

(20) Rayleigh-Ritz法による吊橋架設時の固有振動解析

川田工業㈱ 中崎 俊三

1. まえがき

吊橋架設時の耐風安定性を検証する上でその時の固有振動性状は予め把握されなければならない要件である。吊橋架設時の固有振動数の計算はこれまで立体の離散系モデルで行われてきたようであるが、部材数および節点数が非常に多いためにデータ作成ならびに計算にかかる費用は多大なものである。

本文は吊橋完成状態についてハンガーを膜とみなして解析を行なう周知のRayleigh-Ritz法を吊橋架設途上に応用したものを示したもので、膜理論としての特性上、容易に計算値を得ることができる。最初に鉛直面内の静的な問題について各部のポテンシャルエネルギーを求め、その変分より得られた釣り合い方程式が満足されたものであることを確かめ、その後、振動問題について述べる。鉛直振動・振り振動とも基本的には同一手法で計算できるので、ここでは離散系モデルの場合立体モデルとなる振り振動について記述し、鉛直振動については省略する。

2. 吊橋架設時の静的な問題

2-1 各部のポテンシャルエネルギー

問題を簡単にするためにFig. 1に示すように支間中央付近の桁が未だ架設されていない1ケーブル支間について考える。ケーブル支間が複数の場合、桁の中途に架設

ヒンジがある場合も基本的には変わらない。活荷重が作用した時に同図のように変形したとすると例えば η_1 は次のように表わせる。

$$\eta_1 = \delta_1 + \delta_A \frac{x}{l_1} \quad (\text{左側の桁に対して}) \quad \cdots (1)$$

(1) 一般部のケーブルポテンシャルエネルギー

完成状態の場合に良く知られているように微小区間のポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} dV_c &= \frac{1}{2} r \eta dx \\ r &= -H d \eta'' - H p y'' \end{aligned} \right\} \quad \cdots (2)$$

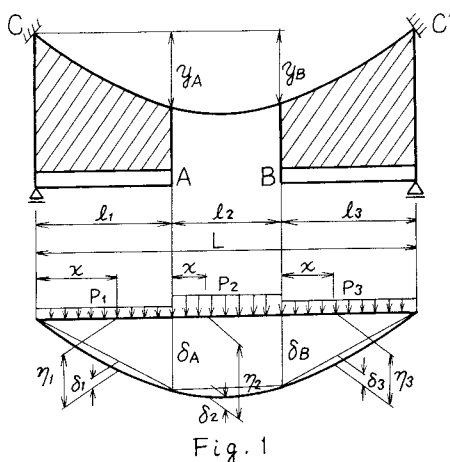


Fig. 1

ここに r ; 活荷重によるケーブル分担力の増加分, Hd ; 架設死荷重時のケーブル張力の水平成分

Hp ; 活荷重によるケーブル張力の水平成分, y ; 架設死荷重時のケーブルの縦距

ケーブル支間について積分すれば、

$$V_{c1} = \frac{1}{2} \sum_i^3 \int_0^{l_i} (-H d \eta_i'') \eta_i dx + \frac{1}{2} \sum_i^3 \int_0^{l_i} (-H p y'') \eta_i dx \quad \cdots (3)$$

(2) 架設先端部のケーブルポテンシャルエネルギー

Fig. 2より、架設先端部でケーブル張力の鉛直成分の釣り合いをとると

$$R_1 + W + (Hd + Hp)(y'_{20} + \eta'_{20} - y'_{1e} - \eta'_{1e}) = 0 \quad \cdots (4)$$

ここに、 W ; 架設死荷時の架設先端ハンガー張力, R_1 ; 活荷重による架設先端ハンガー張力

一方、架設死荷重時には次式が成り立つ。

$$W + Hd(y'_{20} - y'_{1e}) = 0 \quad \text{----- (5)}$$

(5)式を(4)式に代入すると

$$R_1 + (Hd + Hp)(\eta'_{20} - \eta'_{1e}) + Hp(y'_{20} - y'_{1e}) = 0 \quad \text{----- (6)}$$

Hd に比べ Hp が十分に小さいと仮定すると

$$R_1 + Hd(\eta'_{20} - \eta'_{1e}) = 0 \quad \text{----- (7)}$$

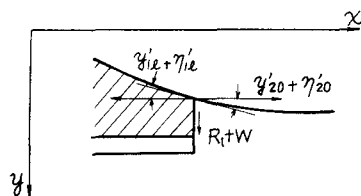


Fig. 2

以上から架設先端部のケーブルポテンシャルエネルギーは次式で表わせる。

$$V_{c2} = \frac{1}{2} R_1 \delta A + \frac{1}{2} R_2 \delta B = \frac{1}{2} Hd \{ (-\eta'_{20} + \eta'_{1e}) \delta A + (-\eta'_{30} + \eta'_{2e}) \delta B \} \quad \text{----- (8)}$$

(3) 桁のポテンシャルエネルギー

Fig. 1 において桁のポテンシャルエネルギーに関係するたわみは $\delta_1, 3$ であるから桁のポテンシャルエネルギーは次式で表せる。

$$V_g = \frac{1}{2} EI_1 \int_0^{\ell_1} (\delta_1'')^2 dx + \frac{1}{2} EI_3 \int_0^{\ell_3} (\delta_3'')^2 dx \quad \text{----- (9)}$$

