

## (9) 地中加振問題の一考察

### ～ 桌加振解とその構造物への応用 ～

名古屋大学 松岡 理 同 八幡夏恵子 O同 福和伸夫

#### I はじめに

基礎構造物及び地中構造物は地盤と接している為に地盤との相互作用の影響が現われ地震時の挙動は複雑なものとなる。この様に異種媒体の連成問題を扱う方法は一般に解析的手法と数値解析的手法に大別される。地盤の解析としては古くから三次元弾性波動論に基づく解析手法が用いられてきた。この手法は解を求める事は容易ではないが得られさえすれば解の信頼性が高く地盤の振動特性の理解に重要な共振現象や遠散減衰を適確に把握できる。しかし解は微分方程式に基づいて求めなければならない為に難解である。地表面桌加振の解である Lamb の解を用いた解析例はよく見られるものの一つである。それは特異点の扱いなどの複雑さが伴う。また対象とする地盤モデルが半無限均質弾性体、剛基盤上にある弾性体などの途中に複雑な境界を含まないものに限られる。田谷見<sup>(1)</sup>は仮定した変位関数を用いて剛基盤上の円形基礎を解析した。Novak 等も同様の多様な問題を提示した<sup>(2)</sup>。しかし何れも杭断面は円形であり断面形状が限られている。静的問題に関しては Mindlin 解を用いた杭を差分法で解析したものとして文<sup>(3)(4)</sup>がある。

数値解析手法としては有限要素法は有力な方法である。Lysmer<sup>(5)</sup>は粘性境界の概念を用いて相互作用問題を扱った。FEM は種々の地盤性状に対して解析可能であり適用範囲が広い。しかし一般に未知数の数の奥から二次元問題として扱われている。これらに基づいて構造物と地盤とを分離して考え前者を FEM で、後者を FEM 或いは連続体として扱った試みもある。杭、基礎、地盤を等価な要素パネで置換して構造物を解析する Foundation Spring Method は解析が簡単でありまたパネに非線形性を導入する事が容易である。Winkler の方法は杭を弾性支承梁として解析する。Penzien<sup>(6)</sup>は付加質量の概念を導入し杭を FEM で解析した。さらに付加質量を実体の質量として扱った試みもある。杭を伝達マトリックス法や差分法を用いて解析した例もある。

従来地中構造物の解析に静的 Mindlin 解がしばしば用いられてきた。しかし動的 Mindlin 解とも言える地中加振解については解析例が殆どなく前述の如く地表面加振<sup>(7)(8)</sup>について調べられているにすぎない。但しこれらでは地中構造物には適用できない。

著者等は既に三次元均質等方体の基本解<sup>(9)</sup>、半無限弾性体中に桌加振の作用する時の解<sup>(10)(11)</sup>、剛基盤を有する弾性体中に鉛直桌加振が作用した時の解<sup>(12)</sup>を提示しその性状を明らかにしてきた。これらの動的 Mindlin 解は特異点の存在などに依り非常に複雑である。特に円状地盤の場合には特異点の数が著しく増し且つ共振現象を呈する為に特に複雑になる。著者等はこれらに基づいて素解の組合せによる近似解の有効性を示しその構造物への適用の可能性について論じてきた。

本論では鉛直方向地中桌加振解を二種の地盤モデルについて提示しそれ等の性状を明らかにした後にこれらの地中構造物への応用として杭-地盤の相互作用問題について考える。解析は杭を差分分割する事に依る。この試みは静的問題で文<sup>(3)(4)</sup>に示された手法を動的問題に拡張したものである。本手法は動的 Mindlin 解さえ得られていれば非常に簡潔でありまた解法にも統一性がある事が利点である。杭を差分分割する事以外には近似が入らないので解の信頼性も高い。地盤の変位は桌加振解の積分に依るので地中構造物の形状は比較的任意であり本論に示す例以外にも適用が可能である。

#### II 地中桌加振解

本節では半無限弾性体中に鉛直方向桌加振が作用する時の解及び剛基盤を有する弾性体中に鉛直方向桌加振が作用する時の解を示しその結果を考察する。既に文<sup>(10)(11)</sup>で詳しく示してあるので解を求める手順を簡単に述べる。本法では特に素解が重要であり素解とポテンシャルを用いて解析を行う。これらを用いて  $x, y$  座標に関して Fourier 変換し境界条件を導入する事によって未定係数を決定する。さらにこれを逆変換す

る事によって解を求める。

本問題は軸対称になるの $z$  円筒座標 $(r, z)$ を採用する。自由表面を $z=0$ 、剛基盤面を $z=H$ とする。

### 1) 素解

$z=c$  の位置に鉛直方向変位振 $X_3' e^{i\omega t} \delta(r, z-c)$ が作用し、原奥と対称に仮想物体力 $X_3'' e^{i\omega t} \delta(r, z+c)$ があるとする。この時の変位は文<sup>(9)</sup>より

$$\begin{aligned} sU_r &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi G} \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left\{ \frac{1}{R_1} (e^{i\beta_1 R_1} - e^{i\beta_1 R_2}) X_3' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R_2} (e^{i\beta_2 R_2} - e^{i\beta_2 R_1}) X_3'' \right\} \\ sU_z &= \frac{e^{i\omega t}}{4\pi G} \left\{ \left[ \frac{1}{R_1} e^{i\beta_1 R_1} + \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \frac{1}{R_1} (e^{i\beta_1 R_1} - e^{i\beta_1 R_2}) \right] \right] X_3' \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{R_2} e^{i\beta_2 R_2} + \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ \frac{1}{R_2} (e^{i\beta_2 R_2} - e^{i\beta_2 R_1}) \right] \right] X_3'' \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

但し  $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}$ ,  $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2}$  とし

