

(5) 分布形の裾切りが構造信頼性に及ぼす影響

東京大学 杉山 俊幸 伊藤 学 筑波大学 藤野 陽三

1. はじめに

設計示方書において構造物の安全性を規定する際に、例えば構造物の抵抗強度やそれに作用する荷重など、本来バラツキを有する量の不確定性を考慮した確率論的な手法を用いるのが現在のところ最も望ましいと認識されてきている。

ところで、こうした確率論的な手法(信頼性理論)と設計の分野に最初に導入したのはFreudenthalであり¹⁾安全性の尺度として破壊確率の概念を用い、設計において構造物の破壊確率を許容範囲内におさめようとすることを提唱したのである。しかしながら、この方法には破壊確率の値が分布形の仮定に対し敏感であることや、その算出方法が煩雑であるなどの問題点が存在するため、現在のところ示方書への実用化には至っていない。これに対して、分布形を仮定することなく、不確定量の2次までのモーメント値(平均値・分散・共分散)を用いて安全性の尺度——安全性指標 β ——を表示する2次モーメント法がCornell²⁾によって提案され、確率論的手法を合理的な形で構造設計に適用できる方法論の一つとして現在の主流となしている。なお、Cornellの提案した2次モーメント法に基づく安全性指標に関しては、その後幾つかの不備な点——例えば、加減不変性・乗除不変性を有しないことや、分布形の裾部の情報を十分に取込みないことなど——があることが指摘されたためこれらの不備を有しないような安全性尺度の表示方法が何人かの研究者によって提案されている^{3), 4)}。さらに最近では、分布形の有する情報をより積極的に取り入れようとする方法がLind⁵⁾、Veneziano⁶⁾によって発表されている。また、設計論的な立場から分布形を取り入れた信頼性解析法——いわゆるfractile method——がPaloheimo・Hannus⁷⁾や西野・安田・長谷川⁸⁾らによって提案されている。

以上のように、確率論的な手法に基づいた設計方法が幾つか提唱されており、その実用化に向けて活発に議論や検討がなされているのが現状であるが、この種の問題を取扱っていく上で考慮すべき点はまだ幾つか残されている。その一つとして、分布形の裾切りが構造信頼性に及ぼす影響の評価が挙げられよう。これは、以下のようなことに起因して生じるものである。すなわち、分布形の裾切りを考慮するケースとして、抵抗強度に関しては

i) JISによって構造用材料の強度の最低保証値が規定されている場合

ii) 載荷試験が実施される場合

などが考えられ、荷重に関しては

i) 鉄道橋の活荷重のように車輛の軸重の上限に規制が守られているとみられる場合

ii) 物理的な荷重の上限値が存在すると考えられる場合

が想定できるが、このように不確定量の分布形が裾切りされた場合、それが構造物の信頼性に大きく影響を及ぼすのであれば、分布形(特に裾部)の考慮が一般に不可能である2次モーメント法にとって裾切りは非常に重要となってくるからである。

この分布形の裾切りに関する従来の研究には、裾切り位置を固定した場合の、分布形・変動係数の仮定に対する破壊確率の敏感度について取扱ったKonishi⁹⁾らの研究、載荷試験によって分布形が裾切りされる場合を考慮に入れた信頼性解析について論じた着者の1人らの研究がある¹⁰⁾。しかし、これらの研究はいずれも抵抗強度の分布形が裾切りされた場合のみを取扱っている。

そこで本研究においては、

ii) 構造物(あるいはその一部材)の抵抗強度に関する不確定量の1つである材料強度の分布形の裾切りが

構造信頼性に及ぼす影響

iii) 抵抗強度・荷重強度の分布形の裾切りと各種の安全性尺度との関連

に着目し、変動係数と分布形をパラメータとして数値計算を行ない、破壊確率と評価基準にして、分布形の裾切りが構造信頼性に及ぼす影響について考察を加えることにする。

なお、構造物の真の安全性とは、未知の要因や設計ミスなど確率統計的に取扱にくいものをも含めた信頼性解析の結果得られるものであり、ただ単に統計データに基づいて算出される破壊確率は構造物の真の安全性レベルを示すものではないが、その一側面を表わすものであるとの観点から、ここでは破壊確率を取扱うことにする。