ただし、 EI_1, EI_3 は各々、 ℓ_1, ℓ_3 区間の曲げ剛性である。

(4) 外力のポテンシャルエネルギー

Fig. 1 の各間に作用する活荷重 $P_1, 2, 3$ とすると外力のポテンシャルエネルギーは次式で表せる。

$$W = \int_0^{\ell_1} P_1 \left(\delta_1 + \frac{\delta A}{\ell_1} x \right) dx + \int_0^{\ell_2} P_2 \left\{ \delta_2 + \delta A \left(\frac{\ell_2 - x}{\ell_2} \right) + \delta B \frac{x}{\ell_2} \right\} dx + \int_0^{\ell_3} P_3 \left(\delta_3 + \delta B \frac{\ell_3 - x}{\ell_3} \right) dx \quad \text{----- (10)}$$

2-2 ポテンシャルエネルギーの変分と釣り合い式

2-1 で求めた各部のポテンシャルエネルギーの変分をとり、釣り合い式を求めるものとする。

(1) (3) 式の第1項の変分

Fig. 3 において左端の変位を $\delta\alpha$ 、右端の変位を $\delta\beta$ 、変位後の左端と右端を結ぶ直線からの変位を δi とすると全変位 η_i に関して次式で表わせる。

$$\eta_i = \delta i + \delta\alpha + \frac{\delta\beta - \delta\alpha}{\ell_i} x, \quad \eta_i'' = \delta i'' \quad \text{----- (11)}$$

$$\text{よって、} -\frac{1}{2} Hd \int_0^{\ell_i} \eta_i'' \eta_i dx = -\frac{1}{2} Hd \int_0^{\ell_i} \left\{ \delta i'' \delta i + \delta i'' \delta\alpha \left(\frac{\ell_i - x}{\ell_i} \right) + \delta i'' \frac{\delta\beta}{\ell_i} x \right\} dx \quad \text{----- (12)}$$

(12) 式の右辺についての変分を $x=0, \ell_i$ において $\delta i, \Delta \delta i = 0$ であることを考慮して行ない、かつ部分積分を施せば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \int_0^{\ell_i} \delta i'' \delta i dx &= 2 \int_0^{\ell_i} \delta i'' \Delta \delta i dx \\ \Delta \int_0^{\ell_i} \delta i'' \delta\alpha \left(\frac{\ell_i - x}{\ell_i} \right) dx &= -\Delta \delta i' \delta\alpha - \delta i' \Delta \delta\alpha \\ \Delta \int_0^{\ell_i} \delta i'' \frac{\delta\beta}{\ell_i} x dx &= \Delta \delta i' \delta\beta + \delta i' \Delta \delta\beta \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (13)}$$

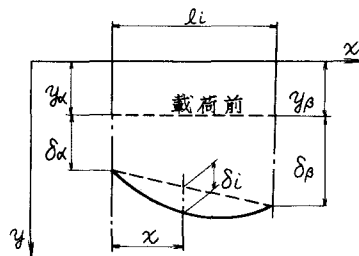


Fig. 3

(13) 式より、(12) 式の変分は次のようになる。

$$\Delta \left(-\frac{1}{2} H_d \int_0^{l_i} \eta_i'' \eta_i dx \right) = -\frac{1}{2} H_d \left(2 \int_0^{l_i} \delta i'' \Delta \delta i dx - \Delta \delta i_0 \delta \alpha - \delta i_0' \Delta \delta \alpha + \Delta \delta i_l \delta \beta + \delta i_l' \Delta \delta \beta \right) \quad (14)$$

(2)(3) 式の第2項目 $\left(-\frac{1}{2} H_P \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx \right)$ の変分

ケーブル方程式よりケーブル支間について次式が得られる。

$$H_P \frac{L_E}{E_c A_c} = \int_0^L y' \eta' dx = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i' \eta_i' dx \quad (15)$$

ここに、 $L_E = \int_0^L \sec^3 \varphi dx$ (φ ; ケーブル傾斜角), $E_c A_c$; ケーブル伸び剛性

(15) 式の l_i 区間の積分を行えば

$$\int_0^{l_i} y_i' \eta_i' dx = - \int_0^{l_i} y_i'' \delta i dx + (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta \beta - \delta \alpha}{l_i} \quad (16)$$

(16) 式を(15)式に代入すると H_P に関して次式が得られる。

$$H_P = \frac{E_c A_c}{L_E} \sum_{i=1}^3 \left\{ - \int_0^{l_i} y_i'' \delta i dx + (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta \beta - \delta \alpha}{l_i} \right\} \quad (17)$$

一方、 $\int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx$ は部分積分により次のように導かれる。

$$\int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx = \int_0^{l_i} y_i'' \delta i dx + (y_{i,l}' \delta \beta - y_{i,0}' \delta \alpha) - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta \beta - \delta \alpha}{l_i} \quad (18)$$

(18) 式の内の $(y_{i,l}' \delta \beta - y_{i,0}' \delta \alpha)$ において近似的に $y_{i,l}' = y_{i+1,0}'$ が成り立つとすると各径間を集計すると零となる。 よって、

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx = \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \delta i dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta \beta - \delta \alpha}{l_i} \right\} \quad (19)$$

(17), (19) 式より

$$-\frac{1}{2} H_P \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx = \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L_E} \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \delta i dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta \beta - \delta \alpha}{l_i} \right\} \right]^2 \quad (20)$$

