

(16) マトリックス・プロGRESSION法による

固定式海洋円筒シェルの不規則波応答解析

田中弥寿雄(早大理工), ○濱本卓司(早大院), 今野和近(早大院)

§1. 序

固定式海洋構造物の形式としては、石油の掘削とその備蓄との必要性から、鋼材を組合せて作るフレーム式と厚肉コンクリートによる重力式とが一般に用いられているが、本研究では海洋スペースにおいて居住・作業・貯蔵空間として機能する薄肉シェルによる容器構造を対象とする。シェルの形は、波の抵抗を減じ、高い水圧に有利であるためにすでに海中展望塔などに利用されている円筒形とする。

海洋構造物と陸上構造物との大きな違いは動的外力としての波力が常時作用している点である。したがって、波力に対する構造物の応答性状を把握することが安全性・快適性の検討上不可欠となる。海洋の波浪は一般に海面上の風により発生・発達し、その海面での波形は振幅・波長・位相の異なる成分波を重ね合せた不規則波である。波が構造物に作用すると構造物表面には波圧が生じ、その合力が波力となる。フレーム式の場合は構成部材の径が小さいため、構造物の存在による入射波の変形を無視して、水粒子の加速度に比例する質量力と水粒子の速度に関連した抗力との和として波力を評価する経験的なMorison⁽¹⁾の式が用いられる。MalhotraとPenzien⁽²⁾⁽³⁾, BurkとTighe⁽⁴⁾等はMorison式に基づいて波力を評価し、構造物と海水との相対運動を考慮に入れて応答解析を行ない、海水の粘性の影響を表わす抗力がフレーム式の重要な減衰機構となることを示した。一方、重力式の場合には、GarrisonとRao⁽⁵⁾が述べているように構造物の径が入射波の波長と比較する大きさとなるため構造物の存在による波の変形、すなわち入射波の反射・散乱の影響が著しくなり

回折理論に基づいた波力評価が必要となる。最近TaylorとDuncan⁽⁶⁾⁽⁷⁾は重力式の応答解析を行なっているが、厚肉であるため構造物を剛体と見なし構造物と海水との相互作用は考慮せずに、波力を受けた場合の構造物と海底地盤との相互作用を扱っている。

これに対し本研究で取り上げる薄肉シェルの場合は、シェル径が大きく回折理論に基づいた波力評価が必要となるとともに、肉厚が薄くなるためにシェルと海水との相互作用がその動的挙動に極めて大きな影響を与えることが予想される。シェルと流体との相互作用問題の解析手法としては、レーリー・リッツ法⁽⁸⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾や有限要素法⁽⁹⁾が広く用いられている。これらの手法では、変位仮定の際に幾何学的境界条件のみ考慮すれば良いため、シェルの変形性状及びシェルに作用する波圧分布は充分の精度で得られるもののシェル壁での応力分布も精度良く求めることが難しい。そこで4つの変位関数と4つの応力関数とを用いて、幾何学的境界条件と自然境界条件のすべてを満足する解を与えるマトリックス・プロGRESSION法を用いることによりシェル壁での応力応答までを精度良く求めることを試みた。本手法による片持円筒シェルの空中での自由振動解析はTottenhamとShimizu⁽¹⁰⁾により行なわれているが、著者らはさらにシェルと流体との相互作用の影響を考慮して水中での固有振動解析⁽¹⁵⁾へと拡張した。本論文ではまずこの固有振動解析手法を簡単に紹介した後、水中での固有振動モードにより直交化される規準座標系を用いてシェルの各モードごとの非連成運動方程式を導いた。この際、シェルと海水との相互作用はシェルの応答加速度と同位相の付加

質量項とシェルの応答速度と同位相で物理的にはシェルの振動により生じる表面波の遠散減衰効果を表わす付加減衰項とにより評価した。さらに、MacCamy と Fuchs⁽¹¹⁾ が規則波に対して導いた回折理論に基づく波力評価式を、Pierson と Moskowitz⁽¹²⁾ の波高スペクトルを導入して、より一般的な不規則波に対する波力評価式へと拡張し、周波数領域での応答解析法を示した。

最後に本手法を適用して数値計算を行ない、海洋シェルの動的挙動がその形状寸法及び設置水深に極めて敏感であることを、シェルの円周方向と軸方向の変形パターン、シェルに作用する動水圧分布、シェル壁での応力分布等を通して明らかにするとともに、このタイプの海洋構造物ではシェルの振動による表面波の遠散減衰効果が極めて重要な減衰機構となることを示した。

§2. 解析モデル

図1に示すように、一端を海底岩盤に固定し、他端を海面から頭を出した片持円筒シェルを考える。シェルに作用する波は、海面上での風により発生・発達した不規則な平面波とする。解析を進めるに当たり以下の仮定を導入する。

1. シェルは薄肉で、材料は線形弾性である。
2. 海水は非粘性・非圧縮性で、その運動は渦なしである。
3. 海底面は水平であり、海はシェルの外側に無限に広がっている。
4. 波は一方向にのみ伝播する。
5. 波高は波長に比して小さく Airy の線形波理論が適用できる。
6. 波の運動は平均値0のカウス確率分布を有する定常エルゴード過程である。
7. シェル径は入射波の波長と比較しうる大きさであり、波力評価には波の反射・散乱の影響を考慮した回折理論が適用可能である。
8. シェルの振動振幅は小さく、線形振動理論の

範囲内にある。

シェルの運動は図2に示したように中央面での軸方向、円周方向及び半径方向の変位成分 u , v , w により表わされる。各成分は軸方向モード次数 m と円周方向波数 n での変位モード $u_{mn}(z, \theta)$, $v_{mn}(z, \theta)$, $w_{mn}(z, \theta)$ の寄与を重ね合わせることにより次のように与えられる。

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}(z, \theta) \cdot g_{mn}(t) \quad (1a)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}(z, \theta) \cdot g_{mn}(t) \quad (1b)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(z, \theta) \cdot g_{mn}(t) \quad (1c)$$