* 不確定量の分布形の裾切りに関して、本研究では、裾切り位置は確定値であるとし、裾切りされた後の確率分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \begin{cases} [F(x) - F(x^*)] / (1 - F(x^*)) & : \text{Lower tail truncation} \\ F(x) / F(x^*) & : \text{Upper tail truncation} \end{cases}$$

ただし $F(x)$: 裾切り前の不確定量の確率分布関数

x^* : 裾切り位置

で表わされるとして取扱う。(Fig. 1)

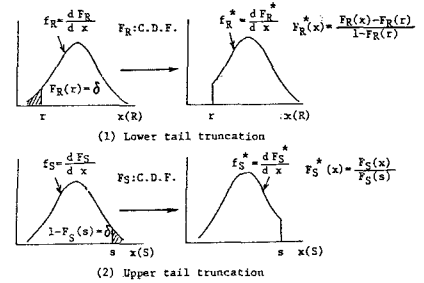


Fig. 1 Truncation of distribution function

2. 材料強度の分布形の裾切りが構造信頼性に及ぼす影響

構造物の安全性に関する不確定量は一般に、構造物の抵抗強度に関するものとそれに作用する荷重に関するものとに大別され、抵抗強度 R については3個の不確定量の積

$$R = M \cdot F \cdot P \quad \text{ただし } M: \text{材料強度} \quad F: \text{製作精度のバラツキに関する不確定要因} \\ P: \text{強度解析上の不確定要因}$$

の形で表わされるとしている場合が多い。

さて、分布形の裾切りを考慮する場合、抵抗強度については上式左辺の R の分布形が裾切りされているとして取扱うことが多い。しかし現実には上式右辺の M すなわち材料強度の分布形に関して裾切りがなされ(例えば構造用鋼材や高力ボルトに対してはJISで最低保障強度が規定されており、その値を下回るような強度の製品が使用される可能性は法規上ないことになる)、 F 、 P については裾切りされない場合が多い。そこで本節では、抵抗強度 R が上式で表わされると仮定し、 M の分布形が裾切りされ、 F 、 P の分布形については裾切りされていない場合、そして比較のために R の分布形が裾切りされた場合(i.e. F 、 P の不確定性を考慮しない場合)について数値計算を行ない、 M の分布形に対してどの程度の裾切りがなされる時にその影響を考慮に入れる必要があるのかを検討することにする。

2-1. 数値計算モデル

ここでは以下に示す仮定のもとで数値計算を行なう。

a) 材料強度 M に関して

仮定する分布形: 正規分布, 対数正規分布

変動係数: $V_M = 0.10, 0.20$

b) 製作精度のバラツキに関する不確定要因 F と強度解析上の不確定要因 P に関して

仮定する分布形: 対数正規分布

平均値: $\bar{P} = \bar{F} = 1.0$

変動係数: $V_F = V_P = 0.01, 0.05, 0.07, 0.10$

また、破壊確率 P_F を評価基準として比較検討するためには荷重 S の分布形が必要である。そこで

c) 荷重 S に関して

仮定する分布形 : 正規分布, 対数正規分布, 極値I型分布

平均値 : 抵抗強度の平均値 $\bar{R} = \bar{M} \cdot \bar{F} \cdot \bar{P} = \bar{M}$ との比が $\bar{R}/\bar{S} = 2.0$ となるように設定

