

(2) 厚円板の3次元弾性理論解析

○矢島 宏^{*} 大山 宏^{**} 坪井 善勝^{***}

§1. 序

円柱や厚板の応力を求める研究は、古くから多くの
人々によって行われてきた。それらの中に、上下
面および側面に軸対称境界外力を受ける短円柱（ある
いは厚円板）の問題を扱った斎藤秀雄博士の研究があ
る。これにより厚円板の軸対称問題は一般的に解け
るようになったが、非軸対称境界応力問題に関しては
その後も解例が見あたらないようである。そこで本
論では、非軸対称問題の代表として $n=1$ の周期対称
の場合の解析を示すこととするが、本解析は、より高
次の周期対称問題にも容易に拡張され、厚円板の任意
境界応力問題の一般解法を与えるものである。

解法の基本は、Boussinesq の応力函数を円柱座
標系において級数解（および代数解）で表現し、それ
による境界応力をさらに級数展開し、与えられた境界
外力の級数展開と等置して、解係数に関する無限連立
1次方程式系を得て、その解係数を決定するというも
のである。

なお、Galerkin Vector z 方向成分の級数解
を一部組み合わせると境界応力の展開がより簡単にな
るので、その概要を[付録]に示すことにする。

§2. 基礎式

円柱座標系 (r, θ, z) を用い、厚円板の境界面を
側面 $r=a$ 、上下面 $z=\pm l$ で表わす。すなわち
円板の直径 $2a$ 、厚さ $2l$ である。

Boussinesq の応力函数 Φ_i ($i=I, II, III$) によ
り、各応力は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi_I + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_{II} + \left(z \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_{III} \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi_I - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_{II} \\ &\quad + \left(\frac{z}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} - 2\nu \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi_{III} \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_I + \left\{ z \frac{\partial}{\partial z} - 2(1-\nu) \right\} \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{III} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Phi_I - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Phi_{II} + \frac{1}{r} \left\{ z \frac{\partial}{\partial z} - (1-2\nu) \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_{III} \\ \tau_{zr} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Phi_I + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \Phi_{II} + \left\{ z \frac{\partial}{\partial z} - (1-2\nu) \right\} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{III} \\ \tau_{\theta z} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_I - \left(2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_{II} \\ &\quad + \frac{z}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_{III} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.1)$$

ここに ν は Poisson 比を表わす。

Boussinesq の応力函数 Φ_i は

$$\left. \begin{aligned} r^2 \Phi_i &= 0 \\ r^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.2)$$

を満足する調和函数である。級数解として

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \left[\begin{matrix} J_n(\alpha_s r) \\ Y_n(\alpha_s r) \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} \cosh \alpha_s z \\ \sinh \alpha_s z \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right] \\ \Phi_i &= \left[\begin{matrix} I_n(\beta_* r) \\ K_n(\beta_* r) \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} \cos \beta_* z \\ \sin \beta_* z \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right] \end{aligned} \right\} (2.3)$$

を用い、ここに J_n, Y_n および I_n, K_n は、 n 次の
第1種、第2種 Bessel 函数および変形 Bessel 函数
である。また代数解として

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \left[\begin{matrix} r^n \\ r^n z \\ r^n \{ 2(n+1)z^2 - r^2 \} \\ r^n \{ 2(n+1)z^3 - 3r^2 z \} \\ r^n \{ 4(n+2)(n+1)z^4 - 12(n+2)r^2 z^2 + 3r^4 \} \\ r^n \{ 4(n+2)(n+1)z^5 - 20(n+2)r^2 z^3 + 15r^4 z \} \end{matrix} \right] \\ &\quad \times \left[\begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.4)$$

を用いるが、より高次の解も容易に得られる。

以下、本論では、 $n=1$ の周期対称問題に限定し、
さらに z 方向に、対称および逆対称の場合に分離して
論ずることとする。

^{*} 4 葉大学・大学院生

^{**} 同・助教授

^{***} 東京大学・名誉教授

§3. Z方向対称問題

Boussinesq の応力函数を式(2.3), (2.4)から選
 択して次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_I &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^I I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^I J_1(\delta_s r) \cdot \chi \delta_s z \right. \\ &\quad \left. + C_1^I r (4z^2 - r^2) + C_2^I r (8z^4 - 12r^2 z^2 + r^4) \right] \cos \theta \\ \Phi_{II} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{II} I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{II} J_1(\delta_s r) \cdot \chi \delta_s z \right. \\ &\quad \left. + C_1^{II} r (4z^2 - r^2) + C_2^{II} r (8z^4 - 12r^2 z^2 + r^4) \right] \sin \theta \\ \Phi_{III} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{III} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{III} J_1(\delta_s r) \cdot \Delta h \delta_s z \right. \\ &\quad \left. + C_1^{III} r \cdot z + C_2^{III} r (4z^3 - 3r^2 z) \right] \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots (3.1)$$

ここに $\beta_k = k\pi / h$, $\delta_s = \lambda_s / a$ であらう。また λ_s
 は $J_1'(\lambda_s) = 0$ の第 s 番目の正根である。

式(3.1)を式(2.1)に代入すると、各応力は

Table 1 のように表現される。

境界面における応力表現を、

側面 $r = a$ で Fourier 展開形

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ \Omega_0^r + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k^r \cdot \cos \beta_k z \right\} \cdot \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ \Omega_0^{r\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k^{r\theta} \cdot \cos \beta_k z \right\} \cdot \sin \theta \\ \tau_{rz} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k^{rz} \cdot \sin \beta_k z \right\} \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots (3.2)$$

上下面 $z = \pm h$ で Dini 展開形

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \Theta_s^z \cdot J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \cos \theta \\ r \times \tau_{z\theta} &= \left\{ \pm \sum_{s=1}^{\infty} \Theta_s^{z\theta} \cdot J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \sin \theta \\ r \times \tau_{zr} &= \left\{ \pm \sum_{s=1}^{\infty} \Theta_s^{zr} \cdot J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots (3.3)$$

