

(13) 折れ線近似による曲線橋の解析

日本鋼管株式会社 ○ 鈴木 敏夫
建設省東北地方建設局 上野 進一郎
東京大学工学部 西野 文雄

1. はじめに

曲率が軸線によって変化する一般的曲線橋やアーチ橋を解析する場合、曲線部材に対する支配方程式を解くに際して、有限要素法に代表されるような数学的近似を行なって曲線部材の数値解を直接求める方法と、物理的に曲線部材と直線部材の集合に置き換えたうえ、このモデルについて解く方法とが考えられる。有限要素法による解が厳密解に収束することは自明の事実と云える。これに対し実用設計では古くから後者が用いられているものの、その収束性を論じた報告は比較的少なく、曲線材として最も簡単な平面内で曲げと軸力を受ける円弧アーチ部材についての研究報告¹⁾がある程度である。この報告では形状を完全に考慮した有限要素モデルと折れ線モデルとのエネルギー・ノルムを評価し、収束性を論じている。

ここでは曲線橋、およびアーチの両者を考え、2軸曲げ、ねじり、および軸力を受ける円弧部材を折れ線近似すると、折れ線の数を無限に増やしたとき、その解が円弧はりの解に収束することを、より直接的な剛性方程式の微分方程式への収束²⁾を用いて示す。直線材の剛性マトリックスとして、いわゆるはり理論の剛性マトリックスを用いると折れ線近似の剛性方程式が曲線材の微分方程式に収束するものの意味の明らかなない拘束条件が現われる。この困難をさけるため曲げモーメントや曲げねじりモーメントの変化にともなうせん断変形、いわゆる二次せん断変形を考慮した直線はりの剛性マトリックスを用い、同じ変形を考慮した曲線材の微分方程式への収束を示す。

同じ手法で面内曲げを受ける円弧アーチの収束を調べた研究があるが³⁾、収束しないとの結論が述べられている。またせん断変形を考慮しない剛性マトリックスが用いられているが、すでに述べた拘束条件が存在するものと思われるにもかかわらず、これについて報告されていない。

円弧曲線はりの支配微分方程式について多くの報告があるが、二次せん断変形を考慮した式はみあたらない。剛性方程式の収束結果との比較のため、文献4)、5)の手法を用い、まず支配微分方程式を導く。ついで剛性方程式の同式への収束を示したうえ、簡単な例題について円弧要素を用いた曲線材の有限要素解と折れ線近似モデル解との数値計算を行ない、その結果を比較する。

2. 支配微分方程式

St. Venant のねじりによるせん断変形の他に、二次せん断変形と呼ばれる曲げおよび曲げねじりモーメントの変化にともなうせん断変形を考慮すると2軸曲げ、ねじり、軸力を受ける薄肉断面部材のひずみ状態に対する仮定は次のように表わされる。

$$\epsilon_{nn} = 0 \quad \epsilon_{ss} = 0 \quad \gamma_{ns} = 0$$

$$r_{no} = l \frac{1}{r} r_u(\theta) + m \frac{1}{r} r_v(\theta) - h_s \frac{1}{r} r_\varphi(\theta)$$

$$r_{so}^* = \left(\frac{r_s^*}{r^*} \right)^2 \frac{q_s^*}{G_t} - m^* \frac{1}{r^*} r_u(\theta) + l^* \frac{1}{r^*} r_v(\theta) + h_n^* \frac{1}{r^*} r_\varphi(\theta)$$

----- (1. a ~ e)

座標および記号の一部を Fig. 1 に示す。l,

m は x, y 軸と S 軸との間の方向余弦, r_u ,

r_v , r_φ はそれぞれ x, y 方向のせん断力,

曲げぬじれにともなうせん断力による変形に

関する量である。e, f は伸びおよびせん断

ひずみ成分, * は板厚中心に関する量を示す

記号である。 $r_s^2 q_s^* / G_t$ はせん断ぬじれに關す

る積分定数であり, h_n, h_s は S 点から任意

点 (x, y) にいたる位置ベクトルの法線方向, 接線方向成分である。式 (1) を満たす変位ベクトルの x,

y, θ 方向成分 u, v, w は次のように求まる。

$$u = u_s - (y - y_c) \varphi \quad v = v_s + (x - x_c) \varphi$$

$$w = w_c - (x - x_c) \left\{ \frac{u_s' - r_u}{r_c} + \frac{y_s - y_c}{r_s} \frac{v_s' - r_v}{r_c} - \frac{w_c'}{r_c} \right\} \\ - (y - y_c) \left\{ \frac{u_s' - r_u}{r_s} - w_s \left(\frac{\varphi' - r_\varphi}{r_s} - \frac{v_s' - r_v}{r_s^2} \right) \right\}$$