特記のない記号については文<sup>(9)(10)</sup>を参照とする。

次に(1)式及び(1)式による応力を $x, y$ に關してFourier変換し自由表面の応力、剛基盤面での変位を求める。 $X_3' = X_3''$ とし変換場での諸量を $\bar{\sigma}$ と示すと $z=0$ での応力及び $z=H$ での変位は

$$\begin{aligned} s\bar{\sigma}_{rz} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{2}{\beta_2^2} (\gamma_2 e^{-\beta_2 c} - \gamma_1 e^{-\beta_1 c}) + \frac{1}{\gamma_2} e^{-\beta_2 c} \right\} X_3' e^{i\omega t} \\ s\bar{\sigma}_{zz} \Big|_{z=0} &= 0 \\ \text{但し } \gamma_1 &= \sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad \beta_2^2 = k_1^2 + k_2^2 \\ s\bar{U}_r \Big|_{z=H} &= \frac{1}{2G} \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -e^{-(H+c)\beta_1} - e^{-(H+c)\beta_2} + e^{-(H-c)\beta_1} + e^{-(H-c)\beta_2} \right\} X_3' e^{i\omega t} \\ s\bar{U}_z \Big|_{z=H} &= \frac{1}{2G} \left\{ \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\beta_2^2} \right) (e^{-(H-c)\beta_1} + e^{-(H+c)\beta_2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_1}{\beta_2^2} (e^{-(H-c)\beta_1} + e^{-(H+c)\beta_2}) \right\} X_3' e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

### 2) 各次解

(2), (3)式より $s\bar{\sigma}_{zz}$ 以外は境界条件を満足してない。そこでポテンシャルを導入する。文<sup>(7)</sup>より $Z_1, Z_2$ を用いる。この時変位及び応力は

$$hU_r = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (Z_1 - Z_2) \quad hU_z = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) Z_2 \quad (4)$$

$$h\bar{\sigma}_{rz} = G \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1 + \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Z_2 \right\}$$

$$h\bar{\sigma}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1-2\nu) \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1 + \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) Z_2 \right] \right. \\ \left. + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Z_1 \right\} \quad (5)$$

$Z_1, Z_2$ は文<sup>(7)</sup>より夫々縦波、横波の波動方程式を満足する。これらの式を $x, y$ に關してFourier変換する。

$$\frac{d^2 \bar{Z}_1}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2 - \beta_1^2) \bar{Z}_1 = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{Z}_2}{dz^2} - (k_1^2 + k_2^2 - \beta_2^2) \bar{Z}_2 = 0$$

(6)

(6)式より $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ は未定常数 $A_1 \sim B_2$ を用いて

$$\bar{Z}_1 = A_1 e^{-\beta_1 z} + A_2 e^{\beta_1 z}$$

$$\bar{Z}_2 = B_1 e^{-\beta_2 z} + B_2 e^{\beta_2 z}$$

(7)

と求める。(7)式を用いて自由表面の応力、剛基盤の変位を変換場と示す。

$$h\bar{\sigma}_{rz} \Big|_{z=0} = G \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2\beta_1^2 (A_1 + A_2) - (2\beta_2^2 - \beta_1^2) (B_1 - B_2) \right\}$$

$$h\bar{\sigma}_{zz} \Big|_{z=0} = G \left\{ -\gamma_1 (2\beta_2^2 - \beta_1^2) (A_1 - A_2) + 2\beta_2^2 (B_1 - B_2) \right\}$$

(8)

$$hU_r \Big|_{z=H} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -\gamma_1 (A_1 e^{-\beta_1 H} - A_2 e^{\beta_1 H}) + \gamma_2 (B_1 e^{-\beta_2 H} - B_2 e^{\beta_2 H}) \right\}$$

$$hU_z \Big|_{z=H} = \gamma_1^2 (A_1 e^{-\beta_1 H} + A_2 e^{\beta_1 H}) - \beta_2^2 (B_1 e^{-\beta_2 H} + B_2 e^{\beta_2 H})$$

(9)

### 3) 半無限弾性地盤の場合

この時無限遠での境界条件を用いることにより(7)式中の $A_2$ 及び $B_2$ が零になる。これを用いて自由表面の応力の条件を考えることによって以下の $A_1, B_1$ に關する連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -2\beta_1^2 & -(2\beta_2^2 - \beta_1^2) \\ \gamma_1 (2\beta_2^2 - \beta_1^2) & 2\beta_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{X_3' e^{i\omega t}}{G \beta_2^2 \gamma_2} \begin{bmatrix} 2\gamma_2 (\gamma_2 e^{-\beta_2 c} - \gamma_1 e^{-\beta_1 c}) + \beta_2^2 e^{-\beta_2 c} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(10)

(10)式から $A_1, B_1$ を決定する。これらを用いて変換場における変位 $\bar{U}_z$ を求める

$$\begin{aligned} \bar{U}_z &= \frac{X_3' e^{i\omega t}}{G} \left\{ \frac{2\beta_2^2 \gamma_1 (e^{-\beta_2 c} + 2\beta_2^2 (\gamma_2 e^{-\beta_2 c} - \gamma_1 e^{-\beta_1 c}) e^{-\beta_2 c})}{(2\beta_2^2 - \beta_1^2)^2 - 4\beta_1 \beta_2 \beta_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_2^2 \{ -e^{-\beta_2 c} - 2\beta_2^2 (\gamma_2 e^{-\beta_2 c} - \gamma_1 e^{-\beta_1 c}) (-2\beta_2^2 + \beta_1^2) e^{-\beta_2 c} \}}{2\beta_1 (2\beta_2^2 - \beta_1^2)^2 - 4\beta_1 \beta_2 \beta_2^2} \right\} \\ &\quad + F_{xy} [sU_z] \end{aligned} \quad (11)$$