変動係数 : $V_S = 0.20, 0.30$

2-2. 結果及び考察

計算の結果得られた破壊確率 P_F を裾切り位置に対して示したのが Fig. 2-1 ~ 6 である。図中において、実線で示したのが M, F, P の3個が不確定量で、 M の分布形のみが裾切りされた場合の P_F である。また、点線で示したのが、 M の分布形が裾切りされていない状態における $R = M \cdot F \cdot P$ の分布形の平均値と変動係数に等しい平均値・変動係数とをもち、かつ分布形が M と同じである R が裾切りされた場合の P_F である。

この図より以下のことがわかる。

- M の分布形のみが裾切りされる場合には、 R の分布形が裾切りされる場合に比べて裾切りの影響は小さく、 F, P の変動係数が大きくなるほどその傾向にある。通常考えられている F, P の変動係数は、 $0.05 \sim 0.12$ 程度であるが、 $V_F = V_P = 0.10$ の場合には裾切りの影響はほとんど現れない。また、 $V_F = V_P = 0.05$ の時でも、例えば後者の場合に P_F の低下が1オーダー程度であるのに対し、前者の場合は高々 $1/2$ オーダー程度である。
- F, P の不確定性を考慮することによる裾切りの影響は、 M, S の変動係数が小さいほど顕著に現れる。
- 分布形の仮定の違いによる裾切りの影響は $(V_M, V_S) = (0.1, 0.2)$ の場合を除いてその傾向の違いはほとんどみられない。すなわち、 M, S の変動係数が小さい場合に裾切りの影響は分布形の仮定に対し敏感となってくる。
- 分布形の仮定、変動係数の仮定の違いにより程度の差はあるが、 M の分布形の裾部に対して 10^{-2} 程度より大きな位置で裾切りされた場合、その影響がでてくる。

3. 安全性尺度に及ぼす分布形の裾切りの影響

確率論的な手法の設計示方書への実用化という試みに際しては、構造物の安全性を照査するために安全性尺度が導入されるが、その表示方法については前述したように Cornell とはじめとして、これまで何人かによって発表されている。(Table 1)

本節では、これら各々の安全性尺度に対して、不確定量の分布形の裾切りがどのような影響を及ぼすかと、各々の安全性尺度から換算される破壊確率を評価基準にして比較検討し、考察を加えることにする。なお、本節においては、簡単のため、構造物の安全性に関与する不確定量として、抵抗強度 R と荷重 S の2個の場合を取扱うことにする。(R に関しては前節で考えたように $R = M \cdot F \cdot P$ として取扱うべきであろうが、計算の煩雑さを避けるため、 F, P の不確定性は考慮しないことにする。)

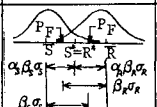
	Cornell	Rosenblueth -Esteva	Hasofer-Lind	Paloeheimo -Hannus	Lind	Veneziano
Safety Measure	$\beta = \frac{\theta - 1}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$	$\beta = \frac{\ln \theta}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$	$\beta = \frac{\theta - 1}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}$	θ	β^*	γ
Failure Criterion	$R - S$	$\ln R - \ln S$	—	$(R - S)$	—	$(D = [-\infty, \theta])$
Calculation of Probability of Failure from Safety Measure	Probability of Failure is calculated under the assumptions as follows; *Distribution Type is same as before Truncation *Mean and Coefficient of Variation are equal to the values resulted from Truncation				$P_F = \Phi(-\beta^*)$ Φ : Standard Normal Function	$P_F = \frac{1}{\gamma^2}$

Table 1 Safety Measure

3-1. 分布形の裾切りモデル

分布形の裾切りを考慮する場合については前述した通りである。そこで、不確定量として R と S の2個を考えると裾切りモデルとして

$$\textcircled{1} \begin{cases} R: \text{裾切り有} \\ S: \text{裾切り無} \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} R: \text{裾切り無} \\ S: \text{裾切り有} \end{cases} \quad \textcircled{3} \begin{cases} R: \text{裾切り有} \\ S: \text{裾切り有} \end{cases}$$

の3通りが考えられる。ここでは、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の場合について数値計算を試みることにする。