----- (2. a ~ c)

ここに u_s, v_s, w_c は積分定数であり, せん断点での変位ベクトルの成分を表す。w はそれに関する

量でありせん断変形を無視した円弧はりと同じ⁴⁾になる。(') は θ に関する微分を表す。式 (2)

を式 (1) に代入し, 積分定数 $r_s^2 q_s^* / G_t$ を閉区間については端部でせん断応力が零, 开区間については

w の連続性を用いて決めると, ひずみ分布は次のように表される。

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{r_s}{r} \left\{ \left(\frac{w_c'}{r_s} + \frac{v_s}{r_s} + \frac{y_s - y_c}{r_s} \varphi \right) \right. \\ \left. - (x - x_c) \frac{r_s}{r_c} \left(\frac{u_s'' - r_u'}{r_s^2} + \frac{y_s - y_c}{r_s} \frac{v_s'' - r_v'}{r_s^2} - \frac{w_c''}{r_s^2} \right) \right. \\ \left. - (y - y_c) \left(\frac{u_s'' - r_u'}{r_s} + \frac{\varphi}{r_s} \right) - w \left(\frac{\varphi' - r_\varphi}{r_s^2} - \frac{v_s'' - r_v'}{r_s^2} \right) \right\}$$

----- (3. a ~ f)

$$r_{so} = \frac{r_s}{r} \textcircled{4} \left(\frac{\varphi' - r_\varphi}{r_s} - \frac{v_s' - r_v}{r_s^2} \right) - \frac{m}{r} r_u + \frac{l}{r} r_v + \frac{h_n}{r} r_\varphi$$

$$r_{no} = \frac{l}{r} r_u + \frac{m}{r} r_v - \frac{h_s}{r} r_\varphi$$

$$\epsilon_{ss} = \epsilon_{nn} = r_{sn} = 0$$

④ は St. Venant のぬじりに関する量であり, せん断変形を無視した円弧はりと同じ⁴⁾になる。

式 (2), (3) を 3 次元問題に対する最も一般的な仮定式に代入し, 必要の演算を行なって整理する

と, つり合い式および必要な境界条件が求まる。さらに応力ひずみ関係として

$$\sigma_{00} = E \epsilon_{00}, \quad \tau_{0x} = G \gamma_{0x}, \quad \tau_{0y} = G \gamma_{0y} \text{ ----- (4. a ~ c)}$$

を仮定し用いると断面力と変位の関係が求まる。

式の形を簡単にするため、任意に選べる C, S 点をそれぞれ曲げに対する中立点およびせん断中心に選び、さらにこれらの点が一致する断面を考える。折れ線近似モデルの収束性を調べるためには分布荷重項は必要ないので分布荷重の作用しない場合を考え、つり合い式、断面力-変位関係から断面力を消去するとせん断変形を考えた円弧部材に対する変位表示の支配方程式は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} EA \left(w'' + \frac{1}{R} v' \right) + \frac{1}{R} EI_x \theta_x'' &= 0, \quad EA \left(w' + \frac{1}{R} v \right) - REI_x \theta_x''' = 0 \\ EI_w \lambda_\varphi''' - GJ_{ST} \lambda_\varphi' - GJ_{S1} \left(\varphi'' + \frac{1}{R} \theta_y' - \lambda_\varphi' \right) + EI_y \left(r \theta_y''' - \varphi'' \right) &= 0 \\ EI_w \lambda_\varphi''' - GJ_{ST} \lambda_\varphi' - GJ_{S1} \left(\varphi'' + \frac{1}{R} \theta_y' - \lambda_\varphi' \right) - EI_y \left(\frac{1}{R} \theta_y' - \frac{1}{R^2} \varphi \right) &= 0 \\ GA \left(\theta_x + v' - \frac{1}{R} w \right) - EI_x \theta_x'' &= 0, \quad GA \left(u'' - \theta_y' \right) = 0 \\ GI_{\rho 0} \left(\varphi' + \frac{1}{R} \theta_y - \lambda_\varphi \right) + EI_w \lambda_\varphi'' - GJ_{ST} \lambda_\varphi - GJ_{S1} \left(\varphi' + \frac{1}{R} \theta_y - 2\lambda_\varphi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ----- (5. a ~ g)}$$

ここに

$$\theta_x = - \left(v' - r_0 - \frac{1}{R} w \right), \quad \theta_y = u' - r_u, \quad \lambda_\varphi = \varphi' - r_\varphi + \frac{1}{R} \left(u' - r_u \right) \text{ ----- (6. a ~ c)}$$