求めるべき $U_z$ は(11)式を逆変換することによって

$$U_z = \frac{X_3' e^{i\omega t}}{2\pi G} \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) [(11)式中の\{\}の中] d\xi$$

$$+ s u_z \quad (12)$$

(12) 式で求めた解については既に文<sup>(10)</sup>で詳述されており 解の検討もなされている。

#### 4) 剛基盤を有する場合

自由表面における応力の条件及び剛基盤面における変位の条件を考えることにより 以下の  $A_1 \sim B_2$  に関する連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} -2\delta_1^2 & -2\delta_1^2 & 2\xi^2 - \rho_2^2 & 2\xi^2 - \rho_2^2 \\ \delta_1(2\xi^2 - \rho_2^2) & -\delta_1(2\xi^2 - \rho_2^2) & -2\delta_2\xi^2 & 2\delta_2\xi^2 \\ \delta_1 e^{\gamma_1 H} & -\delta_1 e^{\gamma_1 H} & -\delta_2 e^{\gamma_2 H} & \delta_2 e^{\gamma_2 H} \\ -\delta_1^2 e^{-\gamma_1 H} & -\delta_1^2 e^{\gamma_1 H} & \xi^2 e^{-\gamma_2 H} & \xi^2 e^{\gamma_2 H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{2G\rho_2^2\delta_2} \begin{bmatrix} 4\delta_2(\delta_2 e^{-\gamma_2 c} - \delta_1 e^{\gamma_2 c}) + 2\rho_2^2 e^{-\gamma_2 c} \\ 0 \\ -\delta_2(e^{-(H-c)\gamma_2} + e^{-(H+c)\gamma_2}) - e^{-(H-c)\gamma_1} - e^{-(H+c)\gamma_1} \\ \xi^2(e^{-(H-c)\gamma_2} + e^{-(H+c)\gamma_2}) - \delta_1\delta_2(e^{-(H-c)\gamma_1} + e^{-(H+c)\gamma_1}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{2G\rho_2^2\delta_2} \{ s\overline{u}_{sr}, 0, s\overline{u}_r, s\overline{u}_z \}^T \quad (13)$$

(13) 式の係数行列の行列式  $\det(a_{ij})$  は

$$\det(a_{ij}) = 2\delta_1^2 \{ -8\delta_1\delta_2\xi^2(2\xi^2 - \rho_2^2) - (\xi^2 - \delta_1\delta_2) \{ (2\xi^2 - \rho_2^2)^2 - 4\delta_1\delta_2\xi^2 \} \cosh\{(\delta_1 + \delta_2)H\} + (\xi^2 + \delta_1\delta_2) \{ (2\xi^2 - \rho_2^2)^2 + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \} \sinh\{(\delta_1 + \delta_2)H\} \} \quad (14)$$

(13) 式の未定常数  $A_1 \sim B_2$  は (14) 式を用いて 以下の様に決定される。

$$A_1 = \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G\delta_1} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} \{ \delta_2\xi^2 \{ (2\xi^2 - \rho_2^2) - 2e^{\gamma_2 H} (\xi^2 \cosh(\delta_1 H) - \delta_1\delta_2 \sinh(\delta_2 H)) \} s\overline{u}_{sr} - \xi^2 \{ 2\delta_1\delta_2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \cosh(\delta_2 H) \} (2\xi^2 - \rho_2^2) \sinh(\delta_2 H) \} s\overline{u}_r - \delta_2 \{ 2\xi^2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \sinh(\delta_1 H) \} (2\xi^2 - \rho_2^2) \cosh(\delta_1 H) \} s\overline{u}_z \}$$

$$= \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G\delta_1} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} A_1'$$

$$A_2 = \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G\delta_1} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} \{ \delta_2\xi^2 \{ (2\xi^2 - \rho_2^2) - 2e^{\gamma_2 H} (\xi^2 \cosh(\delta_1 H) + \delta_1\delta_2 \sinh(\delta_2 H)) \} s\overline{u}_{sr} + \xi^2 \{ 2\delta_1\delta_2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \cosh(\delta_2 H) + (2\xi^2 - \rho_2^2) \sinh(\delta_2 H) \} s\overline{u}_r + \delta_2 \{ 2\xi^2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \sinh(\delta_1 H) - (2\xi^2 - \rho_2^2) \cosh(\delta_1 H) \} s\overline{u}_z \}$$

$$= \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G\delta_1} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} A_2'$$

$$B_1 = \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} \{ -[2\delta_1\delta_2\xi^2 + (2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} (\xi^2 \sinh(\delta_1 H) - \delta_1\delta_2 \cosh(\delta_2 H))] s\overline{u}_{sr} + \delta_1 \{ 2\xi^2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \sinh(\delta_1 H) - (2\xi^2 - \rho_2^2) \cosh(\delta_1 H) \} s\overline{u}_r - (2\delta_1\delta_2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \cosh(\delta_2 H) - (2\xi^2 - \rho_2^2) \sinh(\delta_2 H)) s\overline{u}_z \}$$

$$= \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} B_1'$$

$$B_2 = \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} \{ -[2\delta_1\delta_2\xi^2 - (2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} (\xi^2 \sinh(\delta_1 H) + \delta_1\delta_2 \cosh(\delta_2 H))] s\overline{u}_{sr} - \delta_1 \{ 2\xi^2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} + 4\delta_1\delta_2\xi^2 \sinh(\delta_1 H) - (2\xi^2 - \rho_2^2) \cosh(\delta_1 H) \} s\overline{u}_r - [2\delta_1\delta_2(2\xi^2 - \rho_2^2) e^{\gamma_2 H} - 4\delta_1\delta_2\xi^2 \cosh(\delta_2 H) + (2\xi^2 - \rho_2^2) \sinh(\delta_2 H)] s\overline{u}_z \}$$

$$= \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{G} \frac{1}{\rho_2^2 F(\xi)} B_2' \quad (15)$$

$$\text{但し } F(\xi) = \frac{\delta_2}{\delta_1} \det(a_{ij})$$

(15) 式で決定した未定常数を用いて  $\overline{u}_z$  を求める。さらにこれを逆変換することによって求めるべき  $u_z$  は以下の様に決定される。

$$u_z = \frac{X_3' e^{-i\omega t}}{2\pi G\rho_2^2} \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \frac{\delta_1(A_1' + A_2') - \xi^2(B_1' + B_2')}{F(\xi)} d\xi + s u_z \quad (16)$$