3-2. 数値計算モデル

以下に示す仮定の下で 各々の安全性尺度から換算される破壊確率 P_F を求める。

a) 分布形の仮定

R に対して 正規分布、対数正規分布

S に対して 正規分布、対数正規分布、極値I型分布

b) 分布形のパラメータ

裾切りされていない状態に対して

R の変動係数 $V_R = 0.1, 0.2$

S の変動係数 $V_S = 0.2, 0.3$

R と S の平均値の比 $\theta = \bar{R}/\bar{S} = 2.0$ ($\bar{R}$; R の平均値, $\bar{S}$; S の平均値)

(各々の安全性尺度から換算される P_F については Table 1 参照)

3-3. 結果及び考察

計算の結果得られた破壊確率 P_F と裾切り位置の関係を示したのが Fig. 3-1 ~ 2 (R の分布形が裾切りされた場合)、Fig. 4-1 ~ 2 (S の分布形が裾切りされた場合) である。

これらの図から次のことがわかる。(裾切りされた分布形から直接求められる破壊確率の値を P_F^* とする)

- 分布形の裾切りが P_F^* の値に影響を及ぼすのは、 $\delta \geq 10^{-3}$ の領域で裾切りされた場合であり、 $\delta \geq 10^{-2}$ の領域では特に顕著に影響が現われてくる (P_F^* が2オーダー程度低下する場合もある)。また、 P_F^* に及ぼす裾切りの影響は、変動係数が同じ場合、 S の裾切りの方が R の裾切りよりも大きい傾向にある。
- この P_F^* の変化を比較的精度よく追っている尺度として Lind の Mapping 法による安全性指標が挙げられその値は P_F^* と比べてわずかに大きくなっている。
- Cornell 法により、提案された安全性指標に対応する P_F の値は、裾切り位置に対してそれほど敏感ではなく、 P_F^* との差が分布形の組合せによっては1オーダーから2オーダーとなる場合もある。
- Paloheimo-Hannus の尺度は、sensitivity factor をここでは $\alpha_R = \alpha_S = 0.73$ (近似値) と仮定しているため、本来の値と多少のズレはあろうが、一般に裾切りの影響が顕著となってくる領域では、 P_F^* よりかなり小さな P_F の値を表わすことになる。
- Veneziano の尺度はその定義の通り破壊確率の上限値と対応しているようであり、 P_F^* とのオーダーの差は、大きい場合で1オーダー程度である。

以上より、分布形が裾切りされた場合の影響を精度よく表示するのは Lind の Mapping 法による安全性指標と結論できよう。この Lind の安全性指標は破壊確率と $P_F = \Phi(-\beta^*)$ ($\Phi(\cdot)$: 標準正規関数) で対応づけることができ、また、同じ平均値・変動係数の場合でも分布形の仮定の違いにより、得られる値も異なるため、現時点においては最も適切な安全性尺度といえよう。ただし、不確定量の数が多くなった場合には、その値を算出するのが他の尺度と比べて煩雑になってくるといった難点はある。