(20) 式の変分を行ない、(17) 式を適用すれば、

$$\begin{aligned} \Delta \left(-\frac{1}{2} H_P \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} y_i'' \eta_i dx \right) &= \frac{E_c A_c}{L_E} \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \delta i dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\delta \beta - \delta \alpha}{l_i} \right\} \right] \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \Delta \delta i dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\Delta \delta \beta - \Delta \delta \alpha}{l_i} \right\} \right] \\ &= -H_P \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{l_i} y_i'' \Delta \delta i dx - (y_\beta - y_\alpha) \frac{\Delta \delta \beta - \Delta \delta \alpha}{l_i} \right\} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

(3)(8) 式の変分

$\eta_1' = \delta_1' + \delta A/l_1$, $\eta_2' = \delta_2' + (\delta B - \delta A)/l_2$, $\eta_3' = \delta_3' - \delta B/l_2$ であるから、

$$V_{C2} = \frac{1}{2} H_d \left[\left\{ -\delta_{20}' + \delta_{12}' - \frac{\delta B}{l_2} + \delta A \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right\} \delta A + \left\{ -\delta_{30}' + \delta_{22}' - \frac{\delta A}{l_2} + \delta B \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right\} \delta B \right] \quad (8')$$

(8') 式を変分する。

$$\Delta V_{C2} = \frac{1}{2} H_d \left\{ \begin{aligned} & -\Delta \delta_{20}' \delta A - \delta_{20}'' \Delta \delta A + \Delta \delta_{12}' \delta A + \delta_{12}'' \Delta \delta A - \Delta \delta B \frac{\delta A}{l_2} - \delta B \frac{\Delta \delta A}{l_2} + 2 \Delta \delta A \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \delta A \\ & -\Delta \delta_{30}' \delta B - \delta_{30}'' \Delta \delta B + \Delta \delta_{22}' \delta B + \delta_{22}'' \Delta \delta B - \frac{\Delta \delta A \delta B}{l_2} - \frac{\delta A \Delta \delta B}{l_2} + 2 \Delta \delta B \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \delta B \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(4) 桁のポテンシャルエネルギーの変分

(9) 式の任意径間について変分し、部分積分を行えば、

$$\Delta V_g = \frac{1}{2} EI_i \int_0^{l_i} 2 \delta i'' \delta i'' dx = EI_i \{ [\delta i' \Delta \delta i]_0^{l_i} - [\delta i'' \delta i]_0^{l_i} + \int_0^{l_i} \delta i^{IV} \Delta \delta i dx \} \quad (23)$$

$x=0$, l_i において $\delta i' = \Delta \delta i = 0$ であるから

$$\Delta V_g = EI_i \int_0^{l_i} \delta i^{IV} \Delta \delta i dx \quad (24)$$

(5) 活荷重のポテンシャルエネルギーの変分

(10) 式について変分する。

$$\Delta W = \int_0^{l_1} P_1 \Delta \delta_1 dx + \int_0^{l_2} P_2 \Delta \delta_2 dx + \int_0^{l_3} P_3 \Delta \delta_3 dx + (R_{1R} + R_{2L}) \Delta \delta_A + (R_{2R} + R_{3L}) \Delta \delta_B \quad (25)$$

(25) 式において R_{1R} , R_{2L} は、 l_i 径間を単純梁とした時の右側、左側の活荷重反力である。

2-3 釣り合い式

ポテンシャルエネルギーの内、部材に関するものを U 、外荷重に関するものを W とすると、体系全体のポテンシャルエネルギー Π の変分 $\Delta \Pi = \Delta U - \Delta W = 0$ の条件より釣り合い式を求める。

(1) 既設桁部での釣り合い式

l_i 径間について $\Delta \Pi = 0$ をあてはめると、(14), (21), (24), (25) 式より次式が成り立つ。

$$\int_0^{l_i} (-H_a \delta i'' - H_p y_i'' + EI_i \delta i^{IV} - P_i) \Delta \delta i dx = 0$$

$\Delta \delta i$ は任意であるから

$$-H_a \delta i'' - H_p y_i'' + EI_i \delta i^{IV} - P_i = 0 \quad (26)$$

(26) 式が l_i 径間での釣り合い方程式であり、 $H_w \gg H_p$ の時の完成吊橋における線形化撓度理論と一致する。

(2) 架設先端部での釣り合い式

(14), (21), (22), (25) 式を集計し、 $\Delta \delta_A$, $\Delta \delta_B$ について整理すれば、 $\Delta \delta_A$, $\Delta \delta_B$ は任意であることの条件から次の二式が成り立つ。

$$H_d \left\{ -\frac{\delta_B}{l_2} + \delta_A \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right\} + H_p \left(\frac{y_A}{l_1} - \frac{y_B - y_A}{l_2} \right) - R_{1R} - R_{2L} = 0 \quad (27)$$

$$H_d \left\{ -\frac{\delta_A}{l_2} + \delta_B \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right\} + H_p \left(\frac{y_B - y_A}{l_2} - \frac{y_B}{l_3} \right) - R_{2R} - R_{3L} = 0 \quad (28)$$