A, I, J 等はそれぞれ曲線部材について定義された断面量⁴⁾である。

3. 折れ線近似モデルの曲がりばりの支配方程式への収束

曲がりばり、アーチ、ばねのような曲線構造は、直線要素を連ねた折れ線構造で近似される事が多い。ここでは、円弧曲線ばりを連続する直線要素の集合として近似し、直線要素の剛性マトリックスを用いて節点におけるつり合い式を導く。節点間距離を短くして行き、要素数を無限大にした時に、折れ線で表わした部材の剛性マトリックスを用いて求めた節点での変位表示のつり合い式が解析的に求めた式(5)に収束する事を示す。

円弧ばりの軸線として、曲げモーメントに対する断面内の中立点⁴⁾を通る線を選び、変位、節点力等の未知関数をこの軸線上で定義する。Fig. 1 に示すように軸線を O 軸に選ぶ。断面の重心とせん断中心が一致する直線部材要素の剛性マトリックスは、面内挙動と面外挙動とで互いに独立しているの、演算の複雑さを避けるため、別々に取扱う。

(1) 面内挙動

Fig. 2 に示す単一部材の、せん断変形を考慮した剛性マトリックスは次の様になる。

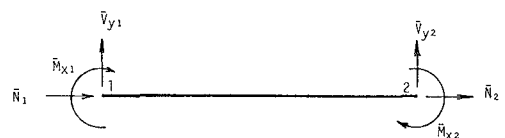


Fig. 2 Straight Beam Element for In-plane Problem

$$\bar{K} = \frac{EI_x}{(1+12\phi)l^3} \begin{bmatrix} \frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} & 0 & 0 & -\frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} & 0 & 0 \\ 12 & -6l & 0 & -12 & -6l & 0 \\ 0 & (4+12\phi)l^2 & 0 & 6l & (2-12\phi)l^2 & 0 \\ \text{Sym.} & & \frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (4+12\phi)l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- (7)}$$

ここに

$$\phi = \frac{EI_x}{GA l^2} \quad \text{--- (8)}$$

隣接要素に対し節点力および節点変位の連続を固めるため、Fig. 3 に示すように座標変換を施す。 ψ は円弧部材のねじり角、 n は分割数を表す。節点力および節点変位成分に対する剛性方程式は

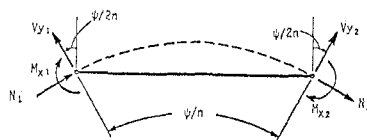


Fig. 3 Coordinate Transformation for In-plane Problem

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad \text{--- (9)}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^T & \phi \\ 0 & \pi \end{bmatrix} [\bar{K}] \begin{bmatrix} \pi & \phi \\ 0 & \pi^T \end{bmatrix} \quad \text{--- (10)}$$

ここに、 F_1, F_2 は Fig. 2 の要素の左端および右端に作用する変換後の座標系についての節点力ベクトルである。 U_1, U_2 は同様の節点変位ベクトルであり、その成分は次のように表わされる。

$$F_i^T = [N_i \quad Vy_i \quad Mx_i], \quad i = 1, 2, \quad U_i^T = [w_i \quad v_i \quad \theta_{xi}], \quad i = 1, 2 \quad \text{--- (11-a, b)}$$

また、 π は座標変換マトリックスであり、

$$\pi = \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (12)}$$

ここに、 $C = \cos(\psi/2n)$, $S = \sin(\psi/2n)$ 。式(10)のマトリックスの成分を求めると

$$K_{11} = \frac{EI_x}{(1+12\phi)l^3} \begin{bmatrix} \frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} C^2 + 12S^2 & -\frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} C \cdot S + 12C \cdot S & -6lS \\ -\frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} C \cdot S + 12C \cdot S & \frac{A(1+12\phi)l^2}{I_x} S^2 + 12C^2 & -6lC \\ -6lS & -6lC & (4+12\phi)l^2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{12} = [K]_{21}^T = \frac{EI_x}{(1+12\phi)\ell^3} \begin{bmatrix} -\frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C^2 + 12S^2 & -\frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S - 12C \cdot S & -6\ell S \\ \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S + 12C \cdot S & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} S^2 - 12C^2 & -6\ell C \\ -6\ell S & 6\ell C & (2-12\phi)\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{22} = \frac{EI_x}{(1+12\phi)\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C^2 + 12S^2 & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S - 12C \cdot S & -6\ell S \\ \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S - 12C \cdot S & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} S^2 + 12C^2 & 6\ell C \\ -6\ell S & 6\ell C & (4+12\phi)\ell^2 \end{bmatrix}$$

----- (13. a ~ c)