ここに、 $g_{mn}(t)$ は mn 次の一般化座標である。またシェルの微小要素に作用する外力および応力・モーメントの各成分を図3のように定義する。

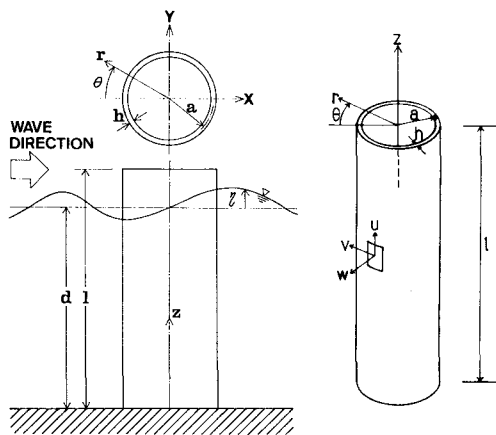


図1. 海洋シェル・モデル 図2. 変位成分

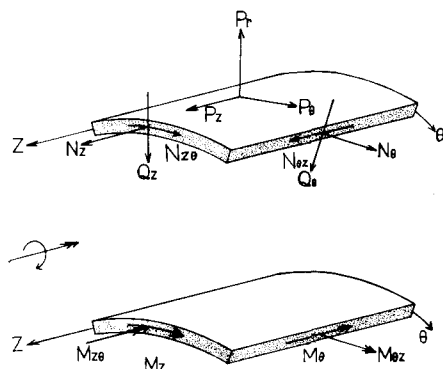


図3. 外力・応力・モーメント

§3. 動水圧分布

規則波が剛体円筒に作用した時の動水圧分布はすでに MacCamy と Fuchs により回折理論に基づいて求められている。しかし実際の海洋波は、振幅・波長・位相の異なる成分波を重ね合せた不規則波と考えられるので、本研究では海洋波の周波数特性として海面の波高スペクトルを導入し、不規則波が作用した場合の動水圧分布を求めることを考える。波高スペクトルは、これまでに実験に基づき多くの数式モデルが提案されているが、ここでは工学の分野で広く使われている Pierson と Moskowitz のパワー・スペクトルを採用する。このスペクトルは海面上での平均風速をパラメータとして定まり、次式によって与えられる。

$$S_{\eta\eta}(\sigma) = \frac{\alpha g^2}{\sigma^5} \exp[-\beta(\frac{\sigma_0}{\sigma})^4] \quad (2)$$

ここに、 $\alpha = 8.1 \times 10^{-3}$, $\beta = 0.74$, $\sigma_0 = g/V$ (g : 重力加速度, V : 海面上 19.5 m での平均風速) である。海面での不規則波形はこの波高スペクトルを用いて次式で表わされる。

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2S_{\eta\eta}(\sigma)} d\sigma \exp[i(\sigma t - kx - \epsilon)] \quad (3)$$

ここに、 k は $\sigma^2 = kg \tanh(kd)$ を満足する波数、 ϵ は 0 と 2π の間で一様分布する位相角である。

薄肉シェルを対象とする場合、構造物を剛体と見なし、動水圧分布を評価することには無理があり、シェルの弾性変形を考慮し、それによって生じるシェルと海水との相互作用の影響を解析に組み込むことが必要となる。シェルに波が作用するとシェル表面には波圧が生じ運動を始めるが、このシェルの運動により波圧分布には修正が加えられる。このように波を受けて振動しているシェルの表面に実際に作用する動水圧は、図4に示したように、まずシェルの運動を拘束して入射波の変形、すなわち波の反射・散乱の影響を考慮した波圧分布 P_R を求め、次にシェルの弾性変形により生じる造波

抵抗 P_E を導き、最後に両者を加え合わせるによって評価される。

シェルに作用する動水圧を線形ポテンシャル理論を用いて導くことを考える。シェルまわりの速度ポテンシャルを次のように3つの成分の和として表わす。

$$\phi = \phi_i + \phi_s + \phi_r \quad (4)$$

ここに、 ϕ_i は入射波の速度ポテンシャル、 ϕ_s はシェルの運動を拘束したときの反射波の速度ポテンシャル、 ϕ_r はシェルの弾性変形により生じる表面波の速度ポテンシャルを表わしている。各速度ポテンシャルは表1に示したような流体場に関する境界値問題を満足しなければならない。すなわち、各速度ポテンシャルは流体場を支配するラプラス方程式を、海面での自由表面条件、海底での固体境界条件、シェル壁でのシェルと海水の運動の連続条件、無限遠点での放射条件及び $\theta = 0$ の面に

表1. 流体場の境界値問題

	ϕ_i	ϕ_s	ϕ_r
$0 \leq z \leq d$ $r \geq a$	$\nabla^2 \phi_i = 0$	$\nabla^2 \phi_s = 0$	$\nabla^2 \phi_r = 0$
$z = 0$	$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial \phi_r}{\partial z} = 0$
$z = d$	$\frac{1}{9} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0$ $-\frac{1}{9} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \eta$	$\frac{1}{9} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_s}{\partial z} = 0$	$\frac{1}{9} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_r}{\partial z} = 0$
$r = a$	$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial r}$		$\frac{\partial \phi_r}{\partial r} = -\dot{w}$
$r = \infty$	bounded		
$\theta = 0, \pi$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} = 0$

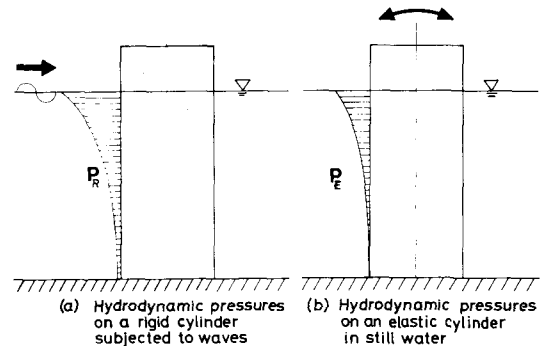


図4. シェルに作用する動水圧分布

関する対称条件のもとで解いて求められる。各速度ポテンシャルが求まれば、シェル表面に作用する動水圧成分 P_R と P_E はベルヌーイ式を用いて以下のように与えられる。

$$P_R = -\rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=a} \quad (5a)$$

$$P_E = -\rho_w \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \Big|_{r=a} \quad (5b)$$

ここに ρ_w は海水の密度である。振動数 σ の成分波の寄与を動水圧成分 P_R と P_E それぞれについて具体的に求めると

$$P_R = \rho_w g \sqrt{2S_{\theta\theta}(\sigma)} \frac{\cosh(kZ)}{\cosh(kd)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n \cdot \left[J_n(ka) - \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(ka) \right] \cos n\theta \exp i(\sigma t - t) \quad (6a)$$

$$P_E = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-m_{mn}^*(Z) \ddot{\gamma}_{mn}(t) - c_{mn}^*(Z) \dot{\gamma}_{mn}(t) \right] \cos n\theta \quad (6b)$$