(27), (28) 式が成り立つことを証明する。 Fig. 4 において $(l_1 + l_2)$ を単純梁とする A 点のモーメントを M_A とすれば

$$M_A = M_d + M_{l1} + M_{l2} \quad (29)$$

ここに、 M_d ; 死荷重によるもの

$M_{l1, 2}$; 径間 1, 2 の活荷重によるもの

$$H_d + H_p = \frac{M_A}{f} \quad (30)$$

$$f = \delta_A + y_A - (\delta_B + y_B) \frac{l_1}{l_1 + l_2} \quad (31)$$

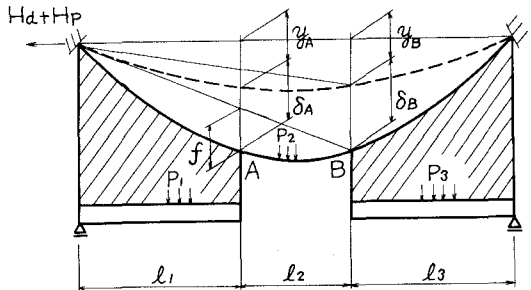


Fig. 4

(29), (31) 式を (30) 式に代入すると.

$$Hd(\gamma_A - \gamma_B \frac{l_1}{l_1 + l_2}) + Hd(\delta_A - \delta_B \frac{l_1}{l_1 + l_2}) + Hp(\gamma_A - \gamma_B \frac{l_1}{l_1 + l_2}) + Hp(\delta_A - \delta_B \frac{l_1}{l_1 + l_2}) = Md + M_{l1} + M_{l2} \dots (32)$$

(32) 式において $Hd\{\gamma_A - \gamma_B \frac{l_1}{l_1 + l_2}\} = Md$ であることを考慮し, $Hp\{\delta_A - \delta_B \frac{l_1}{l_1 + l_2}\}$ を無視して両辺を $(l_1 + l_2) / (l_1 l_2)$ 倍すれば,

$$Hd(\delta_A \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} - \frac{\delta_B}{l_2}) + Hp(\gamma_A \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} - \frac{\gamma_B}{l_2}) = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} (M_{l1} + M_{l2}) \dots (33)$$

(33) 式の左辺は (27) 式の左辺に等しい. また, (33) 式の右辺と (27) 式の $(R_{1R} + R_{2L})$ の等しいことは Fig. 5 よりわかる. (a) 図は $(l_1 + l_2)$ を単純梁とした時の A 桌の曲げモーメントの影響線であり, (b) 図は l_1 および l_2 の単純梁の A 桌での支桌反力の影響線である.

(a) 図の縦距を $(l_1 + l_2) / (l_1 l_2)$ 倍すれば, (b) 図の縦距に一致することがわかる. B 桌についても A 桌と同様なことを行えば (28) 式が満足する釣り合い式であることがわかる.

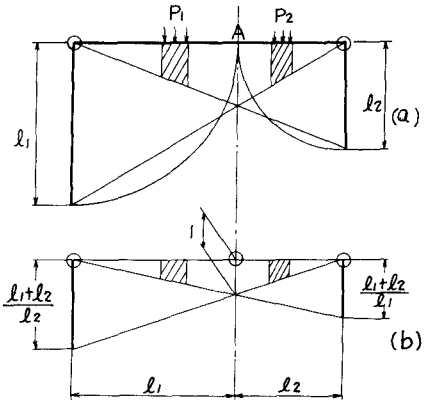


Fig. 5

3. 吊橋架設時の動的な問題

2. において静的な問題の場合, 各部のポテンシャルエネルギーの変分より求められた釣り合い式が満足なものであることが確認されたが, 動的な問題においても同様にして釣り合い式を求めれば静的な場合の荷重項が慣性力に置き換えられた釣り合い式が得られるのは明らかである. ここでは各部のポテンシャルエネルギーを規準振動形で表示し, Rayleigh-Ritz 法にて固有値を求めるものとする.

3-1 逆対称振り振動

(1) 振動モードの仮定

振動モードを Fig. 6 のように仮定する.

$$\begin{cases} \varphi_1 = a_1 \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{b_1}{l_1} x; 0 \leq x \leq l_1 \\ \varphi_2 = a_2 \sin \frac{\pi}{l_2} x - \frac{b_1}{l_2} x + b_1; 0 \leq x \leq l_2 \end{cases} \quad (34)$$

ここに φ ; 振り角

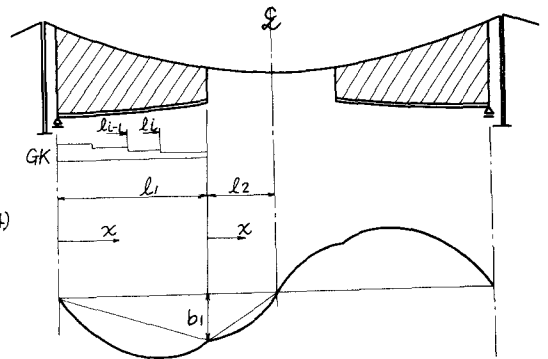


Fig. 6

(2) 桁のポテンシャルエネルギーの最大値

桁の振り剛度 GK が振動数に対し通常支配的であるのでその変断面を考慮すれば,

$$V_g = 2 \times \frac{1}{2} ECw \int_0^{l_1} (\varphi_1'')^2 dx + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n GK_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} (\varphi_i')^2 dx \dots (35)$$

ここに, ECw ; 曲げ振り剛性, GK_i ; i 区間目の振り剛性 (34) 式を微分し, (35) 式に代入する.

