

(24) 接線方向従動荷重を受ける非線型弾性柱の曲げ座屈

労働省 吉川 幸雄

1. はじめに

最近の土木構造物等の軽量化や最適化に伴って、座屈などの安定問題では、より正確な外力の算定が必要となり、非保存的な外力を受ける構造物については動的安定判別法による座屈解析が進展しつつある。この問題は Fig-1(a) に示した接線方向従動力 P を受ける弾性柱の座屈を扱った Beck の問題に端を発している¹⁾。

ところで最近では構造材料も新材料の開発や複合材料の出現などが顕著になっている。このような材料に対して、座屈強度の解明は保存力を受ける系では静的安定解析がなされてきた。しかし、それらの材料が明らかに非線型な弾性を示して、かつ外力もより広範な非保存力であるときには、もはや従来のような静的解析では不十分であろう。このような系の不安定現象の解明には動的安定判別法が適切といえよう。

そこで本研究では Fig-1(a) に示した Beck の柱の問題に対して、接線方向従動力 P を受ける柱の材料が非線型弾性を示す Fig-1(b) のような関係を有するときの座屈問題を動的安定判別法によって解明した。

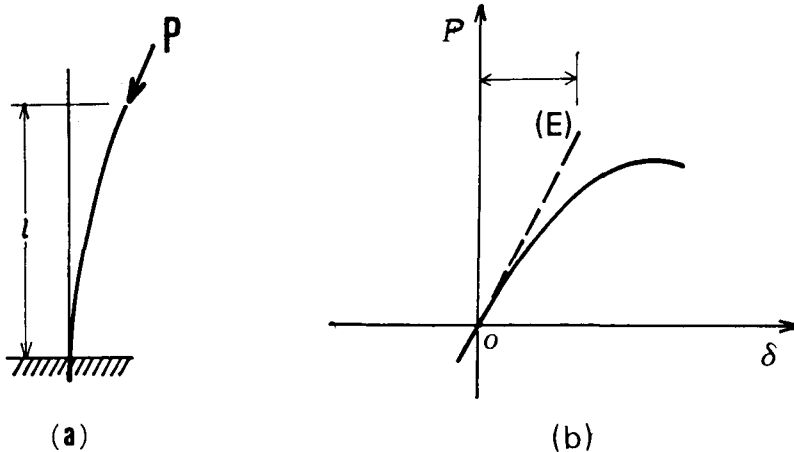


Fig-1 Beck's rod & $P-\delta$ Curve

2. 非線型弾性柱のモデル

Fig-1(a) に与えた連続体の柱の安定問題が非保存系で論じられるときには、その系の不安定現象を正確に評価するため多自由度力学モデルに一度、系を置き換えて解析する方法がとられてきた²⁾。本研究においても、系が非保存的であることと、さらに柱自身が材料非線型性を有していることから、非保存系における材料の非線型性の不安定現象に与える効果というものを基本的に捉えるために

Fig-2 に与える2自由度力学モデルを用いる。このモデルにおいて、柱の非線型弾性を表現するために、柱の復元モーメントを、非線型弾性を有するヒンジによって一連の剛部材を結合させて実現させている。すなわち、このヒンジは、Fig-1(b)に示すカー変位特性を有していると仮定し、このような関係をここでは微小な相対変位 δ に対して、外力 P が

$$P = c \cdot \delta - d \cdot \delta^2 \quad (1)$$

$(c > 0, d > 0)$

という表現で示されるものとする。ここで c と d はそれぞれ線型バネ定数と非線型バネ定数で、これらはまたそれぞれ構造部材でいう初期線型曲げ剛性 EI と非線型曲げ剛性に対応している。