(16) 式に示した解の妥当性については既に文<sup>(12)</sup>において検討を行ったので省略する。

#### 5) 数値計算結果及び考察

半無限地盤については既に文<sup>(10)</sup>で詳細に論じたのでここでは主に剛基盤を有する場合について検討する。剛基盤を有する問題の半無限地盤の場合と大きく異なる点は共振現象であり、これが重要な問題となる。この事が数値計算上 半無限地盤より一層複雑な手順を要する原因である。共振点は以下の時である。i) Rayleigh Poleが重複根となる時 ii)  $\xi=0$  近傍で積分が発散する時 である。これらの事については文<sup>(8)</sup>に詳述されている。この数値演算を行う際には 一般に無次元化量を用いる。その一例を示す。

$$a = \rho_2 r \quad b = \rho_2 z \quad f = \rho_2 c \quad d = \rho_2 H$$

$$\lambda_1 = \rho_2 R_1 = (a^2 + (b-f)^2)^{1/2} \quad \lambda_2 = \rho_2 R_2 = (a^2 + (b+f)^2)^{1/2}$$

$$\zeta = \xi/\rho_2 \quad \gamma = \gamma/\rho_2 \quad \delta_1 = \rho_2 \delta_1 \quad \delta_2 = \rho_2 \delta_2$$

本解は (12) (16) 式に示される様に 特異点を含む半無限積分を実行しなければならぬ。特異点  $F(\xi)=0$  なる根を調べる事によって検出される。特に Rayleigh Poleが重要となる。これは  $\rho_2 H$  の関数であり  $F_2(\xi)$  に

$\nu = 1/3$  の時の  $\zeta_R \sim d$  曲線を示す。半無限地盤の場合には1つであったが剛基盤を有する場合には  $\rho_2 H$  の値によって Rayleigh Pole の値及び数が複雑に変化する。Rayleigh Pole ではこの種の問題で行われる様にその点での留数を求めそれを  $(-\pi i)$  倍した値を用いる。結局解は素解項、留数項及び特異点間の積分項によって構成される。いくつかの数値計算例から留数項は純虚数となり素解項と積分項の虚部が相殺している事が明らかになった。

以下数値計算結果を示す。各図共に半無限地盤の解と剛基盤を有する時の解を併記した。Fig. 2 に  $\rho_2 H = 4.0, \rho_2 c = 1.0$  の時の地盤内変位図を示す。両解の定性的傾向は似ており剛基盤面での条件が満たされている事が分る。

Fig. 3 は振動数による変位応答を示した図であり加振点を層厚の中心にした時の原点における変位である。Fig. 4 は層厚による変位応答を示した図である。 $\rho_2 c = 1.0$  とした時の原点における変位である。両図共に  $\rho_2 H = 3.0$  及び  $\rho_2 H = 3.14$  で共振している。前者は前述の i) による後者は ii) による共振である。最初の共振以下では虚部が小さく共振点で実部発散している。そして共振を繰返しつつ半無限解に収束していく事が理解できる。Fig. 5 は加振位置による影響を調べた図である。 $\rho_2 H = 4.0$  の時の種々の加振位置に対する  $z$  軸上の変位を示した図である。加振位置が剛基盤面に近い時に変位拘束を大きくうけている。特に虚部にその影響が大きい。

以上の事から剛基盤を有すると考える必要があるのは加振位置が層厚に比して深い時及び加振振動数と層厚の関係によりここでは主に低振動数域と層厚が薄い場合に相当する。

本論では省略したが素解の組合せを工夫することによってかなり精度のよい近似解が得られた。これらの近似解は複雑な数値積分がなく演算の簡単な素解のみで扱うことができるので構造物などの相互作用問題への応用に非常に有効であると考えられる。