外力が作用しない点, O ($z=0$) から, $R\phi/n$ 離れた点, A ($z=-R\phi/n$), B ($z=R\phi/n$) とし, Fig. 4 に示す長さ $\ell = 2R \sin(\phi/2n)$ の 2 つの隣接要素に対し, O 点に作用する節点力ベクトルの 3 成分と変位の成分との関係を求める。 R は中立点の曲率半径である。節点, O でのつり合い式は要素 AO , OB の剛性方程式を用いて次のように表わされる。

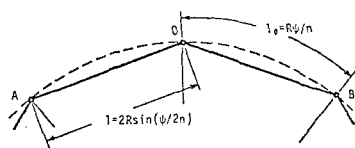


Fig. 4 Neighboring Elements

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_s] \begin{Bmatrix} U(-R\phi/n) \\ U(0) \\ U(R\phi/n) \end{Bmatrix} \quad \text{----- (14)}$$

ここに, $[K_s]$ は 3×9 マトリックスであり, その内容が式 (15) に示す。

$$[K_s] = \frac{EI_x}{(1+12\phi)\ell^3} \begin{bmatrix} -\frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C^2 + 12S^2 & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S + 12C \cdot S & -6\ell S & \frac{2A(1+12\phi)\ell^3}{I_x} C^2 + 24S^2 \\ -\frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S - 12C \cdot S & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} S^2 - 12C^2 & 6\ell C & 0 \\ -6\ell S & -6\ell C & (2-12\phi)\ell^2 & -12\ell S \\ 0 & -12\ell S & -\frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C^2 + 12S^2 & -\frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S - 12C \cdot S & -6\ell S \\ \frac{2A(1+12\phi)\ell^3}{I_x} S^2 + 24C^2 & 0 & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} C \cdot S + 12C \cdot S & \frac{A(1+12\phi)\ell^2}{I_x} S^2 - 12C^2 & -6\ell C \\ 0 & (8+24\phi)\ell^2 & -6\ell S & 6\ell C & (2-12\phi)\ell^2 \end{bmatrix} \quad \text{----- (15)}$$

U を点, O のまわりで Taylor 展開すると,

$$U(\pm \frac{R\phi}{n}) = U(0) \pm U'(0) \left(\frac{R\phi}{n} \right) + \frac{1}{2!} U''(0) \left(\frac{R\phi}{n} \right)^2 \pm \frac{1}{3!} U'''(0) \left(\frac{R\phi}{n} \right)^3 + \dots \quad (16)$$

式(14), (16)に現われる項には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} l_0 &= R\varphi/m, \quad l = 2R \sin(\varphi/2m) \\ C &= \cos(\varphi/2m) = 1 - \frac{1}{2} (l_0/2R)^2 + O(l_0^4) \\ S &= \sin(\varphi/2m) = (l_0/2R) - \frac{1}{6} (l_0/2R)^3 + O(l_0^5) \\ \frac{1}{l} &= \frac{1}{2R} \operatorname{cosec}(l_0/2R) = \frac{1}{l_0} + \frac{l_0}{24R^2} + O(l_0^3) \\ \frac{1}{l^2} &= \frac{1}{l_0^2} + \frac{1}{12R^2} + O(l_0^2), \quad \frac{1}{l^3} = \frac{1}{l_0^3} + \frac{1}{8R^2 l_0} + O(l_0) \end{aligned} \right\} \text{-----}(17)$$

式(16)と式(14)に代入し、式(17)の関係をを用いて l_0 のべき順で整理して表わすと次式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= l_0 \left[GA \left\{ \frac{1}{R} \left(\frac{W}{R} - v' - \theta_x \right) + \frac{E}{G} \left(-w'' - \frac{v'}{R} \right) \right\} \right] + O(l_0^3) \\ 0 &= l_0 \left[GA \left\{ \frac{W'}{R} - v'' - \theta'_x + \frac{E}{G} \frac{1}{R} \left(w' + \frac{v}{R} \right) \right\} \right] + O(l_0^3) \\ 0 &= l_0 \left[-GA \left(\frac{W}{R} - v' - \theta_x + \frac{EI\pi}{GA} \theta'_x \right) \right] + O(l_0^3) \end{aligned} \right\} \text{-----}(18 \cdot a \sim c)$$

分割要素数を無限大にする、すなわち l_0 を無限小にすると式(18・a~c)から、次の3個の独立した式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EA \left(w'' + \frac{v'}{R} \right) + EI_x \frac{\theta_x''}{R} &= 0, \quad EA \left(w' + \frac{v}{R} \right) - EI_x R \theta_x'' = 0 \\ GA \left(\theta_x + v' - \frac{W}{R} \right) - EI_x \theta_x'' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(19 \cdot a \sim c)$$