$$ECw \int_0^{l_1} (\varphi_1'')^2 dx = ECw \frac{\pi^4}{2l_1^3} a_1^2 \dots (36)$$

$$GK_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} (\varphi_i')^2 dx = GK_i \left[a_i^2 \left(\frac{\pi}{l_i} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} (l_i - l_{i-1}) + \frac{l_i}{4\pi} (\sin \frac{2\pi}{l_i} l_i - \sin \frac{2\pi}{l_i} l_{i-1}) \right\} \right. \\ \left. + 2a_i \frac{b_i}{l_i} (\sin \frac{\pi}{l_i} l_i - \sin \frac{\pi}{l_i} l_{i-1}) + \left(\frac{b_i}{l_i} \right)^2 (l_i - l_{i-1}) \right] \dots (37)$$

(3) ケーブルのポテンシャルエネルギーの最大値

1) 一般部

逆対称振動であるので(3)式の $H_p = 0$ とする。

$$\text{ゆえに, } V_{C1} = 2 \times \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} (-H_d \eta_i'') \eta_i dx \dots\dots\dots (38)$$

$\eta = b\varphi/2$ (ただし, b ; ケーブル間隔) の関係を考慮し, (34)式とその微分値を代入すれば,

$$V_{C1} = \frac{H_d b^2}{4} \left\{ \frac{\pi^2}{\ell_1} \left(\frac{Q_1^2}{2} + \frac{A_1 b_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{\ell_2} \left(\frac{Q_2^2}{2} + \frac{b_1 Q_2}{\pi} \right) \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ただし, H_d はケーブル2本当りである。

2) 架設先端部

(8)式と(34)式より,

$$V_{C2} = 2 \times \frac{1}{2} H_d \frac{b^2}{4} (-\varphi'_{20} + \varphi'_{1\ell}) b_1 = H_d \frac{b^2}{4} (-A_1 \frac{\pi}{\ell_1} + \frac{b_1}{\ell_1} - A_2 \frac{\pi}{\ell_2} + \frac{b_1}{\ell_2}) b_1 \dots\dots\dots (40)$$

(4) 運動エネルギーの最大値

$$T = 2 \times \frac{\omega^2}{2g} \left\{ (r^2 \omega_f^2 + \frac{b^2}{4} \omega_{C1}) \int_0^{\ell_1} \varphi_1^2 dx + \frac{b^2}{4} \omega_{C2} \int_0^{\ell_2} \varphi_2^2 dx + P_C b_1^2 \right\} \dots\dots\dots (41)$$

ここに, ω ; 固有円振動数, $r^2 \omega_f^2$; r は回転半径, ω_f は桁部単位長さ当りの重量

ω_C ; ケーブル部単位長さ当りの重量 (/Br), P_C ; 架設先端部の極慣性モーメント

(41)式に(34)式を代入すれば,

$$T = \omega^2 \left\{ \frac{r^2 \omega_f^2 + \frac{b^2}{4} \omega_{C1}}{g} \left(\frac{\ell_1}{2} Q_1^2 + \frac{2\ell_1}{\pi} A_1 b_1 + \frac{\ell_1}{3} b_1^2 \right) + \frac{b^2 \omega_{C2}}{4g} \left(\frac{\ell_2}{2} Q_2^2 + \frac{2\ell_2}{\pi} A_2 b_1 + \frac{\ell_2}{3} b_1^2 \right) + \frac{P_C}{g} b_1^2 \right\} \dots\dots\dots (42)$$

(5) 振動数方程式

(35) ~ (42)式より, $T - V$ を求め, $T - V$ を最小とする条件より Q_1, Q_2, b_1 で偏微分し, 各々零と置くことにより次の振動数方程式が得られる。基本式を $(A - \omega^2 B) X = 0$ とすれば A, B, X は各々次のようになる。

$$A = \begin{vmatrix} \frac{EC\omega\pi^4}{\ell_1^3} + \frac{H_d b^2 \pi^2}{4\ell_1} + A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & \frac{H_d b^2}{4} \frac{\pi^2}{\ell_2} & 0 \\ A_{31} & 0 & \frac{H_d b^2}{4} 2\left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2}\right) + A_{33} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{W\ell_1}{g} & 0 & \frac{2W\ell_1}{\pi g} \\ 0 & \frac{\alpha W\ell_2}{g} & \frac{2\alpha W\ell_2}{\pi g} \\ \frac{2W\ell_1}{\pi g} & \frac{2\alpha W\ell_2}{\pi g} & \frac{2}{3g} W(\ell_1 + \alpha\ell_2) + \frac{2P_C}{g} \end{vmatrix}$$

$$X = |Q_1, Q_2, b_1|^T \dots\dots\dots (43)$$

$$\therefore \text{ここに } A_{11} = 2\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \sum_{i=1}^n GK_i \left\{ \frac{1}{2}(l_i - l_{i-1}) + \frac{l_i}{4\pi} (\sin \frac{2\pi}{l_1} l_i - \sin \frac{2\pi}{l_1} l_{i-1}) \right\}$$

$$A_{13} = A_{31} = 2 \frac{\pi}{l_1^2} \sum_{i=1}^n GK_i (\sin \frac{\pi}{l_1} l_i - \sin \frac{\pi}{l_1} l_{i-1}), \quad A_{33} = \frac{2}{l_1^2} \sum_{i=1}^n GK_i (l_i - l_{i-1})$$

$$W; \quad r_1^2 \omega_{f1} + \frac{b^2}{4} \omega_{c1}, \quad \alpha; \quad \frac{b^2 \omega_{c2}}{4} / W$$

