

(4) 統計的不確定性の信頼性設計法への影響

京都大学工学部 白石 成人

京都大学工学部 〇石田 均

1. まえがき

構造物の安全性を評価するには、種々の不確定要因の影響を正確に把握することが重要である。一般に、材料強度・荷重効果等の不確定性は、観測・実験等を通じて得られたデータに統計・確率処理を施し、統計的特性値の形で評価されることが多い。しかしながら、土木構造物の設計においては、その特殊性から十分な統計データを得ることは困難であるため、数少ないデータからいかにこれらの値を推定するかが、安全性あるいは合理性を述べする上で重要なものとなる。

本研究では、フィジカル統計学を用いることにより、データ数という統計的不確定性の安全性解析および信頼性設計法への影響について検討を加える。安全性解析としては、汎用性あるいは計算の容易さから実際の設計への適用性が最もすぐれているといわれている2次モーメント法を用いる。2次モーメント法では、評価尺度として安全性指標が用いられるが、初期の安全性指標の定義には invariance の問題が存在し、それを解決するために、現在種々の定義が提案されている。本研究では、Haufer-Lind の定義¹⁾、Ditlevsen-Skov の定義²⁾および Rackwitz の定義³⁾に注目し、それぞれへの統計的不確定性の導入の仕方について考察を加え、各手法の比較検討を行う。Haufer-Lind の定義は、各確率変数が正規分布に従うという仮定に基づいているため、まず、確率変数が正規分布に従う場合の標本の平均・標準偏差と母集団の平均・標準偏差との関係式をフィジカル統計学を用いることにより導く。つぎに、Ditlevsen-Skov の定義に基づき、対数正規分布の場合の母集団と標本に関する統計的特性値間の関係を誘導し、さらに、それらの関係を用いることにより、平均・標準偏差間の関係式を近似的に求める。これら以外の確率分布に対しては、解析的に標本統計量と母集団の統計量との関係を導くことが困難であるため、モンテカルロシミュレーションにより数値的に関係式を推定する。以上の関係式を用いることにより、データ数の安全性指標への影響を検討し、最適なデータ数について検討を加える。さらに、それらが設計にどのような影響を与えうるかを、荷重係数設計法との関連から考察する。

2. 母集団の平均・標準偏差と標本の平均・標準偏差との関係

1) 確率変数 X が正規分布に従う場合

n 個の標本 X_i が得られたとき、母集団の平均 μ_x 、標準偏差 σ_x の確率密度関数は、フィジカル統計学を用いることにより、以下のように求められる。⁴⁾

$$f_{\mu_x}(\mu_x) = \frac{P\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n} P\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\sigma_x} \left\{ 1 + \frac{(\bar{X} - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} \right\}^{-\frac{n}{2}} \quad (1)$$

$$f_{\sigma_x}(\sigma_x) = \frac{n \frac{n-1}{2}}{2^{\frac{n-1}{2}} P\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\sigma_x} \left\{ \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \right\}^n \exp\left(-\frac{n\sigma_x^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (2)$$

ただし、 $\bar{X}$ は標本平均、 σ_x は標本標準偏差である。

式(1)、(2)から、 μ_x 、 σ_x の期待値 $E[\mu_x]$ 、 $E[\sigma_x]$ は

$$E[\mu_x] = \bar{X} \quad (3)$$

$$E[\sigma_x] = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{P\left(\frac{n-2}{2}\right)}{P\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma_x = \gamma_x \cdot \sigma_x \quad (4)$$

母平均は標本平均で推定できるが、標準偏差は標本から求めた値にデータ数の関数である修正係数 γ_x を乗じることにより推定しなければならない。

つぎに、この修正係数 γ_x を簡単に求めるための近似手法について考える。⁵⁾ いま、 $\theta (= n/\gamma_x^2)$ というパラメータを導入すると、 θ の対数は、

$$\log \theta = \log 2 + 2 \log \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \quad (5)$$