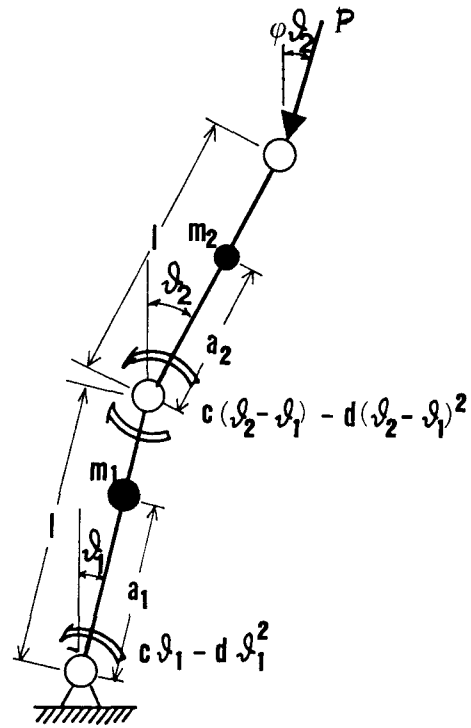


Fig-2

Two-degree-of-freedom model

この(1)で与えられる特性を有するヒンジで結合されたモデル柱の剛部材の共通長さを l 、そして集中質量を m_1, m_2 としそれぞれの部材上での位置 a_1, a_2 を任意にとるとき、この柱に非保存力 P が作用しているときの運動方程式を求める。Fig-2 において外力 P は柱の先端の接線角の φ 倍であるような角度に常に保たれて作用すると仮定しているが、ここでは Fig-1(a) の Beck の問題に対応する接線方向従動力を扱おうので $\varphi = 1$ とする。そこで各質点の微小な回転角 ϑ_1, ϑ_2 とし、(1) 式の相対変位 δ を $\delta = \vartheta_i - \vartheta_{i-1}$ (ただし、 $i = 1, 2$; $\vartheta_0 = 0$) とすれば、この非線型弾性モデル柱の運動方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\vartheta}_2 + (2c - Pl) \vartheta_1 + (Pl - c) \vartheta_2 - d(2\vartheta_1 \vartheta_2 - \vartheta_2^2) &= 0 \\ m_2 l a_2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\vartheta}_2 - c \vartheta_1 + c \vartheta_2 - d(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで変数の上のドットは時間微分を示している。

3. 固有振動数

以下の解析のために、運動方程式(2)を無次元化して、次のパラメータ

$$K^2 = \frac{Pl}{C}, \quad \beta = \frac{d}{C} \quad (3)$$

を導入すれば、それぞれ K^2 は荷重パラメータ、 β は非線型弾性度を示すパラメータである。さらに(2)式において、 $\beta = 0$ とした項すなわち線型項を対角化しておくために基準座標 (ξ_1, ξ_2) を用いて変換すると、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= -\omega_1^2 \xi_1 + \beta (e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2 \xi_1 + e_3 \xi_2^2) \\ \ddot{\xi}_2 &= -\omega_2^2 \xi_2 + \beta (e_4 \xi_1^2 + e_5 \xi_2 \xi_1 + e_6 \xi_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。ここで ω_1^2, ω_2^2 は線型項から導出される振動数であり、方程式(2)において非線型項を無視したときに得られる振動数方程式の2根である。したがって Fig-2 に示す非線型系に対応する線型系の従来の動的安定判別法による特性方程式の根と同一のものである。これらの線型系の振動数は系の各部材の質量比と質量分布が定めれば、荷重のみの関数 $\omega_1^2 = \omega_1^2(K^2), \omega_2^2 = \omega_2^2(K^2)$ となる。また(4)式各右辺の $e_1 \sim e_6$ は非線型項を表わす各係数で、座標変換の結果得られるものである。

基礎式(4)は非線型微分方程式系であるため、摂動論によって解析する。そこで非線型弾性パラメータ β の値を小さい範囲にあるものとして、この β を摂動パラメータとして解の形を

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A_1 \cos \tau_1 + \beta \xi_{11} + \beta^2 \xi_{12} + \cdots \\ \xi_2 &= A_2 \cos \tau_2 + \beta \xi_{21} + \beta^2 \xi_{22} + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と仮定する。ただし時間位相については、

$$\tau_1 = \Omega_1 \tau + \theta_1, \quad \tau_2 = \Omega_2 \tau + \theta_2 \quad (6)$$