式(19・a~c)は、1.で導いた二次せん断変形を考慮した薄肉断面曲がりばりの変位表示のつり合い式のうち、面内問題に関する式(5・a, b, e)に一致する。

(2) 面外挙動

面外挙動に対する節点力成分を Fig. 5 に示す。これらの節点力を成分とする節点力ベクトル F_i および対応する節点変位ベクトルを次のように定義する。

$$\begin{aligned} F_i^T &= [V_{xi} \quad M_{yi} \quad T_i \quad M_{wi}] \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \text{-----}(20)$$

$$\begin{aligned} U_i^T &= [u_i \quad \theta_{yi} \quad \varphi_i \quad \lambda \varphi_i] \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \text{-----}(21)$$

面内挙動と同様、各節点で部材軸から円弧材の接線方向に座標系を回転させると、式(20), (21)の節点力ベクトル、変位ベクトルに対する座標変換マトリックスは

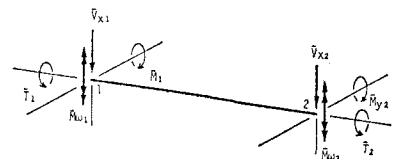


Fig. 5 Straight Beam Element for Out-of-plane Problem

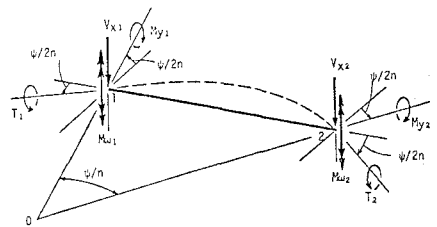


Fig. 6 Coordinate Transformation for Out-of-plane Problem

次のように表わされる。

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{----- (22)}$$

面内問題と同様に、外力の作用しない点で、隣接する二要素の剛性方程式を重ね合わせ、式(16)を式(14)に代入し、式(17)の関係を用いて l_0 のべき順で整理して表わすと次式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= l_0 \{ GA(-u'' + \theta_y') \} + \theta(l_0^3) \\ 0 &= l_0 \{ GA(-u' + \theta_y) - EI_y(\theta_y'' - \frac{\varphi'}{R}) + \frac{GI_{p0}}{R}(\varphi' + \frac{\theta_y}{R} - \lambda\varphi) + \frac{GJ_{s1}}{R}\lambda \} + \theta(l_0^3) \\ 0 &= l_0 \{ \frac{EI_y}{R}(\frac{\varphi}{R} - \theta_y') - GI_{p0}(\varphi'' + \frac{\theta_y'}{R} - \lambda\varphi') - GJ_{s1}\lambda\varphi' \} + \theta(l_0^3) \\ 0 &= -l_0 \{ GI_{p0}(\varphi' + \frac{\theta_y}{R} - \lambda\varphi) - GJ_{s1}\lambda\varphi - GJ_{s1}(\varphi' + \frac{\theta_y}{R} - 2\lambda\varphi) + EI_w\lambda\varphi'' \} + \theta(l_0^3) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (23. a~d)}$$

分割要素数を無限大にする、すなわち l_0 を無限小にすると式(23. a~d)から、次の4個の独立した式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} EI_w\lambda\varphi''' - GJ_{s1}\lambda\varphi' - GJ_{s1}(\varphi'' + \frac{\theta_y'}{R} - \lambda\varphi') + EI_y(R\theta_y'' - \varphi') &= 0 \\ EI_w\lambda\varphi''' - GJ_{s1}\lambda\varphi' - GJ_{s1}(\varphi'' + \frac{\theta_y'}{R} - \lambda\varphi') - EI_y(\frac{1}{R}\theta_y' - \frac{1}{R^2}\varphi) &= 0 \\ u'' - \theta_y' &= 0 \\ GI_{p0}(\varphi' + \frac{\theta_y}{R} - \lambda\varphi) + EI_w\lambda\varphi'' - GJ_{s1}\lambda\varphi - GJ_{s1}(\varphi' + \frac{\theta_y}{R} - 2\lambda\varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (24. a~d)}$$

式(24. a~d)は、1.で導いた二次せん断変形を考慮した薄肉断面曲がりばりの変位表示のつり合い式のうち、面外問題に関する式(5. c, d, f, g)に一致する。

4. 数値計算例

曲線要素を用いた薄肉円弧ばりの有限要素法による解と、直線要素による折れ線近似法の解とを比較するために、既成の論文⁽⁶⁾において採用されているモデルを含め、実際に構造物として使用されるはり全般について検討する目的で、固定アーチと二径間連続ばりについて数値計算を行なう。

(1) 有限要素法

有限要素法を用いる曲線要素に対する剛性マトリックスとして、文献(4)の仮想仕事式において、変位成分 w_c , u_s , v_s , φ_s に対し、変位関数を三次関数で近似し、求めたものをを用いる。