で表わす。ここに各係数 Ω, Θ は Table 2
 に、さらに表中の P, Q は Table 3 に与えら
 れる。

$\begin{aligned} \sigma_r &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^I \frac{\partial^2}{\partial r^2} I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z + A_k^{II} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) - \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \right\} \cdot \cos \beta_k z + A_k^{III} \frac{\partial^2}{\partial r^2} I_1(\beta_k r) \cdot z \cdot \sin \beta_k z - 2\nu \beta_k I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z \right\} \right. \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ B_s^I \frac{\partial^2}{\partial r^2} J_1(\delta_s r) \cdot \chi \delta_s z + B_s^{II} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) - \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \chi \delta_s z + B_s^{III} \frac{\partial^2}{\partial r^2} J_1(\delta_s r) \cdot z \cdot \Delta h \delta_s z - 2\nu \delta_s J_1(\delta_s r) \cdot \chi \delta_s z \right\} \\ &\quad \left. + [-C_1^I 6r - C_1^{II} 4r - C_1^{III} 2\nu r - C_2^I 4(18r^2 z^2 - 5r^3) - C_2^{II} 8(6r^2 z^2 - r^3) - C_2^{III} 6\{(3+4\nu)r^2 z^2 - \nu r^3\}] \right] \cdot \cos \theta \end{aligned}$
$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^I \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) - \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \right\} \cdot \cos \beta_k z - A_k^{II} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) - \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \right\} \cdot \cos \beta_k z + A_k^{III} \left\{ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) - \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \right\} \cdot z \cdot \sin \beta_k z - 2\nu \beta_k I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z \right\} \right. \right. \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ B_s^I \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) - \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \chi \delta_s z - B_s^{II} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) - \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \chi \delta_s z + B_s^{III} \left\{ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) - \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \right\} \cdot z \cdot \Delta h \delta_s z - 2\nu \delta_s J_1(\delta_s r) \cdot \chi \delta_s z \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + [-C_1^I 2r + C_1^{II} 4r - C_1^{III} 2\nu r - C_2^I 4(6r^2 z^2 - r^3) + C_2^{II} 8(6r^2 z^2 - r^3) + C_2^{III} 6\{-(1+4\nu)r^2 z^2 + \nu r^3\}] \right\} \right] \cdot \cos \theta \end{aligned}$
$\begin{aligned} \sigma_z &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -A_k^I \beta_k^2 I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z - A_k^{II} \beta_k I_1(\beta_k r) \left\{ \beta_k z \cdot \sin \beta_k z + 2(1-\nu) \cos \beta_k z \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ B_s^I \delta_s^2 J_1(\delta_s r) \cdot \chi \delta_s z + B_s^{II} \delta_s J_1(\delta_s r) \left\{ \delta_s z \cdot \Delta h \delta_s z - 2(1-\nu) \chi \delta_s z \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [C_1^I 8r - C_1^{II} 2(1-\nu)r + C_2^I 24(4r^2 z^2 - r^3) + C_2^{II} 6\{4\nu r^2 z^2 + (1-\nu)r^3\}] \right\} \right] \cdot \cos \theta \end{aligned}$
$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^I \beta_k \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z + A_k^{II} \beta_k \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z - A_k^{III} \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \left\{ \beta_k z \cdot \cos \beta_k z - (1-2\nu) \sin \beta_k z \right\} \right. \right. \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -B_s^I \delta_s \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \cdot \Delta h \delta_s z - B_s^{II} \delta_s \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) \cdot \Delta h \delta_s z - B_s^{III} \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \left\{ \delta_s z \cdot \chi \delta_s z - (1-2\nu) \Delta h \delta_s z \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + [-C_1^I 8z - C_1^{II} 8z - C_1^{III} 2\nu z - C_2^I 8(4z^3 - 3r^2 z) - C_2^{II} 8(4z^3 - 9r^2 z) - C_2^{III} 2\{4(1+\nu)z^3 - 3\nu r^2 z\}] \right\} \right] \cdot \sin \theta \end{aligned}$
$\begin{aligned} \tau_{zr} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -A_k^I \beta_k \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z - A_k^{II} \beta_k \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z + A_k^{III} \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) \left\{ \beta_k z \cdot \cos \beta_k z - (1-2\nu) \sin \beta_k z \right\} \right. \right. \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ B_s^I \delta_s \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) \cdot \Delta h \delta_s z + B_s^{II} \delta_s \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \cdot \Delta h \delta_s z + B_s^{III} \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) \left\{ \delta_s z \cdot \chi \delta_s z - (1-2\nu) \Delta h \delta_s z \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + [C_1^I 8z + C_1^{II} 8z + C_1^{III} 2\nu z + C_2^I 8(4z^3 - 9r^2 z) + C_2^{II} 8(4z^3 - 3r^2 z) + C_2^{III} 2\{4(1+\nu)z^3 - 3\nu r^2 z\}] \right\} \right] \cdot \cos \theta \end{aligned}$
$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -A_k^I \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) - \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \right\} \cdot \cos \beta_k z + A_k^{II} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} I_1(\beta_k r) + \beta_k^2 I_1(\beta_k r) \right\} \cdot \cos \beta_k z - A_k^{III} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) - \frac{1}{r} I_1(\beta_k r) \right\} \cdot z \cdot \sin \beta_k z \right. \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -B_s^I \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) - \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \chi \delta_s z - B_s^{II} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} J_1(\delta_s r) + \delta_s^2 J_1(\delta_s r) \right\} \cdot \chi \delta_s z - B_s^{III} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) - \frac{1}{r} J_1(\delta_s r) \right\} \cdot z \cdot \Delta h \delta_s z \right. \\ &\quad \left. \left. + [C_1^I 2r + C_1^{II} 4r + C_2^I 4(6r^2 z^2 - r^3) + C_2^{II} 16(3r^2 z^2 - r^3) + C_2^{III} 6r^2 z^2] \right\} \right] \cdot \sin \theta \end{aligned}$
Where $\frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) = -\frac{1}{r} I_1(\beta_k r) + \beta_k I_0(\beta_k r)$, $\frac{\partial}{\partial r} J_1(\delta_s r) = -\frac{1}{r} J_1(\delta_s r) + \delta_s J_0(\delta_s r)$ $\frac{\partial^2}{\partial r^2} I_1(\beta_k r) = -\frac{1}{r} \beta_k I_0(\beta_k r) + (\frac{\beta_k^2}{r} + \beta_k^2) \cdot I_1(\beta_k r)$, $\frac{\partial^2}{\partial r^2} J_1(\delta_s r) = -\frac{1}{r} \delta_s J_0(\delta_s r) + (\frac{\delta_s^2}{r} + \delta_s^2) \cdot J_1(\delta_s r)$