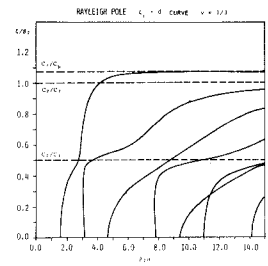


FIG.1 RAYLEIGH POLE  $\zeta_R \sim d$  CURVE

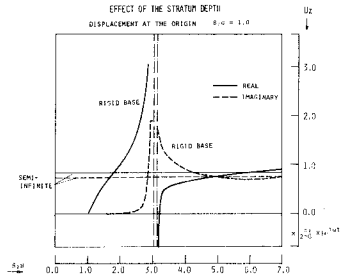


FIG.3 EFFECT OF CIRCULAR FREQUENCY

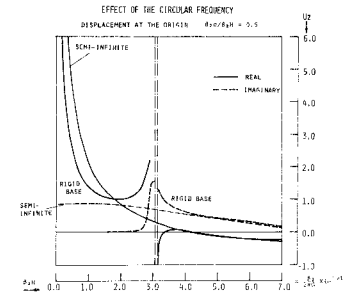


FIG.4 EFFECT OF STRATUM DEPTH

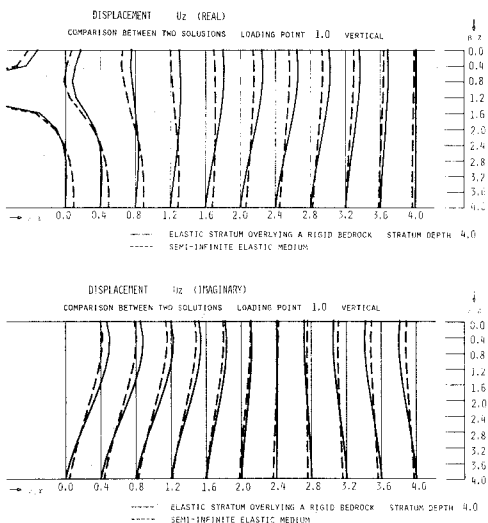


FIG.2 DISPLACEMENT IN THE MEDIUM

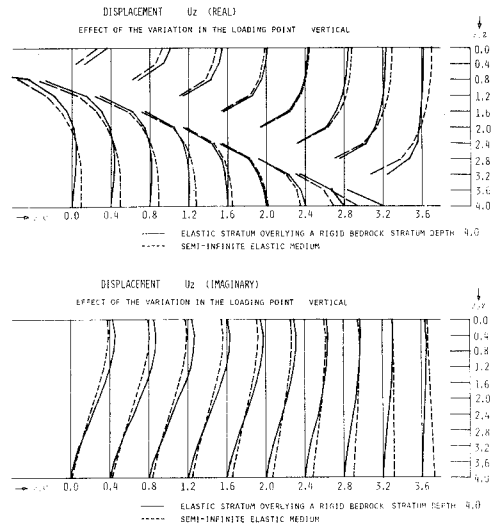


FIG.5 EFFECT OF LOADING POINT

### Ⅲ 杭-地盤動的相互作用問題

Ⅱで求めた地中変加振解を用いて 杭-地盤の動的相互作用問題について考える。この種の相互作用問題は一般に積分方程式に帰結し厳密解の算出が難しい。その為には何らかの仮定を設けて近似的手法を導入した試みが行なわれている。ここでは前述した変加振解を杭の形状に沿って積分し杭を Fig. 7 に示す様に差分分割する。本法を用いる事によってこれらの困難さを排除する事ができる。この手法は文<sup>(13)(14)</sup>の中で述べられているものである。本論では次の3つのモデルを解析する。(a) 半無限弾性体中の摩擦杭 (b) 剛基盤を有する弾性体中の摩擦杭 (c) 剛基盤に杭端が支持された支持杭 の3モデルである。Fig. 6 に図示する。求めるのは 杭上端に鉛直方向加振が作用した時の杭変位及び地盤反力である。杭を  $n+1$  個の差分要素に分割し各差分要素の長さを等しくする。但し 杭上端及び下端の差分要素は他の差分要素の長さの半分とする。そしてこれらの差分要素を用いて杭の支配方程式を差分方程式にして解析する。この時 杭と地盤とが完全密着であるとし 両者の鉛直変位を杭の中心軸で一致させる。地盤の変位はⅡで求めた地中変加振解と面積積分することによって得られる。杭形状は一边  $w$  の正方形断面をもつ長さ  $L$  の杭であるとする。杭上端に  $-Pe^{i\omega t}$  が作用した時を考え 各要素内に生じる地盤反力は等分布とし  $p_n e^{i\omega t}$  であるとする。

#### 1) 杭の変位-地盤反力式

鉛直分布加振が作用する時の杭の運動方程式は

$$E_p A_p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = W p(z) + \gamma A_p \frac{\partial u}{\partial t} \quad (17)$$

$u = u e^{i\omega t}$ ,  $p(z) = p(z) e^{i\omega t}$  とすると (17) 式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta_p^2 u = \frac{4}{E_p A_p} W p(z) \quad (18)$$

但し  $\beta_p^2 = \omega^2 / C_p^2$ ,  $C_p^2 = E / \gamma$  である。

(18) 式を中心差分表示する。各要素内の分布地盤反力を等分布とし  $p_n$  であるとする。

$$u_{n-1} + \left( \beta_p^2 \frac{L^2}{\pi^2} - 2 \right) u_n + u_{n+1} = \frac{4wL^2 p_n}{\pi^2 E_p A_p} \quad (19)$$

これを行列表示すると

$$\frac{4wL^2}{\pi^2 E_p A_p} \{p_n\} = [K_{ij}] \{u_j\} \quad (20)$$

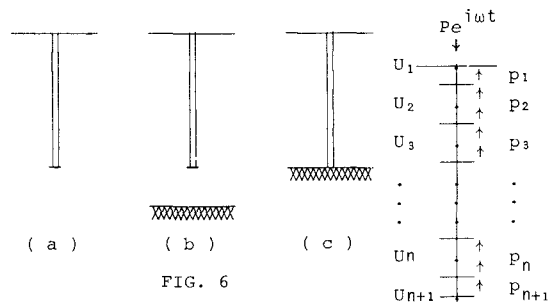


FIG. 6

の様に表わせる。但し  $[K_{ij}]$  は 杭の剛性マトリックスに相当する。

#### 2) 地盤の変位-地盤反力式

差分要素  $j$  に単位等分布加振が作用した時の  $j$  点における変位を  $S_{ij}$  とすると 変位-地盤反力式は

$$\{u_i\} = [S_{ij}] \{p_j\} \quad (21)$$

ここで  $[S_{ij}]$  は 地盤の柔性マトリックスに相当しⅡで求めた地中変加振解 (半無限地盤の場合は (12) 式, 剛基盤を有する場合は (16) 式) を用いて以下の様に求まる。

$$S_{ij} = \int_{-w/2}^{w/2} \int_{z_j^{\text{lower}}}^{z_j^{\text{upper}}} u_z|_{z=z_i} dz dr \quad (22)$$

但し加振面は  $z$  軸上であるとする。

#### 3) 境界条件の導入

(20), (21) 式と境界条件を用いることによって解を決定する。境界条件は摩擦杭と支持杭とは異なる。摩擦杭の場合には杭頭と杭端の条件は共に応力の条件で

$$\sigma = E_p \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=1} = -\frac{P}{A_p} \quad (23)$$

$$\sigma = E_p \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=n+1} = 0 \quad (24)$$

支持杭の場合には杭頭の条件が異なり変位の条件から

$$u|_{z=n+1} = 0$$

となる。これらの境界条件を (20) 式に代入して (20), (21) 式から 変位及び地盤反力を決定する。

#### 4) 数値計算結果及び考察

本論の主目的である 杭の形状効果, 杭端条件の効果等について調べる。  $\beta_p L = 4.0$ ,  $G = 2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $\beta_2 = 0.6$  とした時の (a) 半無限地盤中の摩擦杭 (b) 剛基盤 ( $\beta_2 H = 6.0$ ) を有する弾性体中の摩擦杭 (c) 剛基盤 ( $\beta_2 H = 4.0$ ) に支持された支持杭 の3つのモデルを解析する。杭形状及び杭の弾性常数について数例を調べる