となる。ここに、

$$m_{mn}^*(Z) = 4\rho_w \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(kd)} \right] \frac{\int_0^d W_{mn}(Z) \cosh(kZ) dZ}{\sinh(2kd) + 2kd} \cosh(kZ) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_n(k_j a)}{K_n(k_j d)} \frac{\int_0^d W_{mn}(Z) \cos(k_j Z) dZ}{\sin(2k_j d) + 2k_j d} \cos(k_j Z) \right\} \quad (7a)$$

$$c_{mn}^*(Z) = 4\sigma \rho_w \operatorname{Im} \left[\frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(kd)} \right] \frac{\int_0^d W_{mn}(Z) \cosh(kZ) dZ}{\sinh(2kd) + 2kd} \cosh(kZ) \quad (7b)$$

であり、 $J_n(ka)$ は第1種ベッセル関数、 $H_n^{(2)}(ka)$ は第2種ハンケル関数、 $K_n(k_j a)$ は第2種変形ベッセル関数を、 Re と Im はそれぞれ[]の実部及び虚部をとることを表わす。さらに、 $\epsilon_0=1$ 、 $\epsilon_n=2$ ($n \geq 1$)、 $' = \partial/\partial(kr)$ 、 $\dot{} = \partial/\partial t$ であり、 k_j は超越方程式 $\sigma^2 = -k_j^2 g \tan(k_j d)$ の根である。なお、不規則波を受けて運動しているシェルの表面に作用する動水圧成分 P_R と P_E は、(6a,b)式で示された成分波による寄与を全周波数領域で積分することにより与えられる。

§4. 固有振動解析

Flüggeの approximate theory⁽⁶⁾における

釣合式と応力・変位関係から、変位成分 u, v, w 、母線の回転角 ψ 、母線方向曲げモーメント M_z 、面外等価せん断力 V_z 、面内等価せん断力 $S_{\theta z}$ 、母線方向軸応力 N_z についての z に関する1階連立微分方程式が以下のように導かれる。

$$\bar{N}_z = D(a \frac{\partial u}{\partial z} + \nu w' + \nu w'') \quad (8a)$$

$$\bar{S}_{\theta z} = \frac{1-\nu}{2} D(a \frac{\partial v}{\partial z} + u') - K(1-\nu) \frac{\psi'}{a} \quad (8b)$$

$$\psi = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8c)$$

$$\bar{M}_z = K(a \frac{\partial \psi}{\partial z} + \nu \frac{w''}{a}) \quad (8d)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_z}{\partial z} + \frac{2K(1-\nu)}{a} \psi'' - \bar{V}_z = 0 \quad (8e)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} + \frac{K(1-\nu^2)}{a^3} w'''' + \frac{\nu}{a^2} \bar{M}_z'' + \frac{D(1-\nu^2)}{a} (w' + w'') \quad (8f)$$

$$+ \frac{\nu}{a} \bar{N}_z - a p_r = 0 \quad (8f)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_{\theta z}}{\partial z} + \frac{D(1-\nu^2)}{a} (w'' + w''') + \frac{\nu}{a} \bar{N}_z' - \frac{K(1-\nu^2)}{a^3} w'''' \quad (8g)$$

$$- \frac{\nu}{a^2} \bar{M}_z' + a p_\theta = 0 \quad (8g)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \bar{S}_{\theta z}' + \frac{K(1-\nu)}{a^2} \psi'' + a p_z = 0 \quad (8h)$$

ここに、

$$V_z = Q_z + \frac{M_{\theta z}'}{a}, \quad S_{\theta z} = N_{\theta z} - \frac{M_{\theta z}}{a} \quad (9a,b)$$

であり、 $D = Eh/(1-\nu^2)$ 、 $K = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 $\bar{()} = a()$ 、 $()' = \partial()/\partial\theta$ 、 E はシェル材料のヤング係数、 ν はポアソン比を示している。

水中での自由振動時にシェルに作用する動水圧 P_E は(6b)式によって与えられる。円筒シェルの場合、この動水圧は半径方向成分しかないから、(8f,g,h)式における外力 P_z, P_θ, P_r はシェル自体の慣性力と海水とシェルとの相互作用による付加慣

性力の和として次のように与えられる。

$$P_z = -\rho_s h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10a)$$

$$P_\theta = -\rho_s h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (10b)$$

$$P_r = -\rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_E \quad (10c)$$

ここに、 ρ_s はシェルの密度である。シェルが円周方向波数 n で振動する場合の変位関数 $f_i(z) \sim f_n(z)$ と応力関数 $f_s(z) \sim f_n(z)$ を以下のように仮定する。

$$u = f_1(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (11a)$$

$$v = f_2(z) \sin n\theta \exp(i\omega t) \quad (11b)$$

$$w = f_3(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (11c)$$

$$\psi = f_4(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (11d)$$

$$\bar{M}_z = a f_5(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (11e)$$

$$\bar{V}_z = a f_6(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (11f)$$

$$\bar{S}_{\theta z} = a f_7(z) \sin n\theta \exp(i\omega t) \quad (11g)$$

$$\bar{N}_z = a f_8(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (11h)$$

ここに、 ω はシェルの固有円振動数である。(11a~h) 式を (6b), (10a~c), (8a~h) 式に代入して整理すると次のようなマトリックス式が得られる。

$$\frac{d}{dz} \{F(z)\} = [A] \{F(z)\} + \{P(z)\} \quad (12)$$

ここに、

$$\{F(z)\}^T = \{f_1(z), f_2(z), \dots, f_8(z)\} \quad (13)$$

であり、 $[A]$ は z に独立な 8×8 の係数マトリックス、 $\{P(z)\}$ は 8×1 の動水圧ベクトルである。

シェル表面での付加質量分布は、その点に作用している動水圧をその点でのシェルの応答加速度で除すことにより評価される。したがって、付加質量マトリックス $[M(z)]$ を

$$\{P(z)\} = [M(z)] \{F(z)\} \quad (14)$$

と定義すれば、(12) 式は次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dz} \{F(z)\} = ([A] + [M(z)]) \{F(z)\} \quad (15)$$