Table 1

$\Omega_0^r = \sum_{j=0}^{\infty} A_0^j \hat{I}_0 \hat{P}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} [B_1^j \hat{J}_1 \hat{P}_0 - B_1^j \frac{2}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_0 + B_1^j \{\hat{J}_1 \hat{P}_0 - 2\nu \sigma_1^2 \hat{P}_0\}]$ $+ [-C_1^j 6\alpha - C_1^j 4\alpha - C_1^j 2\nu\alpha - C_1^j 4(18\alpha \hat{P}_0 - 5\alpha^3) - C_1^j 8(6\alpha \hat{P}_0 - \alpha^3) - C_1^j 6\{(3+4\nu)\alpha \hat{P}_0 - \nu\alpha^3\}]$	$\Omega_1^r = A_1^j \hat{I}_1 + A_1^j \frac{2}{\alpha} (\hat{I}_1 - \frac{1}{\alpha} \hat{I}_1) - A_1^j 2\nu \beta_1 \hat{I}_1 + \sum_{j=0}^{\infty} A_0^j \hat{I}_0 \hat{P}_1 + \sum_{j=0}^{\infty} [B_1^j \hat{J}_1 \hat{P}_1 - B_1^j \frac{2}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_1 + B_1^j \{\hat{J}_1 \hat{P}_1 - 2\nu \sigma_1^2 \hat{P}_1\}]$ $+ [-C_1^j 72\alpha \hat{P}_1 - C_1^j 48\alpha \hat{P}_1 - C_1^j 6(3+4\nu)\alpha \hat{P}_1]$
$\Omega_0^p = -\sum_{j=0}^{\infty} A_0^j \frac{1}{\alpha} (\hat{I}_0 - \frac{1}{\alpha} \hat{I}_0) \hat{P}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} [B_1^j \frac{1}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_0 - B_1^j (2\hat{J}_1 + \sigma_1^2 \hat{J}_1) \hat{P}_0 + B_1^j \frac{1}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_0]$ $+ [C_1^j 2\alpha + C_1^j 4\alpha + C_1^j 4(6\alpha \hat{P}_0 - \alpha^3) + C_1^j 16(3\alpha \hat{P}_0 - \alpha^3) + C_1^j 6\alpha \hat{P}_0]$	$\Omega_1^p = -A_1^j \frac{1}{\alpha} (\hat{I}_1 - \frac{1}{\alpha} \hat{I}_1) + A_1^j (-2\hat{I}_1 + \beta_1^2 \hat{I}_1) - \sum_{j=0}^{\infty} A_0^j \frac{1}{\alpha} (\hat{I}_0 - \frac{1}{\alpha} \hat{I}_0) \hat{P}_1 + \sum_{j=0}^{\infty} [B_1^j \frac{1}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_1 - B_1^j (2\hat{J}_1 + \sigma_1^2 \hat{J}_1) \hat{P}_1 + B_1^j \frac{1}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_1]$ $+ [C_1^j 24\alpha \hat{P}_1 + C_1^j 48\alpha \hat{P}_1 + C_1^j 6\alpha \hat{P}_1]$
$\Omega_1^r = -A_1^j \beta_1 \hat{I}_1 - A_1^j \beta_1 \frac{1}{\alpha} \hat{I}_1 - A_1^j (1-2\nu) \hat{I}_1 + \sum_{j=0}^{\infty} A_0^j \beta_0 \hat{I}_0 \hat{P}_1 + \sum_{j=0}^{\infty} B_1^j \sigma_1 \frac{1}{\alpha} \hat{J}_1 \hat{P}_1$ $+ [C_1^j 8\hat{P}_1 + C_1^j 8\hat{P}_1 + C_1^j 2\nu \hat{P}_1 + C_1^j 8(4\hat{P}_1 - 9\alpha^2 \hat{P}_1) + C_1^j 8(4\hat{P}_1 - 3\alpha^2 \hat{P}_1) + C_1^j 2\{4(1+\nu)\hat{P}_1 - 9\nu\alpha^2 \hat{P}_1\}]$	
$\Theta_1^r = \sum_{j=0}^{\infty} [-A_1^j (-1)^j \beta_1^2 \hat{Q}_{1j} - A_1^j (-1)^j 2(1-\nu) \beta_1 \hat{Q}_{1j}] + B_1^j \sigma_1^2 \chi \sigma_1 \hat{R} + B_1^j \sigma_1 \{\sigma_1 \hat{R} \cdot \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R} - 2(1-\nu) \cdot \chi \hat{R} \sigma_1 \hat{R}\}$ $+ [C_1^j 8\hat{Q}_1 - C_1^j 2(1-\nu) \hat{Q}_1 + C_1^j 24(4\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1) + C_1^j 6\{4\nu \hat{R}^2 \hat{Q}_1 + (1-\nu) \hat{Q}_1\}]$	
$\Theta_1^p = \sum_{j=0}^{\infty} [-A_1^j (-1)^j \beta_1 \hat{R} \hat{Q}_{1j}] - B_1^j \sigma_1 \Delta \hat{R} \hat{R} - \sum_{j=0}^{\infty} B_0^j \sigma_0 \Delta \hat{R} \hat{R} \hat{Q}_{0j} - B_1^j \{\sigma_1 \hat{R} \cdot \chi \hat{R} \sigma_1 \hat{R} - (1-2\nu) \cdot \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R}\}$ $+ [-C_1^j 8\hat{R} \hat{Q}_1 - C_1^j 8\hat{R} \hat{Q}_1 - C_1^j 2\nu \hat{R} \hat{Q}_1 - C_1^j 8(4\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - 3\hat{R} \hat{Q}_1) - C_1^j 8(4\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - 9\hat{R} \hat{Q}_1) - C_1^j 2\{4(1+\nu)\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - 3\nu \hat{R} \hat{Q}_1\}]$	
$\Theta_1^r = \sum_{j=0}^{\infty} A_1^j (-1)^j \beta_1 \hat{R} \hat{Q}_{1j} + \sum_{j=0}^{\infty} B_0^j \sigma_0 \Delta \hat{R} \hat{R} \hat{Q}_{0j} + B_1^j \sigma_1 \Delta \hat{R} \hat{R} + \sum_{j=0}^{\infty} B_1^j \{\sigma_1 \hat{R} \cdot \chi \hat{R} \sigma_1 \hat{R} - (1-2\nu) \cdot \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R}\} \hat{Q}_{0j}$ $+ [C_1^j 8\hat{R} \hat{Q}_1 + C_1^j 8\hat{R} \hat{Q}_1 + C_1^j 2\nu \hat{R} \hat{Q}_1 + C_1^j 8(4\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - 9\hat{R} \hat{Q}_1) + C_1^j 8(4\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - 3\hat{R} \hat{Q}_1) - C_1^j 2\{4(1+\nu)\hat{R}^2 \hat{Q}_1 - 9\nu \hat{R} \hat{Q}_1\}]$	
Where $\hat{I}_1 = I_1(\beta_1 \alpha)$, $\hat{I}_1 = \{-\frac{1}{\alpha} I_1(\beta_1 \alpha) + \beta_1 I_0(\beta_1 \alpha)\}$, $\hat{I}_1 = \{-\beta_1 \frac{1}{\alpha} I_0(\beta_1 \alpha) + (\frac{2}{\alpha} + \beta_1^2) I_1(\beta_1 \alpha)\}$ $\hat{J}_1 = J_1(\sigma_1 \alpha)$, $\hat{J}_1 = \{-\sigma_1 \frac{1}{\alpha} J_0(\sigma_1 \alpha) + (\frac{2}{\alpha} - \sigma_1^2) J_1(\sigma_1 \alpha)\}$	