とあり、 Ω_1, Ω_2 がこれから求める非線型系の固有振動数である。また θ_1, θ_2 は初期位相である。こうして、 β の小さい値について(5)の近似摂動解を基礎式(4)に代入して、非線型項を考慮したときの固有振動数を求めていく。

摂動法によって、近似解(5)の1次解 ξ_{11} , ξ_{21} および2次解 ξ_{12} , ξ_{22} が得られると同時に、固有振動数 Ω_1^2 , Ω_2^2 が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^2 &= \omega_1^2 - \beta^2 \left\{ \frac{e_2^2 A_2^2}{4\{\omega_1^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2\}} + \frac{e_3 e_5 A_2^2}{2\{\omega_2^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2\}} \right. \\ &\quad + \frac{e_2^2 A_2^2}{4\{\omega_1^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} + \frac{e_3 e_5 A_2^2}{2\{\omega_2^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} + \frac{e_1^2 A_1^2}{2(\omega_1^2 - 4\Omega_1^2)} \\ &\quad \left. + \frac{e_2 e_4 A_2^2}{4(\omega_2^2 - 4\Omega_1^2)} + \frac{e_1^2 A_1^2 + e_1 e_3 A_2^2}{\omega_1^2} + \frac{e_2 e_4 A_1^2 + e_2 e_6 A_2^2}{2\omega_2^2} \right\} \\ \Omega_2^2 &= \omega_2^2 - \beta^2 \left\{ \frac{e_2 e_4 A_1^2}{2\{\omega_1^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2\}} + \frac{e_5^2 A_1^2}{4\{\omega_2^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2\}} \right. \\ &\quad + \frac{e_2 e_4 A_1^2}{2\{\omega_1^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} + \frac{e_5^2 A_1^2}{4\{\omega_2^2 - (\Omega_1 - \Omega_2)^2\}} + \frac{e_3 e_5 A_2^2}{4(\omega_1^2 - 4\Omega_2^2)} \\ &\quad \left. + \frac{e_6^2 A_2^2}{2(\omega_2^2 - 4\Omega_2^2)} + \frac{e_1 e_5 A_1^2 + e_3 e_5 A_2^2}{2\omega_1^2} + \frac{e_4 e_6 A_1^2 + e_6^2 A_2^2}{\omega_2^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4. 安定解析

(7)式で得られた非線型系の固有振動数 Ω_1^2 , Ω_2^2 の変化を検討するために C_1 , C_2 を定数として、

$$\Omega_1 = \omega_1 + C_1 \beta + \dots, \quad \Omega_2 = \omega_2 + C_2 \beta + \dots$$

と β の1次項から補正をして、(7)式の各右辺の非線型項中の分母に代入していくと各分母は近似的に次のような形をとる。

$$\begin{aligned} &-\omega_2(2\omega_1 + \omega_2), -\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2), \omega_2(2\omega_1 - \omega_2), \omega_1(2\omega_2 - \omega_1), \\ &-3\omega_1^2, (\omega_2 - 2\omega_1)(\omega_2 + 2\omega_1), (\omega_1 - 2\omega_2)(\omega_1 + 2\omega_2), -3\omega_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

これらの分母(8)において、たとえば $\omega_1 > \beta^2$, $\omega_2 > \beta^2$ であれば、(7)式の非線型項中で ω_1 , ω_2 を分母に含む項はある一定の値をとり、非線型項中の項として大きな影響を与えない。しかし $\omega_1 \approx \beta^2$, $\omega_2 \approx \beta^2$ となると分母は小さい値をとるようになり、非線型項中で無視できなくなる。さらに $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ となれば、分母は無限に小さくなり、この分母を含む項は非線型項中でも無視できなくなる。