(15) 式の解は次式で与えられる。

$$\{F(z)\} = [G(z)] \{F(0)\} \quad (16)$$

ここに、

$$[G(z)] = \exp[A_1] = [I] + [A_1] + \frac{[A_1]^2}{2!} + \dots \quad (17)$$

$$[A_1] = \int_0^z ([A] + [M(z)]) dz \quad (18)$$

であり、 $[I]$ は 8×8 の単位マトリックスを示す。

ここで、図5のように円筒シェルを軸方向に等間隔 Δz で $(N-1)$ 分割すると、隣接する任意の2点 i と $i+1$ の間には次のような伝達関係式が成立する。

$$\{F(z_{i+1})\} = [G(z_{i+1})] [G(z_i)]^{-1} \{F(z_i)\} \quad (19)$$

点 i と $i+1$ の間の要素に作用する付加質量を両端での平均値をとることにより要素内では一定であると仮定すると、(19) 式は

$$\{F(z_{i+1})\} = [G_i] \{F(z_i)\} \quad (20)$$

$$[G_i] = \exp\{([A] + [M_i]) \cdot \Delta z\} \quad (21)$$

となる。ここに、 $[M_i]$ は各要素ごとに z に独立な 8×8 の付加質量マトリックスである。

次に i 点でのベクトル $\{F(z_i)\}$ を変位ベクトル $\{U_i\}$ と応力ベクトル $\{X_i\}$ とに分割する。即ち

$$\begin{aligned} \{F(z_i)\}^T &= \{U_i \mid X_i\} \\ &= \{f_1, f_2, f_3, f_4 \mid f_5, f_6, f_7, f_8\} \end{aligned} \quad (22)$$

とおき、これに対応して (21) 式のマトリックス

$[G_i]$ を4つの部分マトリックスに分割する。

$$[G_i] = \begin{bmatrix} [G_{di}] & [G_{ai}] \\ [G_{ci}] & [G_{bi}] \end{bmatrix} \quad (23)$$

さらに、 i 点における剛性マトリックス $[K_i]$ を次のように定義する。

$$\{X_i\} = [K_i] \{U_i\} \quad (24)$$

片持円筒シェルの境界条件は

$$\{U_1\} = 0 \quad (25a)$$

$$\{X_N\} = 0 \quad (25b)$$

と表わせる。したがって、(20), (24), (25a) 式より

$$[K_2] = [G_{b1}] [G_{a1}]^{-1} \quad (26)$$

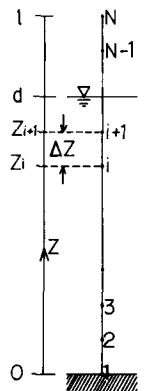


図5

さらに、任意点 i における剛性マトリックスは

$$[K_i] = \begin{bmatrix} [GC_{i-1}] + [Gb_{i-1}][K_{i-1}] \\ [Gd_{i-1}] + [Ga_{i-1}][K_{i-1}] \end{bmatrix}^{-1} \quad (27)$$

となり、この漸化式により固定端から自由端に向けて次々と剛性マトリックスが求まる。最後の自由端では(25b)式の境界条件により

$$\{X_N\} = [K_N]\{U_N\} = 0 \quad (28)$$

となり、 $\{U_N\} \neq 0$ であることを考慮すれば(28)式が成り立つための必要十分条件として

$$\det [K_N] = 0 \quad (29)$$

が得られる。これが水中でのシェルの振動数方程式である。ところで(6b)式の動水圧は未知の変位関数 $w(z)$ の積分を含むため、シェルの軸方向に分布する付加質量を求める際に、まずシェルの半径方向変位成分のモード形を仮定しておき、上述のプロセスをモード形が充分収束するまで反復する必要がある。充分収束した段階で、水中でのシェルの固有振動数と変位モードに加え、シェル壁での応力分布モードを求める。

§5. 波浪応答解析

空中での固有振動モードにより直交化された規準座標系を用いた場合、半径方向に外圧 $P(z, \theta, t)$ を受ける円筒シェルの m 次非連成運動方程式は次式で与えられる。⁽¹⁷⁾

$$M_{mn} \ddot{\xi}_{mn}(t) + C_{mn} \dot{\xi}_{mn}(t) + K_{mn} \xi_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \quad (30)$$

ここに、シェルの一般化質量 M_{mn} 、一般化減衰 C_{mn} 、一般化剛性 K_{mn} 及び一般化力 $Q_{mn}(t)$ はそれぞれ次のように与えられる。

$$M_{mn} = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^L [\dot{u}_{mn}^2 + \dot{v}_{mn}^2 + \dot{w}_{mn}^2] a d\theta dz \quad (31a)$$

$$C_{mn} = 2 \xi_{mn} \omega_{mn} M_{mn} \quad (31b)$$

$$K_{mn} = \omega_{mn}^2 M_{mn} \quad (31c)$$

$$Q_{mn}(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^L P(z, \theta, t) \dot{w}_{mn}(z, \theta) a d\theta dz \quad (31d)$$

ここに、 ω_{mn} は m 次シェルの固有円振動数、 ξ_{mn} は空中におけるシェルの減衰定数である。

ここで(6a, b)式の P_R と P_E の和を外圧と考えて(31d)、(30)式に代入することにより、不規則波の

ある成分波がシェルに作用した場合の運動方程式を導く。水中でのシェルの固有振動モードにより直交化された規準座標系を用いると(30)式は次のように書き換えられる。

$$(M_{mn} + M_{mn}^*) \ddot{\xi}_{mn}(t) + (C_{mn} + C_{mn}^*) \dot{\xi}_{mn}(t) + K_{mn} \xi_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \quad (32)$$

上式でシェルと海水との相互作用は、シェルの応答加速度と同位相の付加質量項 M_{mn}^* とシェルの応答速度と同位相の付加減衰項 C_{mn}^* とにより評価されている。前者は水中でのシェルの固有周期を増大させ、後者はシェルの振動により生じる表面波の逸散減衰機構を示しており、それぞれ(7a, b)式より次のように与えられる。

$$M_{mn}^* = \pi a \int_0^L m_{mn}^*(z) \dot{w}_{mn}(z) dz \quad (33a)$$

$$C_{mn}^* = \pi a \int_0^L c_{mn}^*(z) \dot{w}_{mn}(z) dz \quad (33b)$$

また、一般化剛性 K_{mn} と一般化力 $Q_{mn}(t)$ は次のように書き換えられる。

$$K_{mn} = \bar{\omega}_{mn}^2 (M_{mn} + M_{mn}^*) \quad (33c)$$

$$Q_{mn}(t) = \int_0^L \int_0^{2\pi} P_R(z, \theta, t) \dot{w}_{mn}(z, \theta) a d\theta dz \quad (33d)$$