Table 2

$z \sin \beta_0 z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{0j} \cos \beta_0 z$	$\hat{P}_{00} = -\frac{A}{2\pi} (-1)^0$, $\hat{P}_{0\infty} = -\frac{A}{2\pi}$ at $z=0$, $\hat{P}_{0\infty} = \frac{2\theta A}{(x^2 - \theta^2)\pi} (-1)^{x+\theta}$ at $x \neq \theta$
$\chi \hat{R} z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{1j} \cos \beta_0 z$	$\hat{P}_{10} = \frac{1}{\sigma_1 A} \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R}$, $\hat{P}_{1\infty} = \frac{2\sigma_1 A}{(\sigma_1 A)^2 + (x\pi)^2} (-1)^x \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R}$
$z \Delta \hat{R} z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{2j} \cos \beta_0 z$	$\hat{P}_{20} = \frac{1}{\sigma_1} (\chi \hat{R} \sigma_1 \hat{R} - \frac{1}{\sigma_1} \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R})$, $\hat{P}_{2\infty} = (-1)^x \frac{2\sigma_1 A}{(\sigma_1 A)^2 + (x\pi)^2} [A \cdot \chi \hat{R} \sigma_1 \hat{R} + \frac{1}{\sigma_1} \frac{(x\pi)^2 - (\sigma_1 A)^2}{(x\pi)^2 + (\sigma_1 A)^2} \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R}]$
$z^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{3j} \cos \beta_0 z$	$\hat{P}_{30} = \frac{A^2}{3}$, $\hat{P}_{3\infty} = (-1)^x \frac{4A^2}{(x\pi)^2}$
$z \cos \beta_0 z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{0j} \sin \beta_0 z$	$\hat{P}_{00} = -\frac{A}{2\pi}$ at $z=0$, $\hat{P}_{0\infty} = \frac{2A}{(\theta^2 - x^2)\pi} (-1)^{x+\theta}$ at $x \neq \theta$
$\Delta \hat{R} z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{1j} \sin \beta_0 z$	$\hat{P}_{10} = -\frac{2x\pi}{(\sigma_1 A)^2 + (x\pi)^2} (-1)^x \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R}$
$z \chi \hat{R} z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{2j} \sin \beta_0 z$	$\hat{P}_{20} = (-1)^x \frac{2x\pi}{\sigma_1 \{(\sigma_1 A)^2 + (x\pi)^2\}} \left[\frac{2(\sigma_1 A)^2}{1(x\pi)^2 + (\sigma_1 A)^2} \cdot \Delta \hat{R} \sigma_1 \hat{R} - \sigma_1 \hat{R} \cdot \chi \hat{R} \sigma_1 \hat{R} \right]$
$z = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{3j} \sin \beta_0 z$	$\hat{P}_{30} = -2 \frac{A}{x\pi} (-1)^x$
$z^3 = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}_{4j} \sin \beta_0 z$	$\hat{P}_{40} = (-1)^x \frac{2A^3}{x\pi} \left\{ \frac{6}{(x\pi)^2} - 1 \right\}$
$r \frac{\partial}{\partial r} J_1(\beta_0 r) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{Q}_{0j} J_1(\beta_0 r)$	$\hat{Q}_{00} = \frac{1}{(\lambda^2 - 1)}$ at $\lambda = \lambda_0$, $\hat{Q}_{0\infty} = \frac{2\lambda_0^2 (\lambda_0^2 - 1) \cdot J_1(\lambda_0)}{(\lambda^2 - 1) (\lambda_0^2 - \lambda^2) \cdot J_1(\lambda_0)}$ at $\lambda \neq \lambda_0$
$I_1(\beta_0 r) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{Q}_{1j} J_1(\beta_0 r)$	$\hat{Q}_{10} = \frac{2\lambda_0^2 \beta_0 \alpha}{(\lambda^2 - 1) \{(\beta_0 \alpha)^2 + \lambda^2\} \cdot J_1(\lambda_0)} \cdot \left[-\frac{1}{\beta_0 \alpha} \cdot I_1(\beta_0 \alpha) + I_0(\beta_0 \alpha) \right]$
$r \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_0 r) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{Q}_{2j} J_1(\beta_0 r)$	$\hat{Q}_{20} = \frac{2\lambda_0^2}{(\lambda^2 - 1) \{(\beta_0 \alpha)^2 + \lambda^2\} \cdot J_1(\lambda_0)} \left[\{(\beta_0 \alpha)^2 + 1\} \{(\beta_0 \alpha)^2 + \lambda^2\} + 2(\beta_0 \alpha)^2 \cdot I_1(\beta_0 \alpha) - 2(\beta_0 \alpha)^2 \cdot I_0(\beta_0 \alpha) \right]$
$r = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{Q}_{3j} J_1(\beta_0 r)$	$\hat{Q}_{30} = \frac{2\alpha \lambda_0}{(\lambda^2 - 1) \cdot J_1(\lambda_0)} \cdot J_2(\lambda_0)$
$r^3 = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{Q}_{4j} J_1(\beta_0 r)$	$\hat{Q}_{40} = \frac{2\alpha^3}{(\lambda^2 - 1) \cdot J_1(\lambda_0)} \cdot \{ \lambda_0 J_2(\lambda_0) - 2J_3(\lambda_0) \}$
Where $\beta_0 = \frac{x\pi}{A}$, $\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{\alpha}$, $-A < z < A$, $0 < r < a$	