ここで、 $\log \{\Gamma(x+h)/\Gamma(x)\}$ は次のように展開できるので、

$$\log \frac{\Gamma(x+h)}{\Gamma(x)} = h \log x + \frac{1}{x} \frac{h(h-1)}{2} - \frac{1}{x^2} \frac{h(h-1)(h-2)}{12} + \frac{1}{x^3} \frac{h^2(h-1)^2}{12} \dots \quad (6)$$

$$\theta \text{ は } \theta = (n-1) - \frac{3}{2} + \frac{1}{8(n-2)} \quad (7)$$

となり、 θ の項目までとると、修正係数 γ_x は以下のように求まる。

$$\gamma_x = \sqrt{\frac{n}{n-2.5}} \quad (8)$$

Table I に、 γ_x の近似法の計算結果を示す。厳密には式(6)の展開式は n が小さいときすなわち n が大きいときに良い精度を与えらる。計算結果からは $n=5$ 以上で誤差が 1% 以下となり、データ数が少ない場合でも実用上十分であることがわかる。

2) 確率変数 X が対数正規分布に従う場合

X が対数正規分布に従う場合、 $u = \ln X$ という対数変換を行なうと、 u は正規分布に従う。

$$f_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \gamma_x} \exp \left\{ -\frac{(u - \lambda_x)^2}{2 \gamma_x^2} \right\} \quad (9)$$

$$\lambda_x = E[\ln X] \quad (10) \quad \gamma_x^2 = \text{Var}[\ln X] \quad (11)$$

いま、標本統計量として以下に示す $\bar{u}$, S_u^2 とおくと、

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (12), \quad S_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \bar{u})^2 \quad (13)$$

母集団の統計量 λ_x , γ_x の期待値は、式(13), (14)と同様に次式のように表わされる。

$$E[\lambda_x] = \bar{u} \quad (14), \quad E[\gamma_x] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} S_u \quad (15)$$

また、変動係数 δ_x が 0.5 以下の場合には、中央値 X_m 、

変動係数 δ_x の確率密度関数は次のように求まる。

$$f_{X_m}(X_m) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{S_x} \left\{ 1 + \frac{(\ln X_m - \bar{u})^2}{S_x^2} \right\}^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{X_m} \quad (16)$$

$$f_{\delta_x}(\delta_x) = \frac{n-1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{S_x} \left(\frac{\delta_x}{S_x} \right)^n \exp \left(-\frac{n \delta_x^2}{2 S_x^2} \right) \quad (17)$$

つぎに、 μ_x , σ_x と $\bar{X}$, S_x の関係を近似的に求めてみる。一次近似の考え方をを用いると、 $E[\mu_x]$, $E[\sigma_x]$ は $E[\lambda_x]$, $E[\gamma_x]$ を用いて以下のように表わされる。

$$E[\mu_x] = \exp(E[\lambda_x] + \frac{1}{2} \{E[\gamma_x]\}^2) \quad (18)$$

$$E[\sigma_x] = E[\mu_x] \sqrt{\exp(\{E[\gamma_x]\}^2) + 1} \quad (19)$$

Table 1 Comparison of Exact and Approximate Solutions

n	Exact.	Appr.	Error (%)
3	2.171	2.449	12.81
4	1.596	1.633	2.32
5	1.401	1.414	0.93
6	1.303	1.309	0.46
7	1.243	1.247	0.32
8	1.204	1.206	0.17
9	1.175	1.177	0.17
10	1.153	1.155	0.17
20	1.069	1.069	0.
30	1.044	1.044	0.
40	1.033	1.033	0.
50	1.026	1.026	0.
60	1.021	1.021	0.
70	1.018	1.018	0.
80	1.016	1.016	0.

Table 2 Numerical Results of γ_{μ}
(Log-normal Distribution)

n	$\delta_x=0.1$	$\delta_x=0.2$	$\delta_x=0.3$	$\delta_x=0.4$	$\delta_x=0.5$
3	1.019	1.076	1.173	1.317	1.513
4	1.008	1.031	1.069	1.122	1.188
5	1.005	1.019	1.042	1.074	1.113
6	1.003	1.014	1.031	1.053	1.081
7	1.003	1.011	1.024	1.041	1.063
8	1.002	1.009	1.020	1.034	1.051
9	1.002	1.007	1.017	1.029	1.043
10	1.002	1.007	1.014	1.025	1.038
20	1.001	1.003	1.006	1.011	1.016
30	1.000	1.002	1.004	1.007	1.010
40	1.000	1.001	1.003	1.005	1.007
50	1.000	1.001	1.002	1.004	1.006
60	1.000	1.001	1.002	1.003	1.005