ことにより 杭の  $W/L$  比及び  $E_p/G$  比の効果について観察する。差分分割数については 20 分割までの  $case$  を検討した結果  $n=2$  では 11 分割とする。この時の杭変位を Fig. 9 に示す。各パラメータは図中に示す。

図より (a) と (b) とが非常に一致している。これは (b) が  $\beta_2 H = 6.0$  の剛性壁を有し Fig. 3, 4 を調べるとこの条件下では剛性壁解が半無限解にほぼ一致していること及び (a), (b) の杭端条件が同じであることによる。杭端固定の (c) は (a), (b) とは定性的傾向に差違を生じる。しかし Fig. 3, 4 から理解できる様に (b), (c) の応答は  $\beta_2 H$  の値により変化する。特に共振域付近での応答は (a), (b), (c) は全く異なるであろう。

$E_p/G$  或いは  $W/L$  が大きい時には (a), (b) は剛体的な変形をしているのに比べ (c) は支持条件の等しい棒の共振動時の変形に近い。前者は杭自体は殆ど変形せず地盤が変形している。その為に杭変位は  $E_p$  に殆ど依存しない。このもとに基づいて杭を非圧縮性であると見て解析された試み<sup>(3)</sup>もある。座部の値についても (c) は (a), (b) に比べて非常に小さい。これは特に  $W/L=0.2$   $E_p=2.1 \times 10^8$  の時に特徴的である。従ってこのような場合には杭端条件の決定が重要であると考えられる。一方  $E_p/G$  或いは  $W/L$  が小さい時にはこのモデルの応答は類似している。また杭の上端部のみに大きな変位が生じている。これは加振外力の殆どが杭頭近傍の地盤反力で支持されていることによる。これは  $W/L=0.01$   $E_p=2.1 \times 10^8$  に特徴的である。しかし (a), (b), (c) の応答がほぼ一致しているのは前述の如く Fig. 3, 4 よりこの場合の剛性壁解が半無限解に近いことによる。

$n=2$  では振動数領域の議論はしなかったが一般に地盤の固有振動数は杭のそれに比べて小さくまた卓越する。地盤の振動数特性は既に Fig. 3, 4 でかなり詳細に議論した。杭と地盤との固有振動数が近い場合についてさらに詳細な議論が必要となるであろう。

著者等は前述した様に解法全体を通じて素解が重要である事を述べてきた。それは文<sup>(4)</sup>にも示されている。杭-地盤相互作用でも素解が非常に有効である事を示す。塑性コトリックス  $S_{ij}$  の算出に当り Case 1 は完全解 Case 2 は素解の面積積算 Case 3 は素解の面積積したもの。table 1 にその値を示す。但し座部についてのみである。table 2 及び Fig. 8 にこれを

|    | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6      | 7      | 8       | 9       | 10      | 11      |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | 0.6047  | 0.3916  | 0.1767  | 0.0958  | 0.0505  | 0.0214 | 0.0020 | -0.0104 | -0.0174 | -0.0202 | -0.0144 |
| 2  | 0.2108  | 0.6506  | 0.2485  | 0.1184  | 0.0634  | 0.0311 | 0.0103 | -0.0029 | -0.0105 | -0.0138 | -0.0126 |
| 3  | 0.0817  | 0.2425  | 0.6032  | 0.2053  | 0.0882  | 0.0415 | 0.0153 | -0.0006 | -0.0101 | -0.0149 | -0.0118 |
| 4  | 0.0461  | 0.1069  | 0.1998  | 0.5743  | 0.1879  | 0.0730 | 0.0311 | 0.0087  | -0.0044 | -0.0119 | -0.0099 |
| 5  | 0.0207  | 0.0483  | 0.0791  | 0.1803  | 0.5610  | 0.1754 | 0.0682 | 0.0281  | 0.0087  | -0.0031 | -0.0063 |
| 6  | 0.0096  | 0.0240  | 0.0304  | 0.0673  | 0.1734  | 0.5578 | 0.1751 | 0.0698  | 0.0319  | 0.0119  | -0.0001 |
| 7  | -0.0058 | -0.0076 | 0.0035  | 0.0247  | 0.0654  | 0.1743 | 0.5607 | 0.1791  | 0.0743  | 0.0362  | 0.0090  |
| 8  | -0.0125 | -0.0207 | -0.0124 | 0.0024  | 0.0284  | 0.0691 | 0.1791 | 0.5659  | 0.1842  | 0.0788  | 0.0224  |
| 9  | -0.0158 | -0.0278 | -0.0213 | -0.0102 | 0.0065  | 0.0318 | 0.0749 | 0.1848  | 0.5711  | 0.1884  | 0.0472  |
| 10 | -0.0169 | -0.0302 | -0.0253 | -0.0169 | -0.0046 | 0.0126 | 0.0377 | 0.0802  | 0.1893  | 0.5745  | 0.1182  |
| 11 | -0.0162 | -0.0293 | -0.0257 | -0.0196 | -0.0107 | 0.0014 | 0.0180 | 0.0422  | 0.0838  | 0.1915  | 0.2847  |