ここに、 $\bar{\omega}_{mn}$ は m 次シェルの水中での固有円振動数である。(32)式の両辺を $(M_{mn} + M_{mn}^*)$ で割ると、シェルの水中での m 次非連成運動方程式は最終的に次式で与えられる。

$$\ddot{\xi}_{mn}(t) + 2\bar{\omega}_{mn}(\xi_{mn} + \xi_{mn}^*) \dot{\xi}_{mn}(t) + \bar{\omega}_{mn}^2 \xi_{mn}(t) = Q_{mn}^*(t) / (M_{mn} + M_{mn}^*) \quad (34)$$

ここに、 ξ_{mn}^* は水中におけるシェルの見かけの減衰定数であり、空中での減衰定数 ξ_{mn} と次式で関係付けられる。

$$\xi_{mn}^* = \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\omega_{mn}} \xi_{mn} \quad (35)$$

また、 $\bar{\omega}_{mn}^*$ は逸散減衰を示す付加減衰定数である。以上で、不規則波中のある成分波を受けた時のシェルの m 次非連成運動方程式を導いた。したがって、より一般的に不規則波を受けた時の m 次モードの全応答量への寄与は、これら成分波による応答量を全周波数領域で積分することにより求

まる。

次に(34)式で与えられた運動方程式を用いて、周波数領域での応答解析法を示す。応答量としてシェルの半径方向変位成分 w を考えた場合、そのパワー・スペクトルは次式で与えられる。

$$S_{ww}(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} w_{mn}(z) \cos n\theta \cdot w_{rs}(z) \cos s\theta \cdot H_{mn}(-i\sigma) H_{rs}(i\sigma) \cdot m n S_{rs}(\sigma) \quad (36)$$

ここに、

$$H_{mn}(-i\sigma) = \frac{1}{\bar{\omega}_{mn}^2 (M_{mn}^* + M_{mn}^*) [1 - 2i(\xi_{mn}^* + \xi_{mn}^*) \frac{\sigma}{\bar{\omega}_{mn}} - (\frac{\sigma}{\bar{\omega}_{mn}})^2]} \quad (37a)$$

$$H_{rs}(i\sigma) = \frac{1}{\bar{\omega}_{rs}^2 (M_{rs}^* + M_{rs}^*) [1 + 2i(\xi_{rs}^* + \xi_{rs}^*) \frac{\sigma}{\bar{\omega}_{rs}} - (\frac{\sigma}{\bar{\omega}_{rs}})^2]} \quad (37b)$$

であり、 $m n S_{rs}(\sigma)$ は一般化力 $Q_{mn}^*(t)$ と $Q_{rs}^*(t)$ の相互スペクトルである。減衰が小さい場合、 $m n$ 次と $r s$ 次の異なるモード間の連成の影響は無視しうる⁽¹⁸⁾から(36)式は次のようになる。

$$S_{ww}(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |H_{mn}(\sigma)|^2 \cdot m n S_{mn}(\sigma) w_{mn}^2(z) \cos^2 n\theta \quad (38)$$

ここに、 $|H_{mn}(\sigma)|^2$ は $m n$ 次の周波数応答関数であり次式で与えられる。

$$|H_{mn}(\sigma)|^2 = \frac{1}{(M_{mn}^* + M_{mn}^*)^2 (\bar{\omega}_{mn}^2 - \sigma^2)^2 + 4(\xi_{mn}^* + \xi_{mn}^*)^2 \bar{\omega}_{mn}^2 \sigma^2} \quad (39)$$

また、 $m n S_{mn}(\sigma)$ は一般化力 $Q_{mn}^*(t)$ のパワー・スペクトルであるがこれを以下に導く。不規則波を受けた場合の一般化力 $Q_{mn}^*(t)$ は、(6a)、(33d)式から次式で与えられる。

$$Q_{mn}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi a \rho_w g \sqrt{2 S_{\theta\theta}(\sigma) d\sigma} \frac{\int_0^d w_{mn}(z) \cosh(kz) dz}{\cosh(kd)} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\{ka J_{n-1}(ka) - n J_n(ka)\}^2 + \{ka Y_{n-1}(ka) - n Y_n(ka)\}^2}} \cdot \cos(\sigma t - \epsilon - \epsilon') \quad n=1, 2, \dots \quad (40)$$

ここに、 $Y_n(ka)$ は第2種ベッセル関数であり

$$\epsilon' = \tan^{-1} \frac{ka J_{n-1}(ka) - n J_n(ka)}{ka Y_{n-1}(ka) - n Y_n(ka)} \quad (41)$$

である。(40)式を導く際に次の恒等式を用いた。

$$J_n(ka) \cdot H_n^{(2)}(ka) - J_n'(ka) \cdot H_n(ka) = -\frac{2i}{\pi ka} \quad (42)$$

一般化力 $Q_{mn}(t)$ の自己相関関数は

$$m n R_{mn}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi a \rho_w g)^2 \frac{\{\int_0^d w_{mn}(z) \cosh(kz) dz\}^2}{\cosh^2(kd)} \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\{ka J_{n-1}(ka) - n J_n(ka)\}^2 + \{ka Y_{n-1}(ka) - n Y_n(ka)\}^2} \cdot S_{\theta\theta}(\sigma) \cdot \cos \sigma \tau d\sigma \quad (43)$$

となり、これに対応するパワー・スペクトルは、

Wiener-Kintchin関係式を利用して、

$$m n S_{mn}(\sigma) = (\pi a \rho_w g)^2 \frac{\{\int_0^d w_{mn}(z) \cosh(kz) dz\}^2}{\cosh^2(kd)} \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\{ka J_{n-1}(ka) - n J_n(ka)\}^2 + \{ka Y_{n-1}(ka) - n Y_n(ka)\}^2} \cdot S_{\theta\theta}(\sigma) \quad (44)$$

となる。すなわち、応答のパワー・スペクトルは波高スペクトル $S_{\theta\theta}(\sigma)$ の関数として与えられる。

(39)、(44)式を(38)式に代入し全周波数領域で積分すると、変位 w の自乗平均値が次のように求められる。

$$\bar{w}^2(z, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ww}(\sigma) d\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}^2(z) \cos^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (45)$$

ここに、

$$\bar{\varrho}_{mn}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{mn}(\sigma)|^2 \cdot m n S_{mn}(\sigma) d\sigma \quad (46)$$