式(18)より明らかたように、対数正規分布の場合には、 $E[\mu_x]$ も標本平均 $\bar{x}$ とみなすことができます。何らかの補正が必要となる。Table 2, Table 3に式(16), (17)を用いて求めた平均値に関する修正係数 γ_μ 、標準偏差に関する修正係数 γ_σ の値を示す。この場合は、 $E[\mu_x]$ もデータ数に依存するため、 γ_μ , γ_σ とも変動係数の値により変化する。しかし、 γ_μ の値は小さく $n \geq 10$ ではほとんど1とみなすことができる。これに対し、 γ_σ は一般に正規分布の場合より大きくなり、この傾向は変動係数の値が増加するにつれて顕著になる。つまり、変動係数に注目して γ_σ/γ_μ を計算しても、対数正規分布の修正係数 γ_σ/γ_μ は正規分布の場合の γ_σ/γ_μ (ただし、正規分布の場合 $\gamma_\mu = 1$)より大きくなる。

Table 3 Numerical Results of γ_σ
(Log-normal Distribution)

n	$\delta_x=0.1$	$\delta_x=0.2$	$\delta_x=0.3$	$\delta_x=0.4$	$\delta_x=0.5$
3	2.232	2.423	2.769	3.314	4.130
4	1.614	1.670	1.765	1.900	2.079
5	1.411	1.442	1.492	1.562	1.651
6	1.310	1.330	1.363	1.409	1.467
7	1.249	1.264	1.288	1.322	1.364
8	1.208	1.220	1.239	1.266	1.299
9	1.178	1.188	1.204	1.226	1.253
10	1.156	1.165	1.178	1.197	1.220
20	1.070	1.073	1.079	1.086	1.095
30	1.045	1.047	1.051	1.055	1.061
40	1.033	1.035	1.037	1.041	1.044
50	1.026	1.028	1.029	1.032	1.035
60	1.022	1.023	1.024	1.026	1.029

3) その他の確率分布の場合

正規分布・対数正規分布以外の場合には、修正係数 γ_x を解析的に求めることは困難である。例えば、ガンマ分布に対して正規分布との関係を近似的に導き、 μ_x , σ_x の確率密度を求める試みも行われているが、 $E[\mu_x]$, $E[\sigma_x]$ を求める計算が複雑となるので、ここではモンテカルロシミュレーションを用いて、数値的に修正係数を求める。Fig. 1に、オーソグナト最近値分布(EXI)に対して得られたシミュレーション結果を示す。標本 X_i から $\bar{x}$, s_x を求め、 μ_x , σ_x と比較することにより修正係数 γ_x を求めている。この計算結果からは、 X がEXIに従う場合には、 γ_x は正規分布・対数正規分布の場合より大きくなる傾向がみられる。いま、各データ数での μ_x の最大値の包絡線を2次曲線と仮定すると、以下近似式が得られる。

$$\gamma_x(n) = an^2 + bn + C \quad (20)$$

ただし、 $a = 0.0000225$, $b = -0.0144$, $C = 2.372$

3. 統計的不確定性の安全性指標への影響

1) Hasofer-Lindの定義²⁾

HasoferとLindは、標準化空間における原点と破壊閾値・最短距離という考え方をを用いることにより、安全性指標の定義の一般化を図った。確率変数 X_i の標準化変数 z_i を

$$z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (21)$$

とすると、安全性指標 β は z_i により表わされた破壊条件式

$$g(z) = g(z_1, z_2, \dots, z_m) \leq 0$$

を制約式とする最適化問題を解くことにより求められる。

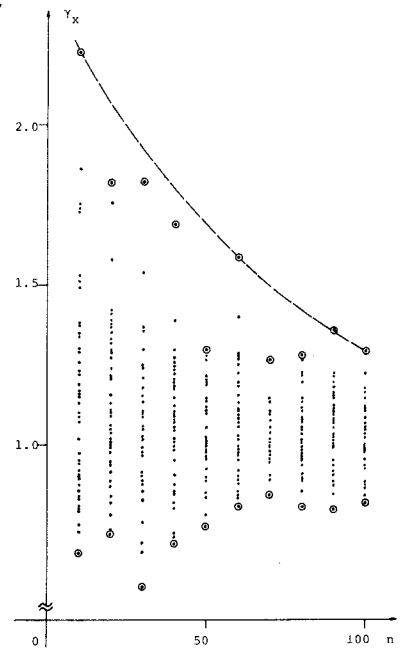


Fig. 1 γ_x for EXI Distribution

$$\begin{aligned} z &: m\text{-次元のベクトル} \\ m &: \text{確率変数の数} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{Min. } \beta = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}} \quad (23)$$