|    | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6      | 7       | 8       | 9       | 10      | 11      |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | 0.5696  | 0.3859  | 0.1670  | 0.0860  | 0.0489  | 0.0117 | -0.0077 | -0.0201 | -0.0271 | -0.0299 | -0.0190 |
| 2  | 0.1910  | 0.6587  | 0.2340  | 0.1070  | 0.0489  | 0.0166 | -0.0042 | -0.0174 | -0.0250 | -0.0291 | -0.0143 |
| 3  | 0.0835  | 0.2340  | 0.5956  | 0.1968  | 0.0797  | 0.0330 | 0.0068  | -0.0091 | -0.0186 | -0.0234 | -0.0124 |
| 4  | 0.0430  | 0.1039  | 0.1968  | 0.5713  | 0.1809  | 0.0699 | 0.0281  | 0.0057  | -0.0074 | -0.0150 | -0.0090 |
| 5  | 0.0204  | 0.0489  | 0.0797  | 0.1809  | 0.5615  | 0.1760 | 0.0688  | 0.0297  | 0.0091  | -0.0027 | -0.0042 |
| 6  | 0.0058  | 0.0166  | 0.0330  | 0.0699  | 0.1760  | 0.5604 | 0.1777  | 0.0724  | 0.0345  | 0.0145  | 0.0024  |
| 7  | -0.0038 | -0.0042 | 0.0068  | 0.0281  | 0.0698  | 0.1777 | 0.5641  | 0.1824  | 0.0776  | 0.0396  | 0.0115  |
| 8  | -0.0101 | -0.0174 | -0.0091 | 0.0057  | 0.0297  | 0.0724 | 0.1824  | 0.5692  | 0.1875  | 0.0822  | 0.0250  |
| 9  | -0.0136 | -0.0250 | -0.0186 | -0.0074 | 0.0091  | 0.0345 | 0.0776  | 0.1875  | 0.5738  | 0.1912  | 0.0493  |
| 10 | -0.0150 | -0.0283 | -0.0234 | -0.0150 | -0.0027 | 0.0145 | 0.0396  | 0.0822  | 0.1912  | 0.5764  | 0.1199  |
| 11 | -0.0147 | -0.0283 | -0.0247 | -0.0186 | -0.0097 | 0.0024 | 0.0191  | 0.0433  | 0.0848  | 0.1928  | 0.2858  |

|    | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6      | 7       | 8       | 9       | 10      | 11      |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | 0.1916  | 0.3931  | 0.1672  | 0.0862  | 0.0498  | 0.0116 | -0.0078 | -0.0202 | -0.0271 | -0.0291 | -0.0142 |
| 2  | 0.0836  | 0.2346  | 0.5956  | 0.1974  | 0.0797  | 0.0330 | 0.0068  | -0.0092 | -0.0187 | -0.0235 | -0.0124 |
| 3  | 0.0431  | 0.1040  | 0.1974  | 0.5715  | 0.1809  | 0.0699 | 0.0281  | 0.0056  | -0.0076 | -0.0150 | -0.0090 |
| 4  | 0.0204  | 0.0489  | 0.0797  | 0.1815  | 0.5615  | 0.1765 | 0.0688  | 0.0297  | 0.0093  | -0.0027 | -0.0049 |
| 5  | 0.0058  | 0.0165  | 0.0330  | 0.0698  | 0.1765  | 0.5615 | 0.1765  | 0.0688  | 0.0297  | 0.0093  | 0.0012  |
| 6  | -0.0039 | -0.0043 | 0.0067  | 0.0281  | 0.0688  | 0.1782 | 0.5615  | 0.1765  | 0.0688  | 0.0297  | 0.0093  |
| 7  | -0.0101 | -0.0175 | -0.0092 | 0.0056  | 0.0297  | 0.0724 | 0.1830  | 0.5615  | 0.1765  | 0.0688  | 0.0297  |
| 8  | -0.0136 | -0.0211 | -0.0187 | -0.0075 | 0.0093  | 0.0345 | 0.0777  | 0.1882  | 0.5615  | 0.1765  | 0.0688  |
| 9  | -0.0150 | -0.0284 | -0.0235 | -0.0150 | -0.0027 | 0.0145 | 0.0397  | 0.0822  | 0.1918  | 0.5615  | 0.1765  |
| 10 | -0.0148 | -0.0284 | -0.0248 | -0.0187 | -0.0098 | 0.0024 | 0.0191  | 0.0433  | 0.0849  | 0.1934  | 0.5615  |
| 11 |         |         |         |         |         |        |         |         |         |         |         |