である。他の変位成分と応力およびモーメント成分も同様にして次のように与えられる。

$$\bar{u}^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}^2(z) \cdot \cos^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47a)$$

$$\bar{v}^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^2(z) \cdot \sin^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47b)$$

$$\bar{N}_x^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} N_{xmn}^2(z) \cdot \cos^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47c)$$

$$\bar{N}_\theta^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta mn}^2(z) \cdot \cos^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47d)$$

$$\bar{N}_{x\theta}^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} N_{x\theta mn}^2(z) \cdot \sin^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47e)$$

$$\bar{M}_x^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M_{xmn}^2(z) \cdot \cos^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47f)$$

$$\bar{M}_\theta^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M_{\theta mn}^2(z) \cdot \cos^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47g)$$

$$\bar{M}_{x\theta}^2(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} M_{x\theta mn}^2(z) \cdot \sin^2 n\theta \cdot \bar{\varrho}_{mn}^2 \quad (47h)$$

§6. 数値結果

解析モデルとして、以下の形状寸法を有する短形と長形の2タイプの円筒シェルを考える。

タイプⅠ（短形）； $a = 40\text{ m}$, $l = 80\text{ m}$

タイプⅡ（長形）； $a = 20\text{ m}$, $l = 160\text{ m}$

さらに各タイプについて2種類のシェル厚比 a/h $= 100, 200$ を考える。シェル材料は鋼とし、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 8.00 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^4$, 空中での減衰定数 δ_{mn} は各モードとも 0.02 とおく。またシェルを取りまく海水の密度 ρ_w は $1.02 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^4$ とする。

設置水深によるシェルの固有振動数の変化を両タイプの $a/h = 100$ について図6に示す。横軸にはシェル長に対する設置水深の比、縦軸にはシェルの空中での固有振動数 f_a に対する水中での固有振動数 f_w の比をとり、モード $n=3$, $m=1 \sim 3$ の場合について調べる。一般に軸方向モード次数が $m=1$ の場合は半没するくらいまで空中での固有振動数とあまり変わらず、それ以上の水深となると急激な減少を示すのに対して、 $m=2, 3$ の場合にはわずかの水深でも固有振動数への影響が大きくなる。またシェルが完全に没した場合、各モードとも空中での約 $1/2$ の固有振動数の値に収束してくる傾向が見られる。次にシェル厚が水中での固有振動数に与える影響を調べるために、モード $n=2$, $m=1, 2$ の時の水深による固有振動数の変化を、両タイプの $a/h = 100, 200$ それぞれについて図7に示す。空中 ($d/l = 0.0$) ではシェル厚の変化は固有振動数の値にほとんど影響を与えないが、水深の増加にともない薄いシェルほど固有振動数の低下が激しくなることがわかる。これはシェル自体の慣性力は小さくなるが、それ以上にシェルの剛性低下によりシェル壁の変形が増大し、シェルと海水との相互作用による付加慣性力が大幅に増大するためと考えられる。

設置水深の変化に伴ないシェルの固有モード形

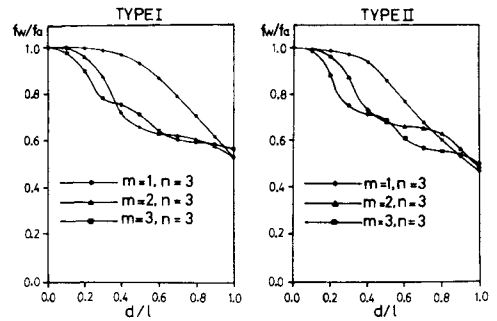


図6. 設置水深による固有振動数の変化

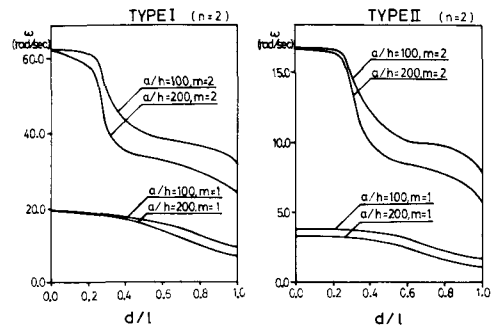


図7. シェル厚変化による振動数への影響

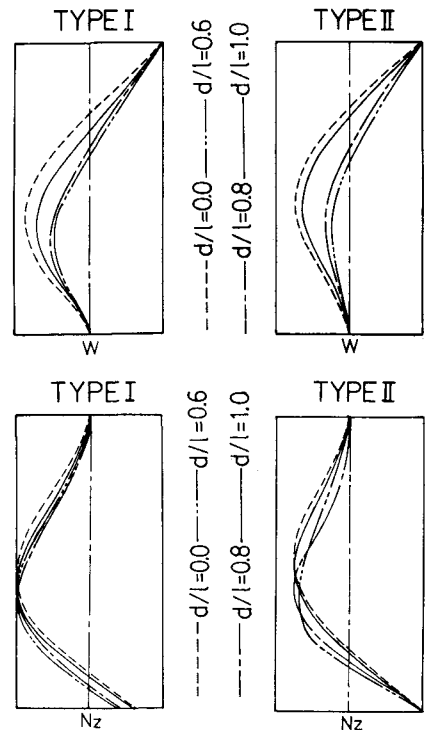


図8. 設置水深による固有モード形の変化

もまた変化する。図8には、設置水深による半径方向変位 w のモード形の変化および母線方向軸応力 N_x のモード形の変化を両タイプ $n=3$, $m=2$ について示した。変位モードでは、両タイプとも空中でのモード形からの水中でのモード形のずれは、完全に没した状態よりも部分的に没している場合の方が大きくなっている。また応力モードでは、タイプⅠが中央部付近で最大振幅を有するのに対しタイプⅡが固定端で最大振幅を示すように、シェルが短形が長形かにより大きな差が現れている。

このような設置水深による振動特性の変化を考慮して不規則波浪に対する応答解析を行なう。海面上での風速をパラメータとして定まる波高スペクトルとともにタイプⅡの主要なモードの固有円振動数を図9に示す。以下の応答解析では、シェルの設置水深は $d/\ell=0.8$ 、風速は $V=15\text{ m/sec}$ に固定する。

不規則波を受けて運動しているシェルの表面に作用する動水圧分布を図10に示す。シェルの運動を拘束した時に波浪によって生じる動水圧成分 P_R 、シェルの弾性変形による動水圧成分 P_E 、およびその線形和としての全動水圧 P_T の軸方向分布をそれぞれRMS値で評価した。両タイプとも P_R が支配的になっているが、タイプⅡの $a/\ell=200$ では、シェル厚が薄くなり固有振動数が波のスペクトルの主要領域に近づいたため、選択共振によりシェルの弾性変形に伴う動水圧成分が増加している。