$$\text{s.t. } g(\underline{x}) = 0$$

この Haasfer-Lind の基本的な考え方は、各確率変数が正規分布に従うという仮定と等価であると考えられるから、本研究では σ_{x_i} と $E(\sigma_{x_i})$ をとり、式(4)を用いることにより標準標準偏差からその値を推定する。いま、確率変数が抵抗 R と荷重効果 S の2つで、破壊条件式が $g(R, S) = R - S$ で与えられる簡単な場合について考え、 β は以下のように表わされる。

$$\beta = \frac{E[\mu_R] - E[\mu_S]}{\sqrt{E[\sigma_R]^2 + E[\sigma_S]^2}} = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 S_R^2 + \sigma_S^2 S_S^2}} \quad (24)$$

ここで、 $\bar{R}$, $\bar{S}$ は R , S の標本平均、 σ_R , σ_S は標準偏差である。Fig 2 に $\bar{R} = 2100 \text{ kg/cm}^2$, $\bar{S} = 1400 \text{ kg/cm}^2$, $S_R = 210 \text{ kg/cm}^2$, $S_S = 280 \text{ kg/cm}^2$ と仮定したときの、 R , S のデータ数の安全性指標への影響を示す。ここでは、荷重に荷重に関するデータ数 n_S をとり、抵抗に関するデータ数 n_R をパラメータとして安全性指標の変化を調べている。

もし、 S_R , S_S が母集団の標準偏差に一致するならば、 β は2.0 とおけるが、 $n_R = 5$ であれば、 n_S は50以上とすると β は1.7程度にしか評価できない。また、 n_R が増加するにつれて β の値は小さくなるが、この場合その増加率は $n_S = 25 \sim 30$ で小さくなり、ある上限値をかつ傾向がみられる。このことから、安全性解析に必要なデータ数として、もちろん多く得られればよいに1つと1つはいいが、25~30の程度が正規分布に属する変数に対して最も効率的であると考えられる。つまり、このデータ数に関する統計的不確定性を Ang^2 の提案した補正係数 N の形で考慮するならば、この程度に評価すべきかについて考察する。 $n_R = n_S$ と仮定すると、破壊条件式は、

$$g(R, S, N) = N(R - S) \quad (25)$$

ここで $\mu_N = 1$ とすると、補正係数 N の変動係数 δ_N は Fig 3 のように示められ、データ数が25~30程度のとき、 δ_N は0.03ぐらいい見積ればよいことがわかる。

2) Ditlevsen-Skov の定義²⁾

Ditlevsen と Skov は Haasfer と Lind の提案した標準化変換に修正を加えた。つまり、荷重に関する変数 S_i は式(21)の形で標準化し、抵抗に関する変数 R_i は次式のように標準化する。