3-2 対称振り振動

(1) 振動モードの仮定

振動モードを Fig. 7 のように仮定する。

中央径間に対しては

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{b_1}{l_1} x; 0 \leq x \leq l_1 \\ \varphi_2 &= A_2 \sin \frac{\pi}{l_2} x + b_1; 0 \leq x \leq l_2 \end{aligned} \right\} \text{----- (44)}$$

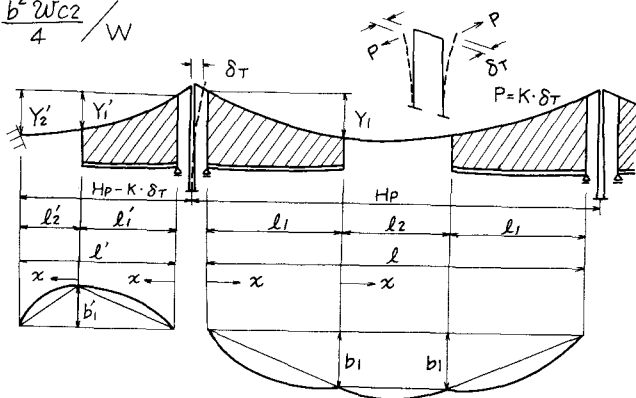


Fig. 7

側径間に対しては

$$\theta_1 = A'_1 \sin \frac{\pi}{l'_1} x + \frac{b'_1}{l'_1} x; 0 \leq x \leq l'_1, \quad \theta_2 = A'_2 \sin \frac{\pi}{l'_2} x - \frac{b'_1}{l'_2} x + b'_1; 0 \leq x \leq l'_2 \text{----- (45)}$$

(2) 桁のポテンシャルエネルギーの最大値

(36), (37) 式と同様にして次式で与えられる。

$$V_g = ECw \frac{\pi^4}{2l_1^3} A_1^2 + ECw' \frac{\pi^4}{2l_1^3} A_1'^2 + g_c + g_s \text{----- (46)}$$

ただし、 g_c と g_s は (37) 式で与えられるものである。

(3) ケーブル一般部のポテンシャルエネルギーの最大値

1) 死荷重ケーブル水平張力 Hd によるもの

(39) 式と同様にして吊橋全径間に渡って積分すれば次式を得る。

$$V_{C1} = \frac{H_d b^2}{4} \left\{ \frac{\pi^2}{l_1} \left(\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_1 b_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{2l_2} \left(\frac{A_2^2}{2} + \frac{2A_2 b_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{l_1'} \left(\frac{A_1'^2}{2} + \frac{A_1' b'_1}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{l_2'} \left(\frac{A_2'^2}{2} + \frac{A_2' b'_1}{\pi} \right) \right\} \text{----- (47)}$$

2) ケーブル付加水平張力 Hp によるもの

(3) 式の第2項目の計算を行なう。なお、 Hp の大きさについては主塔のバネ剛度を考慮するので側径間と中央径間で区別する。 Fig. 7 において塔の倒れ量を δ_T とすると

$$\delta_T = -(Hp L_{EC} / E_c A_c - SUC) / 2 \text{----- (48)}$$

ただし、 SUC は (24) 式の { } 内の中央径間に関する合計値であってたわみに関する値であるから (53) 式に b (ケーブル巾) / 2 を乗じる。また、 Hp , A_c はとも片ケーブル当りとする。一方、ケーブル方程式より次式が得られる。

$$2(Hp - K \cdot \delta_T) L_{ES} / E_c A_c - 2SUS + Hp L_{EC} / E_c A_c - SUC = 0 \text{----- (49)}$$

ただし、 K は Fig. 7 で示されるように主塔を振った時の片塔柱当りのバネ剛度である。また、 SUS は SUC と同様にして側径間 (片側) について求めたものである。(49) 式に (48) 式を代入すると、

$$Hp = \left\{ 2SUS + \left(1 + \frac{K \cdot L_{ES}}{E_c A_c} \right) \cdot SUC \right\} / \left\{ \frac{2L_{ES} + L_{EC}}{E_c A_c} + \frac{K \cdot L_{EC} L_{ES}}{(E_c A_c)^2} \right\} = C_1 \cdot SUS + C_2 \cdot SUC \text{----- (50)}$$

H_pに関する全橋のポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。(17), (20)式を参照すると、

$$V_{C2} = \{ (H_p - K \delta_T)^2 SUS / 2 + H_p \cdot SUC / 2 \} \times 2 \quad \text{----- (51)}$$

(51)式のH_p, δ_Tに各々(48), (50)式を代入すると

$$V_{C2} = C_1 \left(2 + \frac{K \cdot LEC}{EcAc} \right) SUS^2 + \{ C_1 + C_2 \left(2 + \frac{K \cdot LEC}{EcAc} \right) - K \} SUS \cdot SUC + C_2 \cdot SUC^2$$

更に簡単に次式で置き換える。 $V_{C2} = A_1 \cdot SUS^2 + A_2 \cdot SUS \cdot SUC + A_3 \cdot SUC^2$ ----- (52)

(4) 架設先端部のケーブルポテンシャルエネルギー

(8)式を参考にすれば中央径間、側径間について次式を得る。

$$V_{C3} = 2 \times \{ Hd(b/2)^2 (-\varphi'_{20} + \varphi'_{12}) b_1 / 2 + Hd(b/2)^2 (-\theta'_{20} + \theta'_{12}) b'_1 / 2 \} \quad \text{----- (53)}$$