Table 3

なお、式(3.3)の第2, 第3式は、それぞれ、 $\bar{\tau}_{\theta 0}$, $\bar{\tau}_{rz}$ に r を乗じた表記を用いることにより、Dini展開係数のすべてを解析的に与えることが可能となり、たことを特記しておく。

一方、既知とされる境界外力も、上述の境界応力表現に対応して次のように表わす。

側面 $r=a$ で Fourier 展開形

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \left\{ b_0^r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^r \cdot \cos \beta_k z \right\} \cdot \cos \theta \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= \left\{ b_0^{\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\tau} \cos \beta_k z \right\} \cdot \sin \theta \\ \bar{\tau}_{rz} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\tau z} \cdot \sin \beta_k z \right\} \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

上下面 $z=\pm h$ で Dini 展開形

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} d_s^z \cdot J_1(\gamma_s r) \right\} \cdot \cos \theta \\ r \times \bar{\tau}_{z\theta} &= \left\{ \pm \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{z\theta} J_1(\gamma_s r) \right\} \cdot \sin \theta \\ r \times \bar{\tau}_{zr} &= \left\{ \pm \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{zr} J_1(\gamma_s r) \right\} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式(3.2)と(3.4) および 式(3.3)と(3.5) をそれぞれ等置すると、Boussinesq の応力函数の解係数に関して無限連立1次方程式が得られる。これより解係数値を定め、Table 1 に代入して各応力分布が求められる。

なお、代数解は、級数解による展開を準備するために必要とされる。すなわち、隅角縁 $r=a, z=\pm h$ および上下面中心 $r=0, z=\pm h$ において必要な境界条件と、Fourier 展開定数項とに対応する。

§4. z 方向逆対称問題

Boussinesq の応力函数を式(2.3), (2.4) から選択して次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\pm} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\pm} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{\pm} J_1(\gamma_s r) \cdot \lambda h \gamma_s z \right. \\ &\quad \left. + C_2^{\pm} r \cdot (4z^3 - 3r^2 z) \right] \cdot \cos \theta \\ \Phi_{\Pi} &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\Pi} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{\Pi} J_1(\gamma_s r) \cdot \lambda h \gamma_s z \right. \\ &\quad \left. + C_2^{\Pi} r \cdot (4z^3 - 3r^2 z) \right] \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\Phi_{\Pi} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\Pi} I_1(\beta_k r) \cdot \cos \beta_k z + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{\Pi} J_1(\gamma_s r) \cdot \lambda h \gamma_s z \right. \\ \left. + C_1^{\Pi} r + C_2^{\Pi} r (4z^2 - r^2) \right] \cdot \cos \theta \quad \dots (4.1)$$

ここに $\beta_k = k\pi/h$, $\gamma_s = \lambda_s/\alpha$ であり、また λ_s は $J_1'(\lambda_s) = 0$ の第 s 番目の正根である。

式(4.1)を式(2.1)に代入すれば、各応力の表現が求められる。境界応力の Fourier 展開、Dini 展開に必要な諸式は、すべて Table 3 に与えられており、以下、§3 と同様の手法を用いればよい。

なお、境界応力は次のように展開される。

側面 $r=a$ で Fourier 展開形

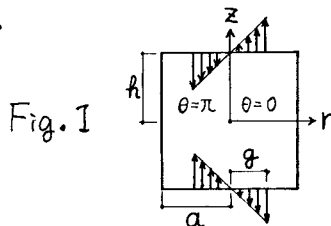
$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^r \cdot \sin \beta_k z \right\} \cdot \cos \theta \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\tau\theta} \cdot \sin \beta_k z \right\} \cdot \sin \theta \\ \bar{\tau}_{rz} &= \left\{ b_0^{\tau z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\tau z} \cos \beta_k z \right\} \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

上下面 $z=\pm h$ で Dini 展開形

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \left\{ \pm \sum_{s=1}^{\infty} d_s^z \cdot J_1(\gamma_s r) \right\} \cdot \cos \theta \\ r \times \bar{\tau}_{z\theta} &= \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{z\theta} J_1(\gamma_s r) \right\} \cdot \sin \theta \\ r \times \bar{\tau}_{zr} &= \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} d_s^{zr} J_1(\gamma_s r) \right\} \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

§5. 解析例. 1

Fig. 1 に示されるような厚円板(短円柱)の上下面中央部に、同一範囲の部分曲げ載荷を受ける場合を考える。



これは、 z 方向対称問題であり、§3 に詳述した解法に従えばよい。

境界条件は

側面 $r=a$ において

$$\bar{\sigma}_r = 0, \bar{\tau}_{r\theta} = 0, \bar{\tau}_{rz} = 0 \quad \dots (5.1)$$

上下面 $z = \pm h$ において

$$\bar{\sigma}_{z\theta} = 0, \bar{\sigma}_{zr} = 0$$

$$\bar{\sigma}_z = \begin{cases} P \left(\frac{r}{a} \right) \cdot \cos \theta & (0 \leq r \leq g) \\ 0 & (g < r \leq a) \end{cases} \quad (5.2)$$

であり、式(3.4)、(3.5)の Fourier 展開、Dini 展開係数は

$$\left. \begin{aligned} b_r^r &= 0, b_r^{\theta} = 0, b_r^z = 0 \\ d_s^{\theta} &= 0, d_s^r = 0 \\ d_s^z &= P \frac{2\lambda_s}{(\lambda_s^2 - 1) \cdot J_1^2(\lambda_s)} \cdot \frac{g^2}{a} \cdot J_2 \left(\frac{g}{a} \lambda_s \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

で表わされる。

採用した代数解6個のうち、2個は Fourier 展開定数項に対応し、なお4個の条件式が必要であるが、それを隅角縁 $r = a, z = \pm h$ の条件

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= 0, \bar{\tau}_{r\theta} = 0, \bar{\tau}_{zr} = 0 \\ \bar{\sigma}_z &= 0 \quad (g < a \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (5.4)$$

として与える。

数値計算例として、 $h = a, g = 0.5a, \nu = 0.2$ の場合の応力分布が Figs. 2(a)~(f) に示される。

なお、展開項数は、Fourier 展開、Dini 展開と

も20項までとした。

§6. 解析例 2.