(2) 数値計算

固定アーチについては面内荷重を、二径間連続ばりについては面外荷重を作用させる。各モデルとも弧長を一定に保ち、曲率半径を変化させて荷重載荷点における変位の数値解への収束状況とみる。

Diagram of a C-channel section with the following dimensions and properties:

- Top flange width: 500
- Top flange thickness: 40
- Web height: 200
- Web thickness: 10
- Bottom flange width: 250
- Bottom flange thickness: 40
- Section properties:
 - Arc length = 3141.6 cm
 - A = 520 cm²
 - I_x = 83343 cm⁴
 - I_y = 1.68 x 10⁶ cm⁴
 - J = 6520 cm⁴
 - I_w = 3.0 x 10⁸ cm⁶

Fig. 7 Cross Section (1)

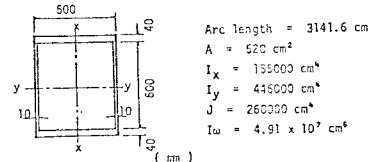
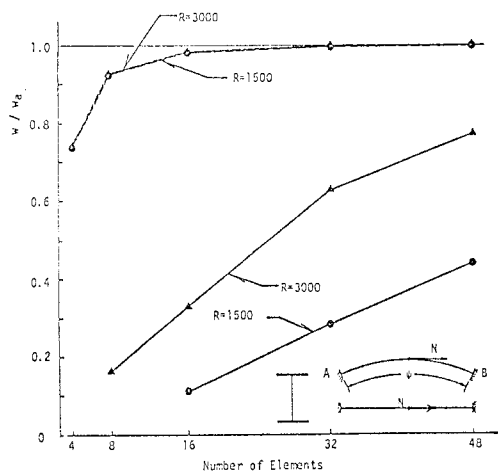
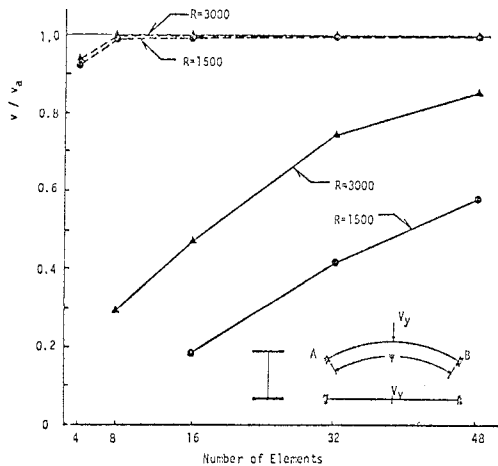


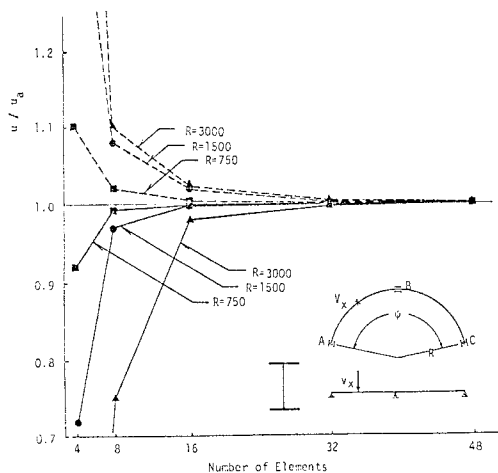
Fig. 8 Cross Section (2)



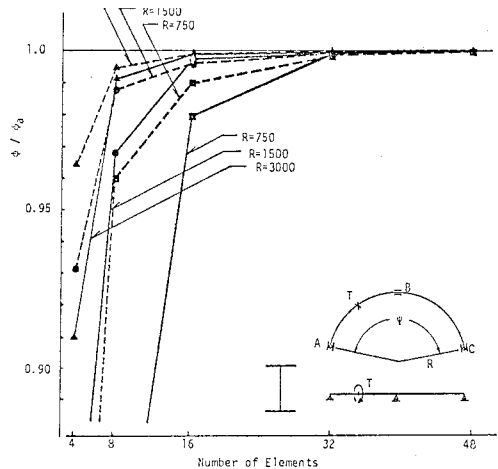
(a)



(b)



(c)



(d)

