is studied.

The equilibrium paths obtained by analyzing of the non-linear basic differential equations with two independent geometrical parameters, are compared with those of the previous works and the stability of the equilibrium paths is examined both statically and dynamically.

Analytical Results and Conclusions

- 1) The axisymmetric equilibrium solutions (both of algebraic and Bessel) in the present analysis have been in good agreement with those of the previous works in spite of the difference in the governing equations because of small deformation (as same order as shell thickness at most) (Figs. 1 ~ 10).
- 2) In the analysis of the variational equations without damping term, all eigenvalues (w_k^2) obtained are positive real numbers and distinct (no degeneracy) in the region before arriving at a first maximum value of pressure on the equilibrium path consequently the equilibrium configurations are clearly observed to be statically stable through the region. (Figs. 11, 12)

- 3) And then the first eigenvalue (w_1^2) has become to zero at the above maximum pressure. It is therefore shown that at this point on the path, an instability of divergence type which is usually called static snap-through takes place.
- 4) However, two or three eigenvalues have drawn extremely near each other in some ranges on the above equilibrium loading path and the corresponding modes of oscillation have become to similar. This tendency has also been remarkable with increasing $\alpha(\lambda)^*$. It may be accordingly seen that an Internal Resonance can be easily excited in these ranges. *(See Figs. 1 ~ 2)
- 5) Moreover it has been shown that a Flutter type instability occurs at the above range in the analysis of the variational equations modified by taking into account very small disturbances (Fig. 12) where these disturbances have been assumed to be axisymmetric.
- 6) From these results the author considers as follows:
there also exists the possibility of dynamically buckling (axisymmetric or asymmetric) by flutter type in a practical process of quasistatic loading and the fluctuation in the experimental data of spherical shells is due to these dynamic excitements.