Fig. 3 に示されるような厚円板(短円柱)の上下面中央部に、範囲の異なる部分曲げ荷荷を受ける場合を考える。

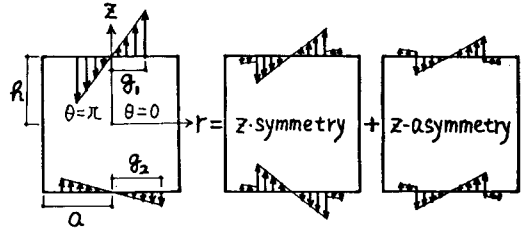


Fig. 3

これは、Z方向対称およびZ方向反対称の問題に分離されるので、両者を個々に解き、結果を合成する。

境界条件は

側面 $r = a$ において

$$\bar{\sigma}_r = 0, \bar{\tau}_{r\theta} = 0, \bar{\tau}_{rz} = 0 \quad \dots (6.1)$$

上面 $z = h$ において

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{z\theta} &= 0, \bar{\sigma}_{zr} = 0 \\ \bar{\sigma}_z &= \begin{cases} P \left(\frac{r}{a} \right) \cdot \cos \theta & (0 \leq r \leq g_1) \\ 0 & (g_1 < r \leq a) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

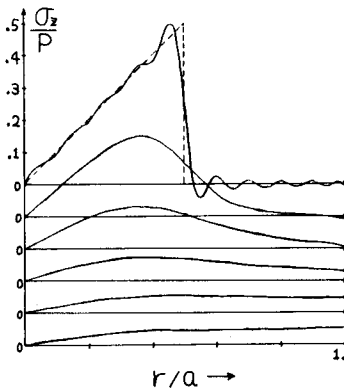


Fig. 2(a) σ_z at $\theta=0$

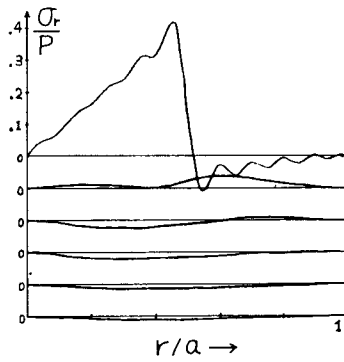


Fig. 2(b) σ_r at $\theta=0$

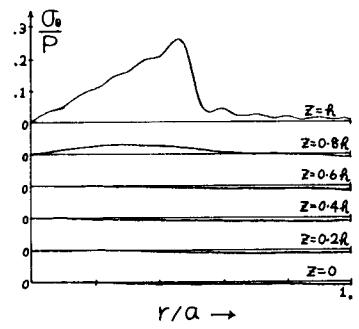


Fig. 2(c) σ_θ at $\theta=0$

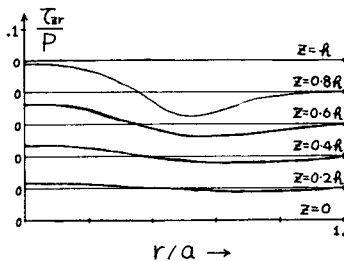


Fig. 2(d) τ_{zr} at $\theta=0$

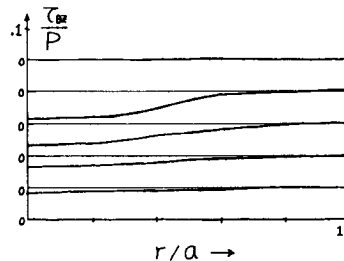


Fig. 2(e) $\tau_{\theta z}$ at $\theta=\pi/2$

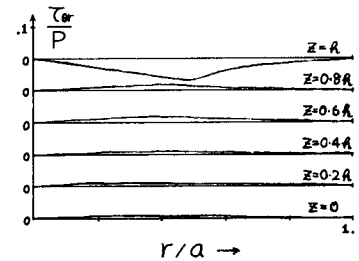


Fig. 2(f) $\tau_{\theta r}$ at $\theta=\pi/2$

下面 $z = -h$ において

$$\bar{\tau}_{z\theta} = 0, \bar{\tau}_{zr} = 0$$

$$\bar{\sigma}_z = \begin{cases} P \left(\frac{g_1}{g_2} \right)^4 \cdot \left(\frac{r}{a} \right) \cdot \cos \theta & (0 \leq r \leq g_2) \\ 0 & (g_2 < r \leq a) \end{cases} \quad (6.3)$$

である。Fig. 3 を参照して、 z 方向対称成分は、式(3.4), (3.5)の展開係数

$$b_*^r = 0, b_*^{r\theta} = 0, b_*^{rz} = 0$$

$$d_s^{z\theta} = 0, d_s^{zr} = 0$$

$$d_s^z = \frac{P}{2} \frac{2\lambda_s g_1^2}{(\lambda_s^2 - 1) \cdot J_1^2(a_s)} \cdot a \left\{ J_2\left(\frac{g_1}{a} \lambda_s\right) + \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 J_2\left(\frac{g_2}{a} \lambda_s\right) \right\} \quad \dots (6.4)$$

z 方向逆対称成分は、式(4.2), (4.3)の展開係数

$$b_*^r = 0, b_*^{r\theta} = 0, b_*^{rz} = 0$$

$$d_s^{z\theta} = 0, d_s^{zr} = 0$$

$$d_s^z = \frac{P}{2} \frac{2\lambda_s g_1^2}{(\lambda_s^2 - 1) \cdot J_1^2(a_s)} \cdot a \left\{ J_2\left(\frac{g_1}{a} \lambda_s\right) - \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 J_2\left(\frac{g_2}{a} \lambda_s\right) \right\} \quad \dots (6.5)$$