(53)式に(44), (45)式を代入すると

$$V_{C3} = Hd(b/2)^2 \{ (-a_1 \pi / \ell_1 - a_2 \pi / \ell_2 + b_1 / \ell_1) b_1 + (-a'_1 \pi / \ell'_1 - a'_2 \pi / \ell'_2 + b'_1 (\frac{1}{\ell'_1} + \frac{1}{\ell'_2})) b'_1 \} \quad \text{----- (54)}$$

(5) 主塔のポテンシャルエネルギー

主塔のポテンシャルエネルギーはKが片塔柱当りであることを考慮すると全橋で次式で表わせる。

$$V_t = 4 \times \{ K \cdot \delta_T^2 / 2 \} = 2K \cdot \delta_T^2$$

(48), (50)式より

$$V_t = \{ \frac{K}{2} \left(\frac{LEC}{EcAc} \right)^2 C_1^2 \} SUS^2 + \{ K \left(\frac{LEC}{EcAc} \right)^2 C_1 C_2 - K \left(\frac{LEC}{EcAc} \right) C_1 \} SUS \cdot SUC \\ + \{ \frac{K}{2} \left(\frac{LEC}{EcAc} \right)^2 C_2^2 - K \left(\frac{LEC}{EcAc} \right) C_2 + \frac{K}{2} \} SUC^2 = A'_1 \cdot SUS^2 + A'_2 \cdot SUS \cdot SUC + A'_3 \cdot SUC^2 \quad \text{----- (56)}$$

(6) 運動エネルギーの最大値

(41)式と同様にして次式を得る。

$$T = \frac{\omega}{2g} \left\{ 2(r_1^2 \dot{w}_{f1} + \frac{b^2}{4} \dot{w}_{c1}) \int_0^{\ell_1} \dot{\varphi}_1^2 dx + \frac{b^2}{4} \dot{w}_{c2} \int_0^{\ell_2} \dot{\varphi}_2^2 dx + 2Pc b^2 \right\} \\ + 2(r_1'^2 \dot{w}_{f1}' + \frac{b^2}{4} \dot{w}_{c1}') \int_0^{\ell_1'} \dot{\theta}_1'^2 dx + 2 \frac{b^2}{4} \dot{w}_{c2}' \int_0^{\ell_2'} \dot{\theta}_2'^2 dx + 2Ps b'^2 \quad \text{----- (57)}$$

ここに、上段が中央径間に関するもの、下段が側径間に関するもので定数値の意味は(41)式の時と同じ。

(7) 振動数方程式

(46), (47), (52), (54), (56)式より、T-Vを求め、a₁, a₂, b₁, a'₁, a'₂, b'₁について偏微分することにより、(43)式と同様にして振動数方程式が得られる。

$$A = A_1 + A_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \frac{EC_w \pi^4}{\ell_1^3} + \frac{H a b^2 \pi^2}{4 \ell_1} + a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & \frac{H a b^2 \pi^2}{8 \ell_2} & 0 \\ a_{31} & 0 & \frac{H a b^2}{2 \ell_1} + a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = \begin{vmatrix} \frac{EC_w \pi^4}{\ell_1'^3} + \frac{H a b^2 \pi^2}{4 \ell_1'} + a_{11} & 0 & a_{13}' \\ 0 & \frac{H a b^2 \pi^2}{4 \ell_2'} & 0 \\ a_{31}' & 0 & \frac{H a b^2}{2} \left(\frac{1}{\ell_1'} + \frac{1}{\ell_2'} \right) + a_{33}' \end{vmatrix}$$

ただし、A₁₂ = A₂₁ = 0, a_{ij}, a_{ij}'は(43)式で与えられたものと同様である。A₂はH_p及び主塔のポテンシャルエネルギー((52), (56)式)を偏微分することにより得られたもので、

$$Y = \left[2 \times \frac{8 f_1}{\ell_1^2} \frac{\ell_1}{\pi}, \frac{8 f_2}{\ell_2^2} \frac{\ell_2}{\pi}, \frac{Y_1}{\ell_1} \right]^T, Y' = \left[2 \times \frac{8 f_1'}{\ell_1'^2} \frac{\ell_1'}{\pi}, 2 \times \frac{8 f_2'}{\ell_2'^2} \frac{\ell_2'}{\pi}, \left(\frac{Y_1'}{\ell_1'} + \frac{Y_1' - Y_2'}{\ell_2'} \right) \right]^T$$

とおくと (なお、 $8 f_i / \ell_i^2 = \dot{w}_i / Hd$ として与えられる。)

$$A_{211} = Y \cdot Y^T \cdot (A_3 + A'_3) \cdot 2b^2, \quad A_{212} = Y \cdot Y'^T \cdot (A_2 + A'_2) \cdot b^2/2$$

$$A_{221} = Y' \cdot Y^T \cdot (A_2 + A'_2) \cdot b^2/2, \quad A_{222} = Y' \cdot Y'^T \cdot (A_1 + A'_1) \cdot b^2/2 \quad \text{となる。}$$