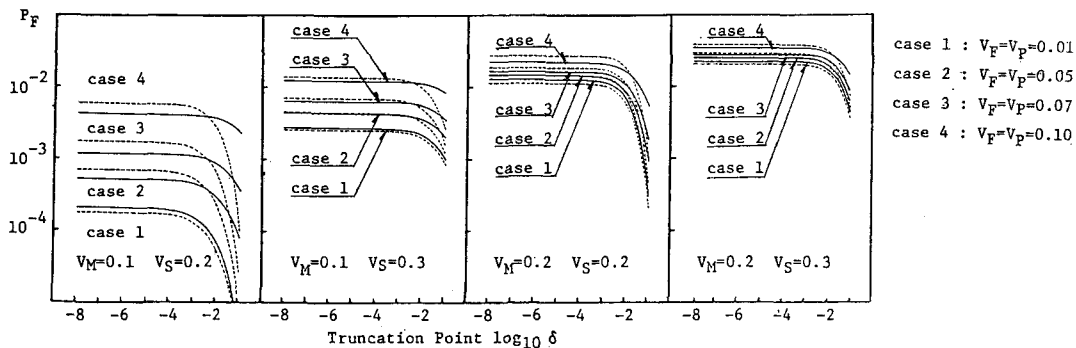


Fig. 2-1 Probability of Failure P_F vs. Truncation Point

M-Normal , S-Normal

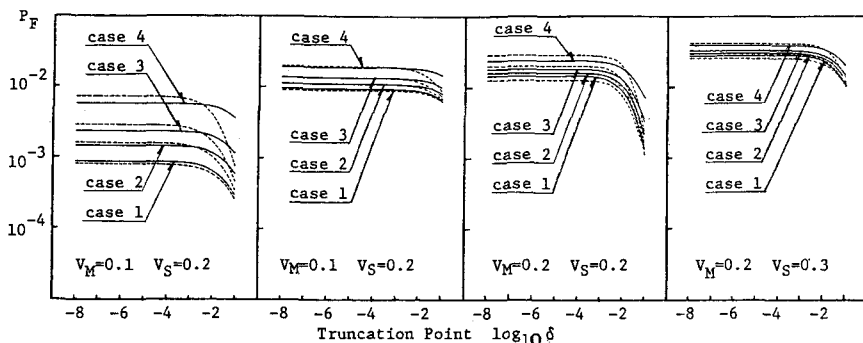


Fig. 2-2 Probability of Failure P_F vs. Truncation Point

M-Normal , S-Lognormal

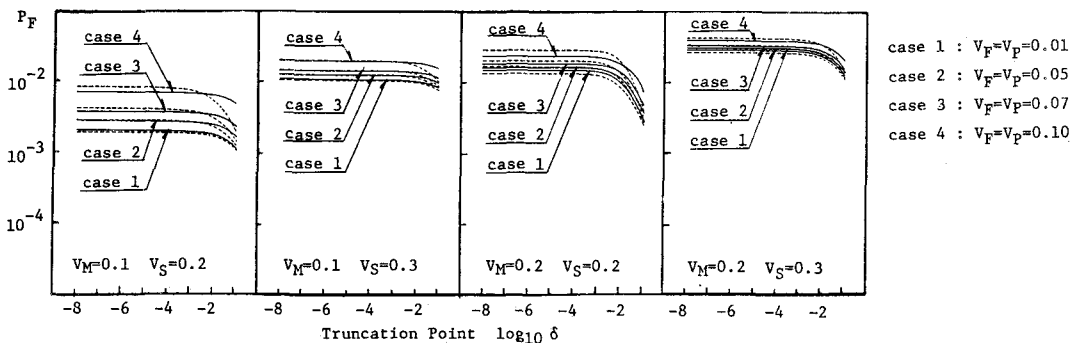