$$Y_i = \frac{\ln R_i - \lambda R_i}{\xi R_i} \quad (26)$$

このとき、安全性指標 β は R , S の2変数問題に対して以下の最適化問題を得ることにより求められる。

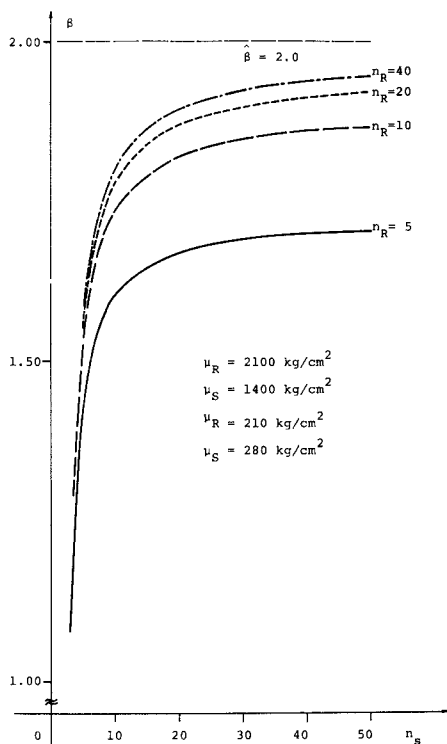


Fig. 2 Relations between Safety Index and Data Number

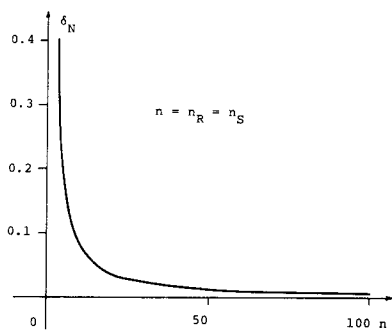


Fig. 3 Relation between δ_N and n

$$\left. \begin{aligned} \text{Min. } & \beta = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \\ \text{s.t. } & e^{\lambda R} e^{\xi x} - (\sigma_S A + \mu_S) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

このとき、式(3)、(4)、(14)、(15)を用いることにより、統計的不確定性を考慮することができる。

また、Ditlevsen, Skov は全ての確率変数を式(26)を用いて標準化し、その空間内の原点と破壊面までの最短距離として安全性指標を求めることを考えている。このとき、計算を簡単にするために以下の近似を用いている。

$$\lambda_X = \ln \mu_X \quad (28), \quad \xi_X = \delta_X \quad (29)$$

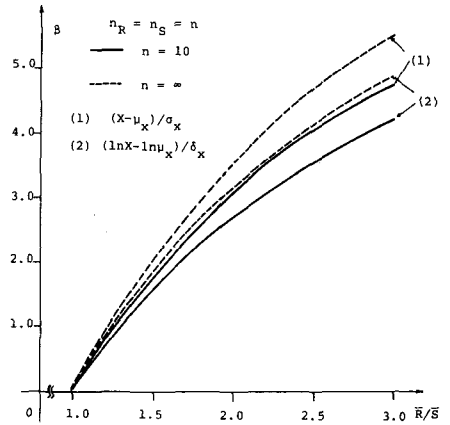


Fig. 4 Comparison of Hasofer/Lind and Ditlevsen/Skov Criteria

Fig. 4に、Hasofer-Lindの安全性指標とDitlevsen-Skovの安全性指標の比較を示す。例題として、前に示した R, S の2変数の非常に簡単なものを用いる。 R, S ともに対数正規分布に従うと仮定し、 $V_R (= \bar{R}/\sigma_R) = 0.1$ 、 $V_S (= \bar{S}/\sigma_S) = 0.2$ として、 $\bar{R}/\bar{S}$ を横軸にとり安全性指標の変化を調べている。 $n (= n_R = n_S) = 10$ のときと $n = \infty$ の場合を比較すると、いずれの場合も安全性指標の値は $n = \infty$ の方が当然大きい。その差は $\bar{R}/\bar{S}$ が大きくなるにつれて拡大していく。これは、より安全であることが要求される重要な構造物に対しては、より十分なデータを収集する必要があることを示している。また、 $n = 10$ と $n = \infty$ の場合の差はHasofer-Lindの β の方が大きい。この理由は対数正規分布の方が正規分布より、母集団の平均・標準偏差と標本の平均・標準偏差の差が大きいためである。

3) Rackwitz の定義

Rackwitz は分布形に関する情報を安全性指標に反映させるために、平均・標準偏差を変換することにより、Hasofer-Lindの方法を拡張した。修正された平均 μ'_X 、標準偏差 σ'_X は次式で計算される。

$$\mu'_X = X^* - \sigma'_X \Phi^{-1}[F_X(X^*)] \quad (30), \quad \sigma'_X = \phi[\Phi^{-1}(F_X(X^*))] / f_X(X^*) \quad (31)$$