変位 w の円周方向分布をRMS値で評価することにより、シェルの円周方向変形パターンを両タイプの $a/\ell=100$ について図11に示す。タイプⅡでは楕円モード($n=2$)が支配的になっているがタイプⅠではそれ以上の円周方向波数の影響が大きく現れている。同様に、変位成分 u , v , w のRMS応答値の軸方向分布を両タイプの $a/\ell=100$ について図12に示す。両タイプとも軸方向変形パ

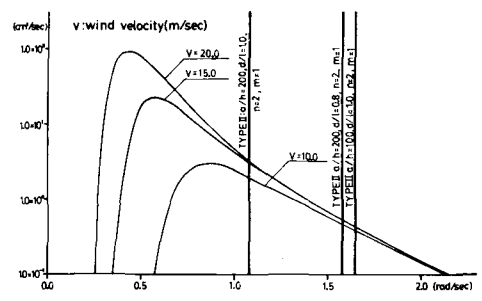


図9. 波高スペクトルとシェルの固有振動数

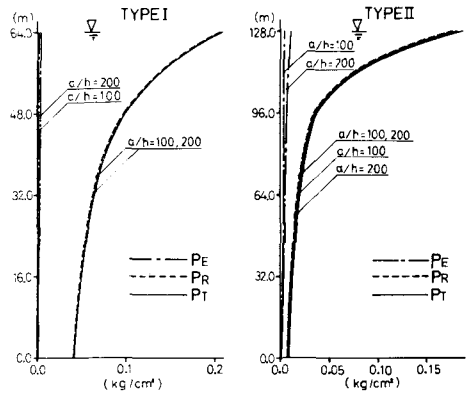


図10. シェルに作用する動水圧分布

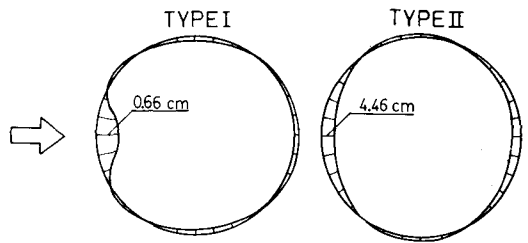


図11. 変位成分 w の円周方向分布

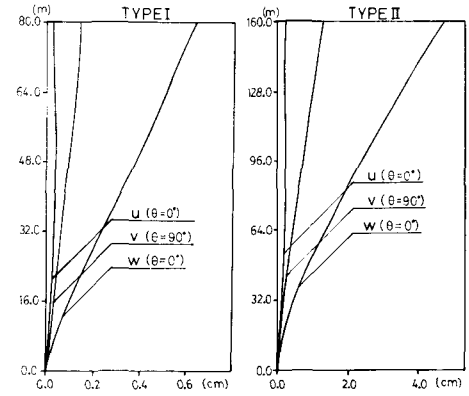


図12. 各変位成分の軸方向RMS応答値

ターンは軸方向モード次数 $m=1$ の主モードが支配的になっている。

シェル壁での応力 N_z , N_θ , $N_{z\theta}$ およびモーメント M_z , M_θ , $M_{z\theta}$ の RMS 応答値の軸方向分布を図13に示す。面内力では N_z が卓越しており、短形では N_θ の値も大きい。モーメントは両タイプとも M_θ が支配的であり自由端に近づくに従い大きくなるが、固定端付近では M_z が急激に増加し M_θ の値を上まわるようになる。

シェルの振動による表面波の逸散減衰効果を示すために、図14に水中での見かけのシェルの減衰定数と逸散減衰定数との周波数領域における変化を示した。タイプⅡの $a/h=200$ では逸散減衰の影響がシェル自体の減衰を大きく上まわり重要な減衰機構となっている。応答量に与える影響を半径方向変位 w について図15に示す。タイプⅠでは $a/h=100, 200$ とともに逸散減衰の影響は無視できるが、タイプⅡの $a/h=200$ においては応答量を15%も減少させている。

§7. 結論

本研究の範囲において、海洋シェル構造物の動的特性は以下のごとく要約される。

1. 海洋シェルは海水に接する面積が広いうえに軽量であるため、シェル自体の慣性力に比べシェルと海水との相互作用により生じる付加慣性力の影響が大きくなり、空中とはかなり異なる動的挙動を示す。したがって、モーダル・アナリシスにより応答計算を進めるに先立ち、設置水深による固有振動数および固有モード形の変化を充分検討しておく必要がある。
2. 海洋シェルの固有振動数は、シェルの形状寸法およびその設置水深にきわめて敏感である。特にシェル厚が薄くなると固有振動数の減少は著しく、海中に完全に没した状態では空中での固有振動数の半分以下になる。したがって、空中でのシェルの振動数よりはるかに低い海の波