Fig. 2-3 Probability of Failure P_F vs. Truncation Point

M-Normal , S-Extreme-I

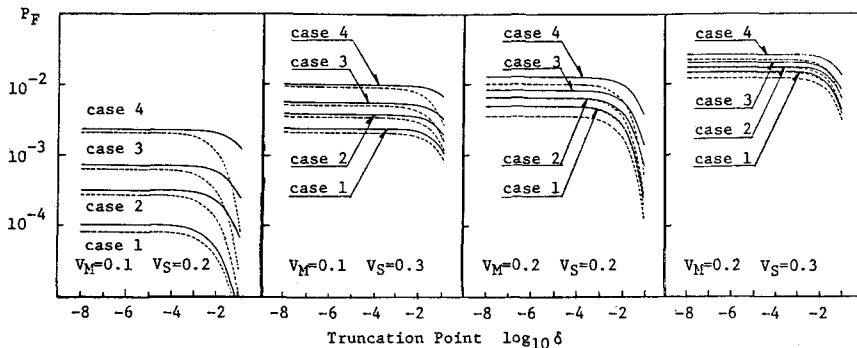
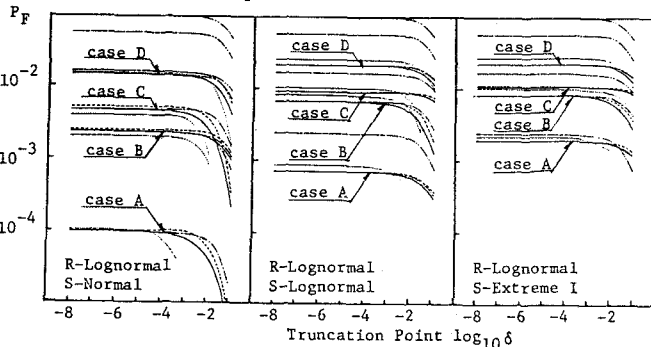
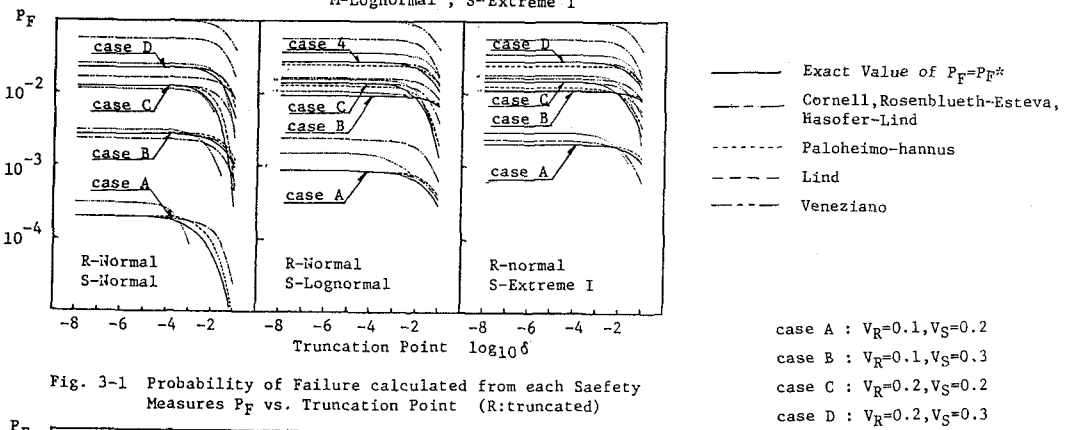
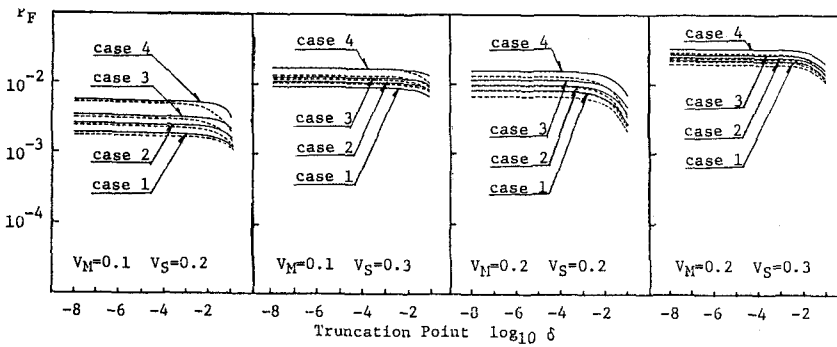
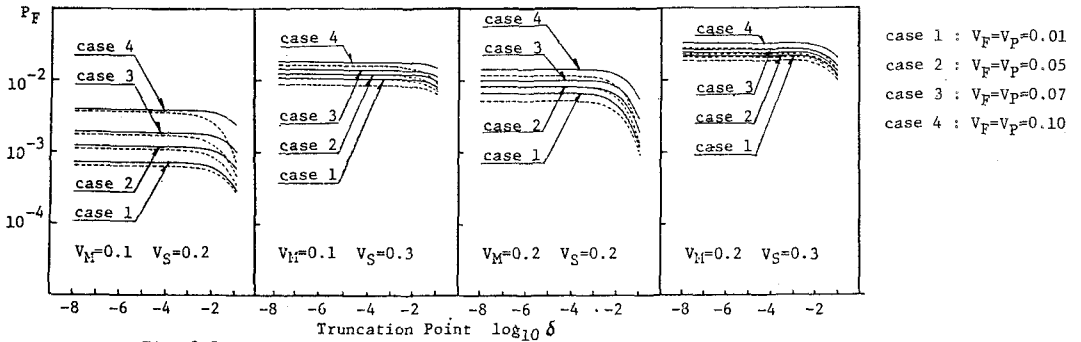