ただし、 $F_X(X)$ は X の確率分布関数、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規確率分布関数、 $\phi(\cdot)$ は標準正規確率密度関数。また X^* は設計点を示し、標準化空間上で表わされた破壊面内の原点に最も近い点の座標から計算される。Fig. 5に R を正規分布、 S を第1種漸近最大値分布とした場合の計算結果を示す。图中、実線はRackwitzの方法による結果、破線はHasofer-Lindの方法による結果である。ここで、 $\bar{R} = 2100 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\bar{S} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_R = 210 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_S = 280 \text{ kg/cm}^2$ であり、 $n_R = \infty$ と仮定している。第1種漸近最大値分布を設計点 X^* で正規分布に含め、 μ_S, σ_S を修正することにより、 β の値はHasofer-Lindの方法に比べて小さくなる。しかし、この差は、第1種漸近最大値分布の修正係数がシミュレーションで求められたものであるもので、もう少し小さくなると思われる。両者の最も果る点、 n_S の増加に伴う β の変化の違いである。Hasofer-Lindの方法では β は25～30以上ではほとんど増加せず、Rackwitzの方法ではほぼ線形に近い増加がみられる。

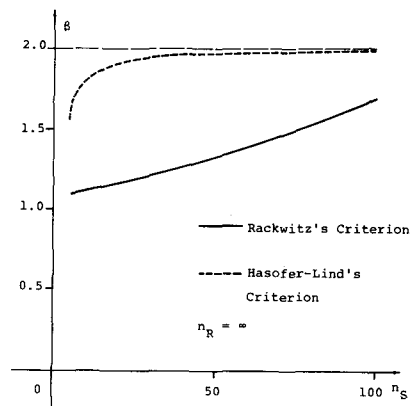


Fig. 5 Comparison of Hasofer/Lind and Rackwitz Criteria

4. 統計的不確定性の信頼性設計への影響

ここでは、荷重係数設計法に注目して、統計的不確定性の設計への影響と、抵抗の平均値および荷重係数から検討する。いま、満足すべき安全性が安全性指標の形で与えられたとすると、設計は以下の形で定式化される。

$$\beta(\bar{\mu}_R, \bar{\mu}_S, \bar{\mu}_R; \mu_R) \geq \beta_d \quad (32)$$

ここで、 β_d は社会的・経済的条件で決められる許容レベルを表す。このとき、破壊条件式として $g(R, S) = R - S$ を用い、Hasofer-Lind の安全性指標を用いると、式 (32) は、

$$\frac{\mu_R - \bar{\mu}_S}{\sqrt{\mu_R^2 \sigma_R^2 + \mu_S^2 \sigma_S^2}} \geq \beta_d \quad (33)$$

と表し、 μ_R は、

$$\mu_R \geq \bar{\mu}_S + \beta_d \sqrt{\mu_R^2 \sigma_R^2 + \mu_S^2 \sigma_S^2} = \bar{\mu}_S + \frac{\mu_R^2 \sigma_R^2 \beta_d}{\sqrt{\mu_R^2 \sigma_R^2 + \mu_S^2 \sigma_S^2}} + \frac{\mu_S^2 \sigma_S^2 \beta_d}{\sqrt{\mu_R^2 \sigma_R^2 + \mu_S^2 \sigma_S^2}} \quad (34)$$

から求められる。このとき、荷重係数設計法の設計式⁽¹⁾ (ただし特性値として平均値をとっている)

$$\phi' \mu_R \geq \gamma' \mu_S$$

ϕ' : 強度係数

γ' : 荷重係数

(35)

と対応する。このとき、 ϕ' , γ' は以下のようになる。

$$\phi' = 1 - \frac{\mu_R^2 \sigma_R^2 - \mu_S \beta_d}{\sqrt{\mu_R^2 \sigma_R^2 + \mu_S^2 \sigma_S^2}} \quad (36)$$

$$\gamma' = 1 + \frac{\mu_S^2 \sigma_S^2 - \mu_S \beta_d}{\sqrt{\mu_R^2 \sigma_R^2 + \mu_S^2 \sigma_S^2}} \quad (37)$$