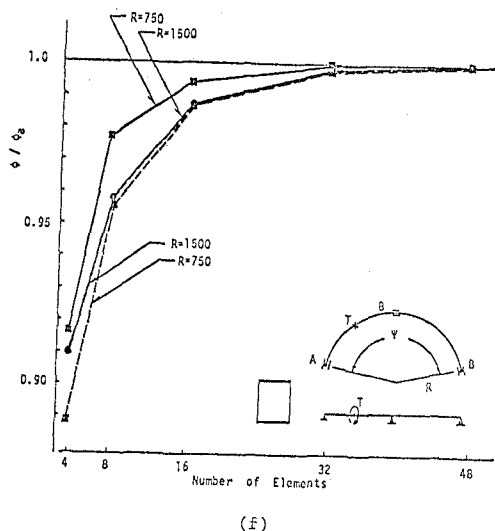
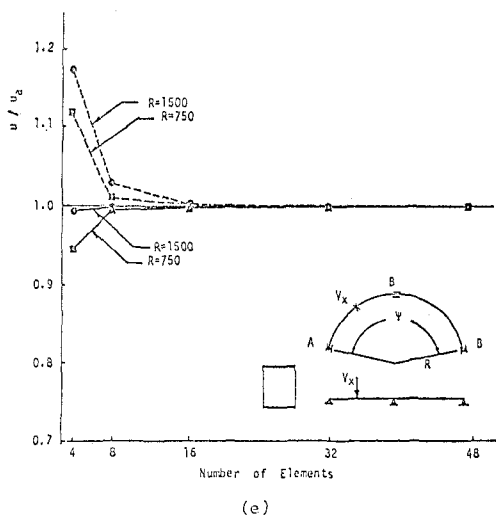


Fig. 9 Convergence of The Curved Beam Model and The Straight Beam Model

————— curved element
 - - - - - straight element

5. 折曲線モデルの収束についての考察

本報告における折曲線近似法では、直線要素の剛性マトリックスとして、二次せん断変形を考慮したものを用い、二次せん断変形を考慮した曲がりばりの支配方程式への収束を扱った。この演算に先立ち、二次せん断変形を考慮しない、謂ゆる初等はり理論における直線要素の剛性マトリックスを用いて初等曲がりばりの支配方程式への収束を調べた所、面内問題に関して式(5・a~c)のかわりに次の三式が得られた。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{W}{R} - v' - \theta_x &= 0 \\
 EA \left(w'' + \frac{v'}{R} \right) + \frac{EI_x}{R} \left(-v''' + \frac{w''}{R} \right) - \frac{EI_x}{R^2} \left(w'' + \frac{v'}{R} \right) &= 0 \\
 EI_x \left(\frac{w'''}{R} - v'' \right) - \frac{EA}{R} \left(w' + \frac{v}{R} \right) - \frac{EI_x}{R} \left(w'' + \frac{v''}{R} \right) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{----- (25・a~c)}$$

式(25・a)は式(6・a)でせん断変形を表わす v を零とおいた式と一致することから明らかのように θ_x の定義式となっている。式(25・a)を考慮すると式(32・b, c)の第一項、第二項は式(5・a, b)と一致する。したがって式(25)が内弧はりの支配方程式と一致するためには式(25・b, c)の第三項が零となる必要がある。すなわち

$$\left(\frac{v}{R} + w' \right)' = \left(\frac{v}{R} + w' \right)'' = 0 \quad \text{----- (26)}$$

ここで考えている断面では $y_c = y_s = 0$ とはり、S点、C点での変位 v_s と v_c は等しくこれらを v と表わした。同様に w_c を w と表わした。これらに注目すると式(26)は式(3・a)の右辺の最初の小括弧をそれぞれ0で1回および2回微分した項であることが解る。式(3・a)中のこの小括弧中の項は断面の中立点に働く軸方向力による軸方向ひずみを表わす。したがって式(26)は中立点の不伸張、ある

いは中立点の軸方向ひずみ一定を表わしている。剛性方程式をもとに式(25)を導く過程で不用意にこのような仮定の入る操作を行なったとも思われず、式(26)の拘束の意味が必ずしも明らかでない。面外問題についてもせん断変形を考えない剛性方程式をもとに同じ演算をするとその結果が式(5)と一致するためには

$$\frac{\partial y}{\partial R} + \psi' = 0 \quad \text{-----}(27)$$

の条件が必要となった。この項の意味も解明できていない。いずれにしても二次せん断変形を考慮した剛性方程式を用いるとこのような困難はなく、容易に微分方程式と一致する結果が得られた。せん断変形を考えないゆり理論には着者の気付かない条件がくみ込まれており、その条件が式(26)、(27)のような形で現われたのかとも考えられる。今後の検討課題としたい。