このとき(7)式によって、 Ω^2 の符号が変化する。このとき正值から負値へと遷移したときが安定から不安定に柱が陥ったときである。したがって、このときの臨界振動数条件

$$\omega^2 = 0 \quad (9)$$

が非線型弾性柱の座屈臨界値を与える。この条件(9)は、まさに線型弾性柱における静的不安定条件(ダイバージェンス)を与える式である。

同様な検討を分母(8)について行なうと、次の振動数条件式

$$4\omega_1^2 = \omega_2^2 \quad (10)$$

も導き出される。この条件(10)に対して線型弾性柱における動的不安定(フラッタ)条件式は

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \quad (11)$$

であった。上に与えた(9)、(10)式、いずれも β の値には依存していない。

5. Beck の問題への適用

Fig-1(a)に与えたBeckの弾性柱の問題に対しては、Beckは(11)式に相当する振動数条件によって、座屈値

$$P_{cr} = 20.05 \frac{EI}{l^2}$$

で、柱は動的不安定に入ることを示した。これは Fig-3 の振動数曲線で破線により示す値である。この柱に対して、非線型弾性を有しているとき、振動数条件については(10)を満たす臨界荷重値が存在する。すなわち Fig-3 で一実鎖線で示す値

$$P_{cr} = 17.01 \frac{EI}{l^2} \quad (12)$$

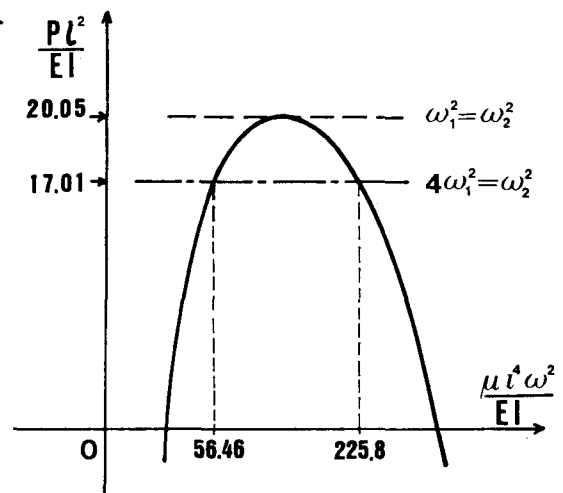


Fig - 3
Frequency curve

で、非線型弾性柱は動的不安定(フラッタ)に入る。

- 参考文献 1) Beck, M: Die Knicklast des einseitig eingespannten..., Z.A.M.P. vol.3, 1952
2) Herrmann, G. & Jong, I-C., J. Appl. Mech., vol.32, p592, 1965.

Flexural Buckling of Non-Linear Elastic Column
with Follower Forces

Yukio Yoshikawa*

In the problems of non-conservative elastic stability, the study of Beck's rod has shown the buckling of column to be in kinetic instability -"flutter"-. On the then analysis, the change of the natural frequency with the system played an important part in his approach. And such a kinetic criterion is at present the basic method of investigating non-conservative problems in the theory of elastic stability.

Now, the developments of structural materials in recent years have been remarkable, and the non-linear elastic materials have been introduced. The force-deflection relation of their materials is not linear any longer, but non-linear. The method of investigating non-conservative problems in the buckling of columns with such non-linear materials will not be the static one. Thus the kinetic criterion is used for our study.

In analysis, the column of continuum is replaced by two-degree-of-freedom model. We have to introduce a perturbation theory to analyze the equation of motion in this non-linear system. Thus we lead the natural frequency characterizing this non-linear system and investigate the conditions of frequency giving the stability criterion. Comparing the conditions of frequency for non-linear system with the ones for the corresponding linear system, we recognize that there were certain conditions characterizing the stability of this non-linear system. These conditions lead the systems to kinetic instability, and to reduction of the critical value.

Finally, we adapt these conditions of frequency to the column of non-linear elastic continuum with follower forces, and get the result that reduce the critical loads for those of elastic column.

* Ministry of Labor