で表わされる。

z 方向逆対称問題を採用した代数解4個のうち、1個は Fourier 展開定数項に対応し、残りの3個について、上下面中央点近傍 $z = \pm h$, $r \rightarrow 0$ の条件

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\tau}_{zr} = 0, \left(\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\tau}_{z\theta} = 0 \right) \quad \dots (6.6)$$

隅角縁 $r = a$, $z = \pm h$ の条件

$$\bar{\sigma}_r = 0, \bar{\tau}_{zr} = 0 \quad \dots (6.7)$$

を与えた。

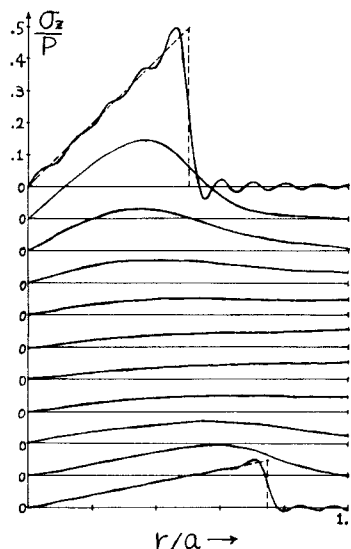


Fig. 4(a) σ_z at $\theta = 0$

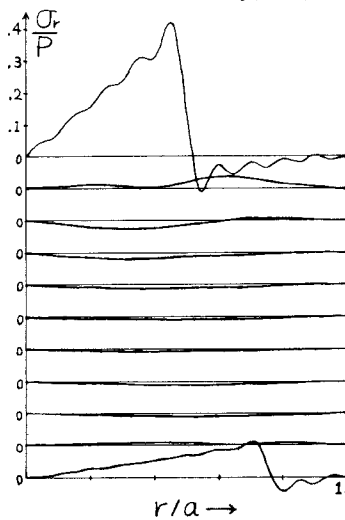


Fig. 4(b) σ_r at $\theta = 0$

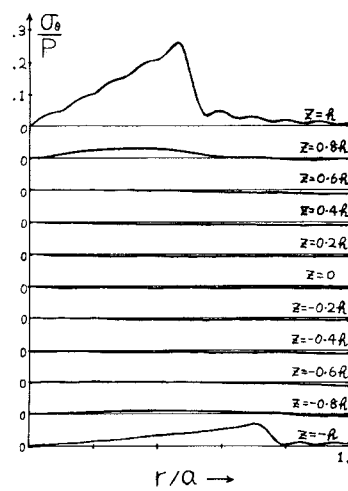


Fig. 4(c) σ_θ at $\theta = 0$

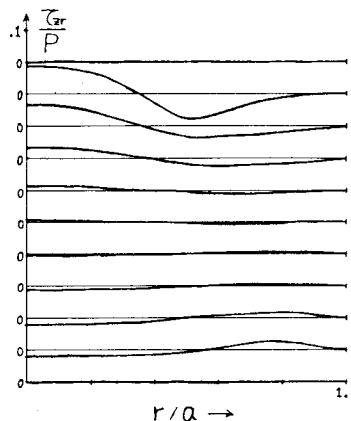


Fig. 4(d) τ_{zr} at $\theta = 0$

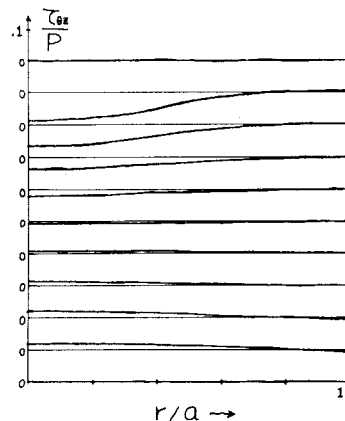


Fig. 4(e) $\tau_{\theta z}$ at $\theta = \pi/2$

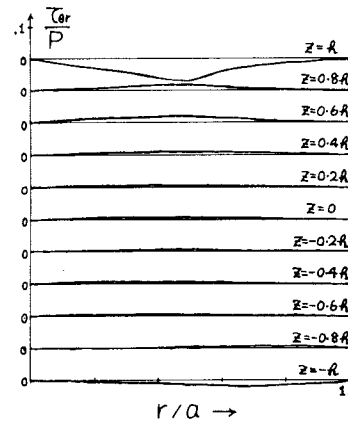


Fig. 4(f) τ_{or} at $\theta = \pi/2$

数値計算例として、 $h=a$, $g_1=0.5a$,
 $g_2=0.75a$, $\nu=0.2$ の場合の応力分布が、
 Figs. 4 (a)~(f) に示される。

§7. 結

以上、厚円板の3次元応力解析を扱い、具体的には
 $n=1$ の周期対称の場合を、 z 方向対称および z 方
 向逆対称に分離して論じた。

Boussinesq の応力函数の解係数に関する無限連
 立1次方程式系の係数マトリクスを得るために必要な
 諸式は、 z 方向対称問題に対して、Table 2 およ
 び Table 3 に完全に与えている。また、 z 方
 向逆対称問題に対しても必要な展開公式が Table 3
 に明示されているので、その後の計算は容易に行なう
 ことができる。

本解析は、 $n=1$ の周期対称の場合にとどまらず、
 より一般的な非軸対称問題にも拡張可能であり、厚円
 板の一般解法を与えるものである。

なお、Galerkin Vector z 方向成分の級数
 解を一部組合せて用いる方法について、[付録]に略
 述する。

[付録] Galerkin Vector z 方向成分の利用

Boussinesq の応力函数のうち、 Φ_I, Φ_{II} に対応
 するものとして、Galerkin Vector z 方向成分
 Z を用いると、各応力は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] Z \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] Z \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z \\ \tau_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z \\ \tau_{zr} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta \partial z} \left[\frac{Z}{r} \right] \end{aligned} \right\} (A-1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 Z = 0 \quad \dots\dots (A-2)$$