Fig. 2-4 Probability of Failure P_F vs. Truncation Point

N-Lognormal , S-Normal



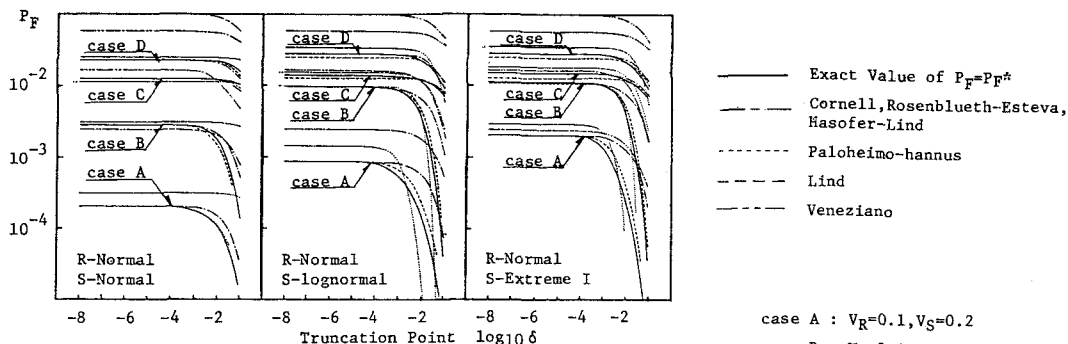


Fig. 4-1 Probability of Failure calculated from each Safety Measures P_F vs. Truncation Point (S:truncated)

case A : $V_R=0.1, V_S=0.2$

case B : $V_R=0.1, V_S=0.3$

case C : $V_R=0.2, V_S=0.2$

case D : $V_R=0.2, V_S=0.3$

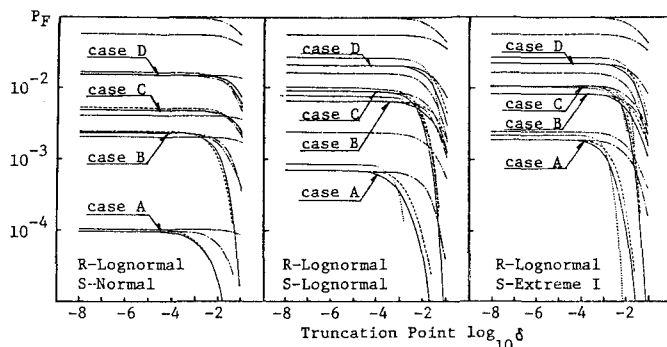


Fig. 4-2 Probability of Failure calculated from each Safety Measures P_F vs. Truncation Point (S:truncated)

4. むすび

本研究においては、構造物の安全性に関与する不確定量の分布形の裾切りがその信頼性にどのような影響を及ぼすかに着目して、材料強度の分布形が裾切りされた場合について検討し、さらに、裾切りが各々の安全性尺度に及ぼす影響を破壊確率を評価基準にして考察した。その結果をまとめると以下ようになる。