TABLE 1 PREXIBILITY MATRIX

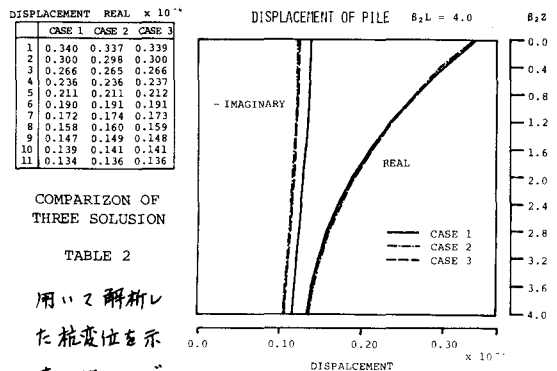


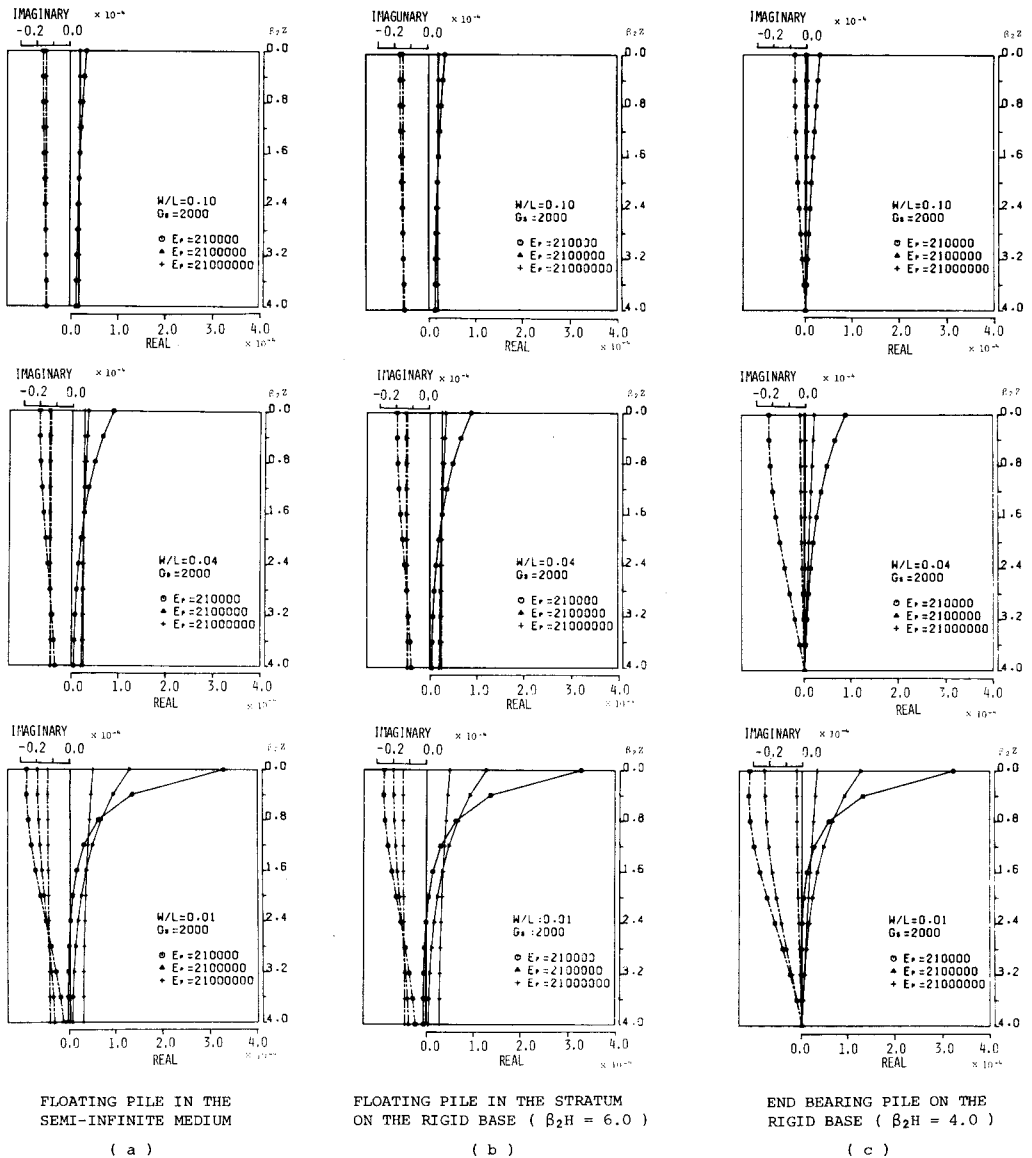
FIG. 8 DISPLACEMENT FOR THREE CASE

COMPARISON OF THREE SOLUTION  
TABLE 2  
用いて解析した杭変位を示す。但しモデルは前述の(a)と

とし  $\beta_2 H = 4.0$ ,  $W/L = 0.1$ ,  $E_p = 2.1 \times 10^8$  である。これから明らかな様に 特異点の処理の複雑さが伴わないこの近似手法の有効性が大きい事が理解できよう。

## IV 終わりに

本論では二種の地盤に対する動的 Mindlin 解を提示し それに基づいて杭の応答を求めたが 妥当な結果を得ることができ初期の目的を達成する事ができた。動的 Mindlin 解に基づいて解析された二の様な例はない。従来は静的 Mindlin 解により混合モデル等のバネ定数が求められてきたが これらの妥当性も本解を用いて動的解析を行った結果から検討できよう。また本解法を用いて 実地震波に対する応答についても解析できると考えられる。今後 水平内題についても同様な解析を進めていくつもりである。



## 参考文献

- 1 H.Tagimi "Dynamic Analysis of a Structure embedded in an Elastic Stratum" Proc.4th WCEE
- 2 T.Noyami and M.Novak "Soil-Pile Interaction in Vertical Vibration" Jr.Earthq.Dyn. v.4 No.3
- 3 H.G.Poulos "The Settlement Behavior of Single Axially Loaded Incompressible Piles and piers" Geotechnique 1968
- 4 W.R.Spillers "Lateral Response of Piles" ASCE 1964 SM6
- 5 J.Lysmer et al "Finite Dynamic Model for Infinite media" ASCE 1969 EM4
- 6 Penzien et al "Seismic Analysis of Bridges on Long Piles" ASCE 1970 EM3
- 7 田治見宏 建築構造学大系1 "地震工学" 彰国社 pp 100~103
- 8 小坂, 南井, 鈴木 "長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (402)" 京大防災研究所年報第10号A
- 9~11 松岡, 八幡 "題以省略 401~403" 建築学会論文報告集 第283号 pp.73~84 第293号 pp.35~44 第298号 pp.43~54
- 12 松岡, 八幡, 福和 "題以省略 401~402" 建築学会大会学術講演梗概集 55年9月 pp.527~530

The Study of Pile-Soil Interaction Subjected to a Vertical  
Harmonic Load based on the Generalized Dynamic Mindlin Solution

Osamu Matsuoka\* Kaeko Yahata\*\* Nobuo Fukuwa\*\*

The purpose of this paper is to investigate the soil-pile interaction subjected to a harmonic force on the pile top. In the analysis of this problem, the generalized dynamic Mindlin solutions to be called are used for two cases. The solutions which have been derived and discussed in our previous paper( 9~12 ) are shown in Fig.1~Fig.5. One is the solution that the semi-infinite elastic medium subjected to a vertical harmonic point force in its interior, and another is the similar solution in the elastic stratum overlying a rigid bedrock. Mindlin solution has been applied to so many useful studies, but it in the dynamic case has been remained unsolved. It may be said that the dynamic Mindlin solution is the same important as the static one.

To the governing equation of vertically vibrating pile, the finite difference equation is applied, and the applying stress of pile to the soil are obtained from integrated dynamic Mindlin solutions. After that the analysis of this problem is not so complex. This method in the static case for the similar problem has been presented by (3), (4). The three boundary conditions for the pile are studied, and they are following,

- (a) the floating pile in the semi-infinite medium,
- (b) the floating pile in the elastic stratum overlying a rigid bedrock,
- (c) the end-bearing pile on the rigid bedrock.

The discussions about the distinction and analogy for the behavior of the three cases are done, and it is clear that the results based in the above method are reasonable.

\* Prof. of Nagoya University

\*\* Graduate Student Of Nagoya University