を満足する重調和函数であり、いくつかの形式の級数
 解が既に得られている。

$n=1$ の周期対称で z 方向対称問題に対して、それ
 らの中から級数解

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \frac{1}{\beta_k^*} r \cdot \frac{\partial}{\partial r} I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z \cdot \cos \theta \quad \dots\dots (A-3)$$

を採用すると、各応力の表現は式(A.1)に代入して、
 Table 4 のようになる。

これを用いることとし、式(3.1)の Φ_{II} の第1項

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \cdot I_1(\beta_k r) \cdot \sin \beta_k z \cdot \cos \theta$$

を捨てることにすると、解係数に関する無限連立1次
 方程式系の表現はより簡単になり、かつ計算の収束性
 にも若干の改善が見られる。

なお、 z 方向逆対称問題に対しても、同様の議論が
 可能である。

$\sigma_r = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left[-\left(\frac{1}{\beta_k r} + \beta_k r \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\beta_k r^2} - (1-2\nu) \beta_k \right] I_1(\beta_k r) \cos \beta_k z \cdot \cos \theta$
$\sigma_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left[\frac{1}{\beta_k r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\beta_k r^2} - (1-2\nu) \beta_k \right] I_1(\beta_k r) \cos \beta_k z \cdot \cos \theta$
$\sigma_z = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left[\beta_k r \frac{\partial}{\partial r} + 2(2-\nu) \beta_k \right] I_1(\beta_k r) \cos \beta_k z \cdot \cos \theta$
$\tau_{\theta z} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} - 2(1-\nu) \frac{1}{r} \right] I_1(\beta_k r) \sin \beta_k z \cdot \sin \theta$
$\tau_{zr} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left[2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_k^2 r + \frac{1}{r} \right] I_1(\beta_k r) \sin \beta_k z \cdot \cos \theta$
$\tau_{r\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \left[-\frac{1}{\beta_k r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\beta_k r^2} + \beta_k \right] I_1(\beta_k r) \cos \beta_k z \cdot \sin \theta$

Table 4

[参考文献]

- (1). H. M. Westergaard;
 Theory of Elasticity and Plasticity,
 Harvard Univ. Press, 1952.
- (2). 有藤秀雄; 短円柱および円盤の軸対称変形,
 機論集18巻68号, 1952.
- (3). 有藤秀雄; 短円柱および円盤の軸対称変形(続),
 機論集20巻91号, 1954.
- (4). N. W. McLachlan;
 Bessel Functions for Engineers, 2nd ed,
 Oxford Univ. Press, 1955.
- (5). 宮本 博; 3次元弾性論, 裳華房, 1967.

THREE DIMENSIONAL ELASTIC ANALYSIS OF CIRCULAR THICK PLATES

by Koichi Yajima*, Hiroshi Ohyama** and Yoshikatsu Tsuboi***

The object of this paper is to obtain the stresses in circular thick plates, subjected to arbitrary external forces with no axisymmetry at boundary surfaces. As the representative of the problems with no axisymmetry and for ease of explanation, the problems with cyclic symmetry of $n=1$ are only treated in detail. Using cylindrical coordinates (r, θ, z) , the boundary is defined by $r=a$ and by $z=\pm h$. Stresses in circular thick plates are generally expressed by Boussinesq's stress functions $\Phi_i (\lambda=I, II, III)$ as shown in Eqs.(2.1), where Φ_i are harmonic functions satisfying Eqs.(2.2), and have series solutions of Eqs.(2.3) and algebraic solutions of Eqs.(2.4).

For problems with z -directional symmetry, Boussinesq's stress functions must be chosen as Eqs.(3.1), where $\beta_k = k\pi/h$ and $\alpha_k = \lambda_k/a$, and λ_k are positive zeros of $J_1'(\lambda)$. Substituting Eqs.(3.1) in Eqs.(2.1), the stresses are shown in Table 1. At the boundary, the stresses can be expressed in the forms of Fourier's and Dini's expansions of Eqs.(3.2) at $r=a$ and of Eqs.(3.3) at $z=\pm h$, where the coefficients Ω and Θ are shown in Table 2, and the coefficients P and Q in it are shown in Table 3. It is worthy of notice that the forms of $r \cdot \tau_{z\theta}$ and $r \cdot \tau_{zr}$ in Eqs.(3.3) are used to obtain all of the coefficients analytically as shown in Table 2 and Table 3. Corresponding to the expressions of boundary stresses, external forces can be also expressed in the form of Fourier's and Dini's expansions of Eqs.(3.4) and (3.5). Equating each corresponding equations, yields a system of infinite simultaneous linear equations with respect to the coefficients, A , B and C in Eqs.(3.1). Solving the equations and substituting the coefficients in Table 1, stresses in circular thick plates are determined.

Problems with z -directional asymmetry are also solved in similar procedures, where Boussinesq's stress functions must be chosen as Eqs.(4.1). All of the necessary formula for Fourier's and Dini's expansions of boundary stresses are listed in Table 3. External forces can be expressed in the forms of Fourier's and Dini's expansions of Eqs.(4.2) and (4.3).

Example 1 is symmetric in z -direction as shown in Fig.1. Boundary conditions are Eqs.(5.1) at $r=a$ and Eqs.(5.2) at $z=\pm h$, having the expansion coefficients of Eqs.(5.3). The results of this example are shown in Figs. 2 (a)-(f) for $h=a$, $g=0.5a$ and $\nu=0.2$. Example 2 is more complex and separated into two cases as shown in Fig.3. Boundary conditions are Eqs.(6.1) at $r=a$, Eqs.(6.2) at $z=h$ and Eqs.(6.3) at $z=-h$. Expansion coefficients are listed in Eqs.(6.4) and (6.5), for the symmetric and for the asymmetric components in z -direction, respectively. The results of this example are shown in Figs. 4 (a)-(f) for $h=a$, $g=0.5a$, $g=0.75a$ and $\nu=0.2$.

This paper treats problems with cyclic symmetry of $n=1$ only, but this method of analysis can be developed further for arbitrary general problems with no axisymmetry. An appendix is added to explain Galerkin vector Z roughly, which is helpful to simplify the system of infinite simultaneous linear equations.

* Graduate Student, Chiba Univ.

** Assistant Professor, Chiba Univ.

*** Professor Emeritus, Univ. of Tokyo