- (1) 分布形の裾切りの影響は、裾部に対して 10^{-2} より大きな位置でなされた場合に顕著となる。
- (2) 材料強度の分布形のみ裾切りは抵抗強度の裾切りに比べてその影響は小さく、破壊確率はそれほど低下しない。
- (3) 分布形の裾切りの影響は、不確定量の変動係数が小さいほど分布形の仮定に対し敏感となる。
- (4) 分布形の裾切りの影響を精度よく表示するのは Lind の Mapping 法 による安全性指標である。

今後は、さらに不確定量が多数の場合について検討していく予定である。

〔参考文献〕

- 1) Freudenthal, A.M.: Safety of Structures, Trans. ASCE, Vol. 112, 1947.
- 2) Cornell, C.A.: Structural Safety Specifications Based on Second Moment Reliability Analysis, IABSE Symp. on Concepts of Safety and Methods of Design, Final Report, London, England, 1969.
- 3) Rosenblueth, E.: Code Specification of Safety and Serviceability, Proc. of Int'l. Conf. on Planning and Design of Tall Buildings, ASCE/TABSE, 1972.
- 4) Hasofer, A.M. and Lind, N.C.: Exact and Invariant Second Moment Code Format, ASCE, Vol. 100, EM1, Feb. 1974.
- 5) Lind, N.C.: Formulation of Probabilistic Design, ASCE, Vol. 103, EM2, April 1977.
- 6) Veneziano, D.: New Index of Reliability, ASCE, Vol. 105, EM2, June 1979.
- 7) Paloheimo, E. and Hannus, M.: Structural Design Based on Weighted Fractiles, ASCE, Vol. 100, ST7, July 1974.
- 8) 西野・安田・長谷川：信頼性理論の構造設計への適用法についての一提案，第34回土木学会年次講演要集，I-310，1977年10月。
- 9) Ichiro KONISHI et al.: Structural Reliability Analysis Considering Strength Assurance Level, Reliability Approach in Structural Engineering, MARUZEN CO., LTD., Tokyo 1975.
- 10) Yozo FUJINO and Lind, N.C.: Proof-Load Factors and Reliability, ASCE, Vol. 103, ST4, April 1977.
- 11) 伊藤 啓：構造設計における安全性の規範，土木学会誌，第60巻10号，1975年9月。

Effects of truncation of the distribution function
to structural reliability

by Toshiyuki SUGIYAMA*, Manabu ITO**, Yozo FUJINO***

It is widely recognized that probabilistic method is, at present, the best approach for structural reliability analysis, and its application to design codes is discussed in some relevant committees. However there are some check points to be considered with respect to it. It is one of them to evaluate how structural reliability changes when the distribution function of random variables (e.g. loads) is truncated. Thus the purposes of this paper are

- (1) to compare structural reliability when the distribution function of R (resistance of structure) is truncated with that when the distribution of M (material strength) is truncated under the assumption that R is expressed as $R = M \cdot F \cdot P$ in which F, P = parameters that reflect the randomness of manufacture and design process respectively.
- (2) to discuss which is most sensitive to the information of the distribution of random variables (particularly at its tail) among some safety measures that have been put forward.

In this study the probability of structural failure is used as the basis of evaluation of each problems.

After some numerically parametric calculations, the following results were obtained;

1. Effects of truncation of the distribution function of random variables seem remarkable when truncated at more than 1% - fractile.
2. Effects of truncation of distribution of only M do not so much contribute to the improvement of structural reliability as that of R .
3. Effects of truncation is sensitive to distribution type of random variables under the condition that coefficients of variation of variables are small.
4. The most sensitive measure to the information of distributions is the safety index defined by Lind's "mapping method".

* Graduate Student, Fac. of Engineering, Univ. of Tokyo

** Professor, ditto

*** Lecturer, Inst. of Structural Engineering, Univ. of Tsukuba