ただし、 $\mu_R = \bar{\mu}_R$, $\mu_S = \bar{\mu}_S$, $\mu_R = \bar{\mu}_R / \sigma_R$, $\mu_S = \bar{\mu}_S / \sigma_S$ としている。Fig. 6 に、 β_d を 4.0 と仮定した場合の抵抗の平均値 μ_R のデータ数との関係を示す。データ数の設計値に与える影響はわりと大きく、例えば $n (= n_R = n_S)$ が 20 のとき $n = \infty$ に比べて 3.5 % の増加がみられる。Fig. 7 に、この μ_R に対応する ϕ' ($\phi' = 0.90$ とした場合の値) の変化を示す。荷重係数の場合、 n が 20 のときは 8 % 程度大きく見積ることが必要である。また、Fig. 8 には $n = 20$ の場合の分布形の組合せの μ_R への影響を示す。図中、N、LN、EXI はそれぞれ正規分布、対数正規分布、1 種漸近分布を示す。LN-EXI は抵抗が LN、荷重効果が EXI に従うことを示している。 β_d が大きくならにつれ、データ数の影響は大きくなる。もし、荷重効果が 1 種漸近分布に従う場合は、Hasofer-Lind の方法では抵抗の平均値にか

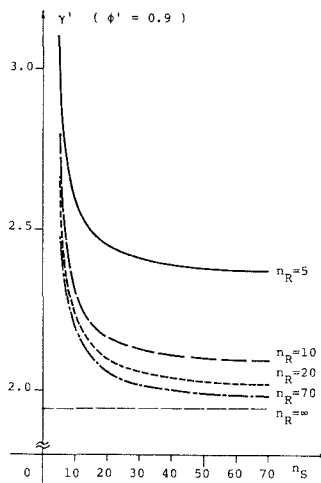


Fig. 7 Relations between Load Factor and Data Number

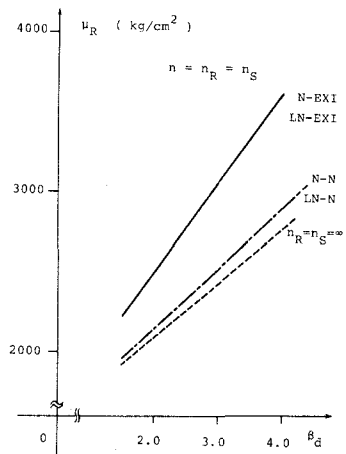


Fig. 8 Influence of Combination of Distributions on μ_R

5. 結論およびあとがき

データ数という統計的不確定性に注目し、フィジカル統計学を用い、正規分布・対数正規分布等に従う確率変数の母集団の平均・標準偏差と標本の平均・標準偏差との関係と導き、修正係数の考え方を導入することにより、データ数の影響を簡単な形で考慮することを考えた。また、これらの関係を用いることにより、統計的不確定性の安全性指標への影響を検討し、それが設計にどのような影響を与えるかを、荷重係数設計法との関連から明らかにした。数値計算等の結果、以下の結論が得られた。

1. 確率変数が正規分布に従う場合、母集団の平均・標準偏差と標本の平均・標準偏差との関係が解析的に求めることができる。母平均と標本平均は同じとみることができ、標準偏差は標本値にデータ数の関数である修正係数を乗じることにより推定する必要がある。この修正係数はガンマ関数の形で表わされるが、若干の近似を導入することにより簡単な計算式が得られる。
2. 対数正規分布の場合は、正規分布とは異なり、完全な解析式の形で平均・標準偏差間の関係式は導けないが、一次近似の考えを用いることにより近似的な関係式を得ることができる。この場合は、正規分布の場合とは異なり、母平均と標本平均は一致しないが、その違いはわずかである。また、修正係数の値は正規分布の場合より少し大きくなる。
3. 正規分布・対数正規分布以外の場合には、解析的に修正係数を誘導することは困難であるので、モンテカルロ法によりシミュレーションを行ない、数値的に関係式を導いた。オノ種漸近分布の例では、修正係数として対数正規分布より大きい値をとる必要があると思われる。
4. データ数の安全性指標への影響を調べた結果、正規分布に従う場合はデータ数が25~30ぐらいが最も効率的であると思われる。また、Angの修正係数との関係を調べると、 $n (= n_R = n_S)$ が25~30では修正係数の変動係数は0.03ぐらいになる。変数が正規分布・対数正規分布以外の分布に属する場合でも、Rackwitzの示した安全性指標の定義を用いることにより、分布形およびデータ数の影響を考慮することが可能である。
5. 統計的不確定性は設計にもかなりの影響を与える。データが十分に多い場合に比べて、データ数が20ぐらいであれば、設計値を最低3%は大きくする必要がある。
6. 本研究では、データ数という統計的不確定性の影響について、2変数の基本的な問題のみを用いて検討したが、ここで示した方法は多変数の一般的な問題に対しても適用可能である。また、実際の設計においては、データ数と同時に母集団の分類等に関するデータの質あるいは確率的に取り扱えない不確定要因の評価も重要であり、今後の研究が望まれる。