次に運動エネルギーに関するBマトリクスは

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad B_{21} = B_{12} = 0$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} \frac{W}{g} l_1 & 0 & 2 \frac{W}{g} \frac{l'_1}{\pi} \\ 0 & \frac{d_1 W}{g} l_2 & \frac{4 d_1 W}{g} \frac{l_2}{\pi} \\ \frac{2W}{g} \frac{l_1}{\pi} & \frac{4 d_1 W}{g} \frac{l_2}{\pi} & \frac{W}{g} \left(\frac{2l_1}{3} + 2 d_1 l_2 \right) + \frac{2Pc}{g} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{d_2 2W}{g} \frac{l'_1}{\pi} & 0 & \frac{2 d_2 2W}{g} \frac{l'_1}{\pi} \\ 0 & \frac{d_3 W}{g} l'_2 & \frac{2 d_3 W}{g} \frac{l'_2}{\pi} \\ \frac{2 d_2 2W}{g} \frac{l'_1}{\pi} & \frac{2 d_3 W}{g} \frac{l'_2}{\pi} & \frac{2W}{3g} (d_2 l'_1 + d_3 l'_2) + 2Pc/g \end{bmatrix}$$

----- (58)

ここに、 d_1, d_2, d_3 は l_1 区間の極慣性モーメント ($r^2 w_f + \frac{b^2}{4} w_c$) に対する l_2, l'_1, l'_2 区間の比率である。

4. 計算例

3. で述べた方法による計算例をTable. 1に示す。

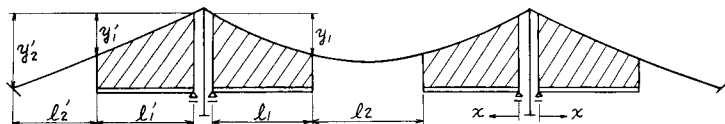
4 Stepの計算時間は16秒であった。(UNIVAC1106)

5. あとがき

吊橋の架設途上の振動計算をハンガーを膜としたRayleigh-Ritz法で解析する方法を示したが、離散系モデルとの差はどの程度か問題になるところであるが、本文で示したモードの仮定で(級数1項のみ)で最大5%程度振動数が高めになるようである。

本文の方法によれば鉛直振動の場合も容易に計算できるし、架設ヒンジがある場合も可能である。

今後の問題点としては連続桁の場合のモードの仮定方法であろう。



		Step 1	Step 2	Step 3	Step 4
入力データ	径間 l_1 (m)	150.30	230.46	310.62	370.74
	径間 l_2 (°)	460.90	300.60	140.28	20.04
	径間 l'_1 (°)	49.10	127.66	206.22	235.68
	径間 l'_2 (°)	196.66	118.10	39.54	0
	$8f_i = \frac{2w_i}{Hd}$				
	l_1 区間	0.00191	0.00143	0.00112	0.00100
	l_2 "	0.00057	0.00042	0.00033	0.00030
	l'_1 "	0.00207	0.00155	0.00122	0.00108
	l'_2 "	0.00061	0.00045	0.00036	0.
	ケーブル間隔 b (m)	26	26	26	26
	ケーブル縦距 y_1 (m)	52	64	72	76
	y'_1 (°)	25	55	80	86
	y'_2 (°)	86	86	86	86
	死荷重ケーブル水平張力 Hd (t/gr)	8498	11364	14498	16276
出力データ	ケーブル断面積 AC (m^2 /gr)	0.485	0.485	0.485	0.485
	ケーブルヤング係数 (t/m^2)	2.0×10^7	2.0×10^7	2.0×10^7	2.0×10^7
	主塔の振りバネ (K) (t/m/c)	500	500	500	500
	振り定数 (K) の断面変化				
	径間 l_1				
	第1	30.06 4.71	30.06 4.71	30.06 4.71	30.06 4.71
	第2	70.14 4.32	90.18 4.28	90.18 4.28	90.18 4.28
	第3	110.22 4.03	170.34 3.75	170.34 3.75	170.34 3.75
	第4	150.30 3.73	230.46 3.49	310.62 3.49	370.74 3.49
	l'_1				
	第1	9.82 3.64	29.46 3.62	29.46 3.62	29.46 3.62
	第2	19.82 3.60	49.10 3.57	88.28 3.57	166.94 3.57
	第3	29.82 3.60	88.38 3.57	166.94 3.57	206.22 3.63
	第4	49.10 3.60	127.66 3.57	206.22 3.63	235.68 3.64
	架設先端部極慣性(中央) ($t m^2$)	40 000	40 000	40 000	40 000
	" " (側) (°)	40 000	40 000	40 000	40 000
	l_1 の桁部極慣性 ($t m^2/m$)	1.026	1.053	1.077	1.088
	l'_1 の " " " (°)	1.212	1.212	1.154	1.095
	中央径間のケーブル重量 ($t m/Br$)	4.822	4.822	4.822	4.822
	側径間の " " " (°)	5.158	5.158	5.158	5.158
計算結果	対称振り振動数 (H_2)	0.205	0.270	0.362	0.385
	逆対称 " " (°)	0.276	0.386	0.354	0.443

Table. 1

Natural Vibration Analysis of Suspension Bridge during
Construction by Rayleigh-Ritz Method

Shunzo Nakazaki*

When the wind stability is studied in case of the cantilever erection of suspension bridge, the natural vibration properties should be known previously.

While the natural frequencies of suspension bridge during construction are usually calculated by the discrete space model, it has cost very much to draw up the data and the calculate.

This paper mentions the application of the membrane theory and Rayleigh-Ritz method, which are usually used to the completed system of suspension bridge with regarding hangers as a membrane, to the suspension bridge during construction.

It is verified that equilibrium equation given by the variation of potential energy of each member is satisfied. In the following is presented a method of calculating frequencies by Rayleigh-Ritz method. It is very easy to get the calculated value because of the property of membrane theory.

* Engineering Division, Kawada Industries Inc.