6. 考察および結語

二次せん断変形を考慮した直線ばりの剛性マトリックスを用いた折れ線近似法において、折れ線の数を無限に増やした時に四弧ばりの微分方程式に収束する事を示した。折れ線近似法を用いたとき、折れ線数と精度との関係の比較の対象として、曲線要素による有限要素法解における分割数と精度との関係を選んだ。有限要素法では変位関数を三次の多項式で近似したのに対し、折れ線近似法では直線線材要素の厳密な剛性マトリックスを用い幾何学的に形状を近似している。有限要素法の場合、一要素の剛性マトリックスを求める計算が非常に面倒であり、折れ線近似法の剛性マトリックスと較べると項数が多く、計算量が増えて不利である。数値計算では単一荷重を作用させたときの荷重に対応する載荷点の変位に着目して収束の度合いを検討した。面内荷重を作用させた場合(固定アーチ)は、同じ分割数に対して曲線要素による有限要素法に比して折れ線近似法が非常に良い近似を与える。一方、面外荷重を作用させた場合(連続ばり)は、有限要素法と折れ線近似法との間に著しい差異はない。有限要素法では、当然のことながら一点載荷の場合、荷重に対応する載荷点の変位は下界値を与える。すなわち、厳密解に対してつねに下方から収束する。それに対し、折れ線近似法は収束の方向を持たないが、このことが実用設計において特に問題となることはないであろう。

曲線要素による有限要素法と折れ線近似法との精度を検討した文献に、薄木・稼農の研究⁶⁾があり、そこではI形断面二径間連続四弧曲線ばりを16分割した時の荷重点におけるたわみに着目し、曲線要素による有限要素法のほうが折れ線近似法よりも精度が良いと結論を下している。しかしながら、曲率や分割要素数を変化させて収束状況を全体的にみると、必ずしも曲線要素モデルの方が有利であるとは言えない。本報告で扱った例題の範囲では、折れ線近似モデルの方が様々な条件(拘束条件、曲率、荷重条件など)のもとで、コンスタントに収束性を持っており、また少ばり分割数で良い近似度の解が得られた。

本研究は文部省科学研究費の補助を受けておこなったものである。

参考文献

1. Kikuchi, F.: On the validity of the finite element analysis of circular arches represented by an assemblage of beam element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.5, 1975, pp. 253-376.
2. 山本善文, 山田善一: マトリックス構造解析の誤差論, コンピューターによる構造工学講座 II-5-B, 培風館, 1972.
3. Walz, J.E., R.E.Fulton and N.J.Cyrus: Accuracy and convergence of finite element approximations, Proc. of the Second Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, 1962.
4. 西野文雄, 深沢泰晴: ひずみ端の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化, 土木学会論文報告集, No. 247, 1976-3, pp. 9~19.
5. 西野文雄, 長谷川彰夫, 名取悦郎: 断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面ばりの理論, 土木学会論文報告集, No. 248, 1976-4, pp. 25-40.
6. 澤木征三, 篠原知徳: 薄肉断面曲線材の変形法による解析, 土木学会論文報告集, No. 235, 1975-3, pp. 29-39.

Analysis of Circular Members by An Assemblage of Straight Elements

by Toshio Suzuki*, Shinichiro Ueno** and Fumio Nishino***

Practical analyses of curved structural members are frequently made employing an approximate method. Approximate analyses of frequent use may be divided into two groups. One is to obtain approximate solution of the analytically exact governing equation and the other is to represent the structure to be analysed by a physically approximate model for which analytically exact solution can be easily obtained and then to solve it. Finite element method is one of the examples of the former, while analysis of curved members by an assemblage of straight elements is a representative example of the latter.

This report deals curved structures subject to biaxial bending moments, torsion and axial force. The convergence of the solution on physical models represented by assemblage of straight elements to that of the original curved structures is shown by making use of convergence of stiffness equation to the governing differential equation at the limit of increasing number of straight elements. Using the stiffness matrix considering shear deformations associated with variable moments and bi-moments, the stiffness equation converges to the governing differential equation of curved structures, while it turned out that the use of stiffness matrix neglecting the shear deformations resulted in the governing equation with additional constraints, of which meaning are not obvious.

Numerical solutions are obtained on arch type structures subjected to axial force and in-plane bending and on curved bridges subjected to out-of-plane bending and torsion by using both finite element approximation and physical approximation with straight elements. For arch type structures with the same number of mesh sizes, physical approximation resulted in much closer solutions to the exact ones on all ranges of the parameters varied for the examples. For curved bridges, no particular superiority was observed between two methods of approximation. Depending on the values of parameters of the examples, finite element approximation may result in closer solutions, while for the different values of the parameters, physical approximation results in better solution.

By the results of the numerical examples on convergence together with the simplicity and smaller amount of computation required to form stiffness matrices, it is concluded that physical approximation by assemblage of straight elements is superior to the finite element approximation of curved elements. This conclusion is further strengthened by the fact that curvature of practical curved structures is scarcely constant but it is variable along arc length, for which derivation of the stiffness matrix by finite element method is a rather involved task.

* Bridge Design Section, Nippon Kokan K.K.

** Ministry of Construction

*** Department of Civil Engineering, University of Tokyo