最後に、本研究に際し貴重な御助言を頂いた中部工業大学教授小西一郎先生に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) A. Hasofer and N. Lind, "An Exact and Invariant Second-Moment Code Format", Proc. ASCE, EMI, Feb. 1974
- 2) O. Ditlevsen and K. Skov, "Uncertainty Theoretical Definition of Structural Safety Suggested by the NKB Safety Committee" Danish Eng. Acad. 1976
- 3) R. Rackwitz, "Practical Probabilistic Approach To Design", CEB, No. 112, 1976
- 4) 白石・吉田・中野, "安全性指標の信頼性解析への適用に関する2, 3の考察", 土木学会論文報告集, No. 301, 1980
- 5) J. Garland and R. Tripathi, "A Simple Approximation for Unbiased Estimation of the Standard Deviation", Ann. Statistician, 1971
- 6) 吉田・白石, "統計データと安全性指標について", 第35回土木学会年次学術講演会, I-330, 1980
- 7) A. Ang and W. Tang, "Probability Concepts in Engineering Planning and Design", John Wiley & Sons, 1975
- 8) 馬場・中川・成岡, "測定値の誤差を考慮した信頼性解析", 土木学会論文報告集, No. 254, 1976
- 9) A. Ang, "Series of Lectures on Structural Reliability and Probability-Based Design", Lecture Note, 1976
- 10) 白石・吉田, "2次元モメント法に基づく荷重係数設計法", 第29回応用工学連合講演論文抄録集, 1979
- 11) 伊藤, "構造設計における安全性の規範", 土木学会誌, 第60巻8号, 1975

Influence of Statistical Uncertainty on Reliability-Based Design

Naruhito Shiraishi* and Hitoshi Furuta*

It has been widely recognized that reliability theory provides a tool for the quantitative evaluation of structural safety. Namely, uncertainties involved in structural performance can be analyzed rationally only with the aid of probabilistic and statistical approaches. Then, the influence of uncertain factors are assessed on the basis of the information which is given in the form of statistical characteristics as mean values, variances, coefficients of variation and so on. It is, however, quite difficult to obtain the population mean and the population standard deviation from the finite number of samples. Especially, the standard deviation estimated from the measured data with a small size is seldom consistent with the population standard deviation. The differences between the sample and population values may give a considerably large influence on the structural design.

The present paper aims to elucidate the effects of the statistical uncertainty concerning with the number of data on the safety analysis and the reliability-based design. Safety analysis is performed herein by use of the second moment theory, which is greatly adaptable to application in practical structural design codes, because of the simplicity, flexibility, and easiness of treatment. However, the elementary safety index method is known to suffer, a greater or smaller degree, lack of invariance under a change of formulation of the failure criteria. To overcome this serious problem of invariance and further to generalize the safety index concept to multivariate design problems, some new definitions or calculating methods of the safety index have been presented: Hasofer/Lind criterion, Ditlevsen/Skov criterion, Rackwitz criterion, etc. In this paper, the above three methods are compared and discussed, placing attention on how to introduce the statistical uncertainty.

For the normal distribution, the relation between the population and sample standard deviations is derived by use of the fiducial statistics. As is known, the population mean can be estimated by the sample mean, whereas the standard deviation should be corrected by multiplying the modification factor, which is a function of the number of data, with the sample standard deviation. A practical formula for calculating this factor can be deduced by using the expansion approximation. This result is extended to the log-normal distribution. The modification factors are calculated approximately to compare with the case of the normal distribution. For other distributions, the modification factors are determined numerically through the Monte Carlo simulation, since it is impossible to find it analytically. If the concept of modification factor is coupled with safety index methods, the influence of the statistical uncertainty can be introduced in the explicit form into the assessment of structural safety. Also, this method makes it possible to examine the effect of the number of data on the structural design, using the load factor design format. Consequently, Rackwitz criterion, which is an approximate full-distribution method, seems to be superior when including the statistical uncertainty.

* Department of Civil Engineering, Kyoto University