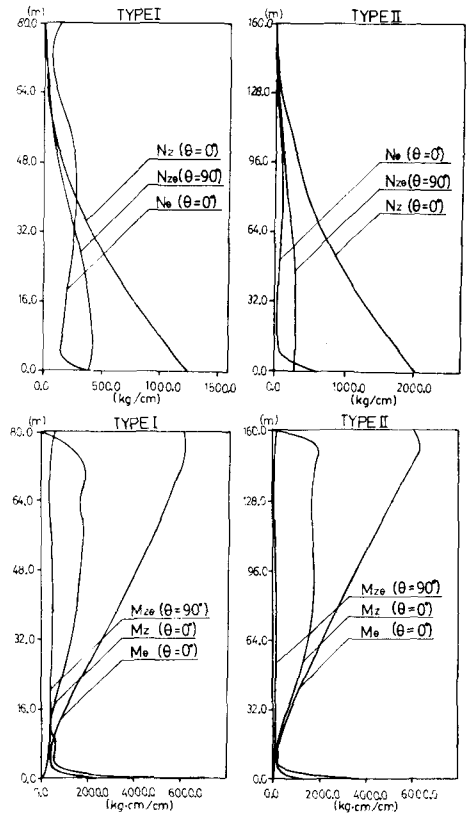


図13. シェル壁での軸方向応力分布

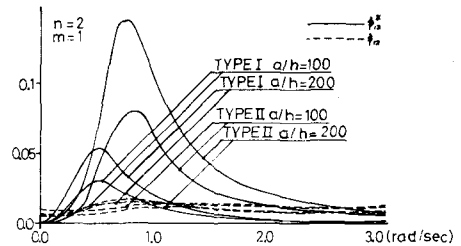


図14. 逸散化減衰の振動数による変化

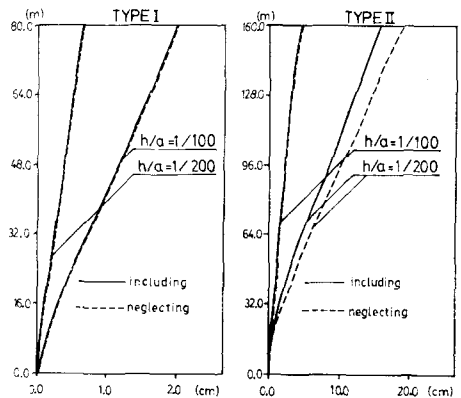


図15. 逸散化減衰の応答量への影響

- の主要周波数領域においても選択共振を起こす可能性が充分考えられ、居住・作業・貯蔵空間の安全性・快適性の検討上、シェルの弾性変形を考慮した動的解析が不可欠なものとなる。
3. 設置水深により固有モード形も大きく変化する。変位モードではシェルが長形であるか短形であるかに関わらず、空中でのモード形のずれは部分的に役している場合に大きく、完全に役してしまうと空中のモード形に近づく傾向が見られる。一方、応力モードでは設置水深によるモード形の変化よりもシェルが長形か短形かによるモード形の変化の方がより重要となる。
 4. 海の波を受けて振動しているシェルの表面に作用する動水圧を調べてみると、一般にシェルの運動を拘束した時に海の波によって生じる動水圧成分が支配的であるが、海中でのシェルの固有振動数が波のスペクトルの主要領域に近づくに従いシェルの弾性変形により生じる動水圧成分の影響が大きくなっていく。
 5. 海の波を受けて運動するシェルの変形パターンは、軸方向には長形か短形かに関わらず $m=1$ の主モードで振動するが、円周方向には長形では楕円モードを中心とする比較的低次の円周方向波数で、一方短形ではそれ以上の高次の円周方向波数で応答する。実際の解析上必要なモードの重ね合せとしては、全応答量への各モードの寄与率から判断して、長形・短形とも軸方向モードとしては $m=1$ だけで充分であり、円周方向波数としては長形の場合 $n=3$ まで、短形の場合は $n=8$ まで必要であった。
 6. シェル壁での応力分布は、面内力としては一般に軸方向力が他の応力成分に比べて大きい。短形では円周方向応力も大きくなる。また、固定端付近では軸方向曲げモーメントが卓越しているものの一般には円周方向曲げモーメントが支配的であり自由端に近づくほど大きくなる。
 7. シェルの振動に伴って生じる表面波の遠散化減衰は、シェルの運動振幅が大きくなるにつれて増加し構造物自体の減衰を上まわるようになる。したがって、海洋シェルの波浪応答解析においては、表面波による遠散減衰が重要な減衰機構となることを認識すべきである。
 8. 海洋シェルの設計上必要となるシェル壁での応力応答は、マトリックス・プロGREッション法の導入により精度良く求めることができる。
 9. 海水との相互作用により、海中でのシェルの変形はシェル厚と比較しうるオーダーとなり、将来は幾何学的非線形を考慮した動的解析を進める必要がある。

参 考 文 献

- (1) Morison et al., 1950, *Petroleum Transaction AIME*, Vol. 189
- (2) Malhotra & Penzien, 1970, *Proc. of ASCE*, Vol. 96, EM6, p. 985-1003
- (3) Malhotra & Penzien, 1970, *Proc. of ASCE*, Vol. 96, ST10, p. 2155-2173
- (4) Burk & Tighe, 1971, *OTC Paper* 1403.
- (5) Garrison & Rao, 1971, *Proc. of ASCE*, Vol. 97, WW2, p. 259-278
- (6) Taylor & Duncan, 1978, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 6, p. 331-346
- (7) Taylor & Duncan, 1978, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 6, p. 455-472
- (8) Weingarten et al., 1971, *Proc. of IASS*, Honolulu, p. 591-601
- (9) Liaw & Chopra, 1975, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 3, p. 233-248
- (10) Tottenham & Shimizu, 1972, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 14, p. 293-310
- (11) MacCamy & Fuchs, 1954, *Tech. Memo. 69, U.S. Army Corps of EBEB*
- (12) Pierson & Moskowitz, 1964, *J. Geophysical Res.*, Vol. 69, p. 5181-5190
- (13) 濱本・小西・田中, 1978, 第5回日本地震工学シンポジウム, p. 1041-1048
- (14) 田中・濱本・石川・白石, 1979, *Proc. of 20th IASS*, Vol. 1, 2.1-2.15
- (15) 濱本・小西・清水・田中, 1979, 第13回マトリクス解析法シンポジウム, p. 417-422
- (16) Flugge, W., *Stresses in Shells*, 2nd ed., Springer Verlag.
- (17) Kraus, H., *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons.
- (18) Clough, R.W. & Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McG-Hill.

DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF OFFSHORE CYLINDRICAL SHELL
STRUCTURES SUBJECTED TO RANDOM OCEAN WAVES

Y.TANAKA*, T.HAMAMOTO**, and K.KONNO**

The dynamic response analysis of fixed offshore structures of cantilever circular cylindrical shell-type subjected to wind-induced random ocean waves is studied by matrix progression method, taking into account the dynamic interaction between water motion and elastic deformation of shell walls. The matrix progression method is classified as one of the differential equation methods, which can satisfy both geometric and natural boundary conditions, so that an accurate estimate of internal force distribution as well as displacements that arises during modal vibration in water can be expected.

The incident random waves are simulated from Pierson-Moskowitz wave height spectrum through the superposition of a number of simple harmonic waves of different wave heights, periods and phases. The hydrodynamic pressures on a vibrating shell subjected to waves are computed by taking the sum of the pressure components of incident waves, diffracted waves assuming restrained structure and radiation waves generated by the motion of a shell by the linear potential flow theory. The effects of interaction between a shell and water can be estimated as the added mass in phase with the acceleration of a shell and the radiation damping in phase with the velocity of a shell in the uncoupled modal equations of motion of a shell submerged in water. The response quantities such as displacements, resultant forces and moments are obtained in the frequency domain.

In order to show the application of the theory and the procedure, some numerical calculations are carried out and the effects of shell configuration and water depth on the dynamic behaviours and of hydrodynamic radiation damping on the response quantities are discussed.

* Professor, Dept. of Architecture, Waseda University.

** Graduate student of Waseda University.