(8) 構造特性のマトリクス表現に関する一考察

岡山大学工学部 ○谷口健男　　京都大学工学部 白石成人

1. まえがき

構造物をマトリクス法を用いて解析しようとする場合 対象系の特性は例えば剛性行列Kとして評価され 系の挙動は次の式を解くことにより得られる。

$$P = K \cdot u \tag{1}$$

ここで P は外力ベクトル，u は求めるべき変位ベクトルである。K行列は一般に数多くの零要素を含み 疎（スパース）であるといわれる。いま (i,j) 要素を k_{ij} で表現すると $k_{ij} \neq 0$ は系の中に設定された i, j 両点間にinteractionがあることを示し，$k_{ij} = 0$ は2点間の直接的つながりがないことを示すことより，Kはその系の一種のネットワーク・アナロジーと考えられる。ネットワークは，まず 点と線よりなるグラフを設定し，ついで 点，線へ物理量を付加することにより作られる。従って，グラフは"力学的伝達経路"，添付された物理量は"各伝達路の伝達能力"を意味する。構造物が骨組系であれば 伝達経路，すなわちグラフは ほとんど一義的に定まる。対象として板のような連続体を，解析法として有限要素法をとって考えてみると，力学的伝達経路の設定は，系の占める空間の離散化，すなわち 離散点の設定と要素の形状の選択により定まり，伝達能力は 離散化された各要素の剛性を求めることにより定まる。このようにマトリクス法をネットワーク解析として見直すと 系の構造特性を伝達経路と伝達能力に明確に分離して考えることができ，構造特性に及ぼす，それぞれの影響を考察できると思われる。

このように求められた伝達経路，伝達能力は (1)式を解いていく段階で変化することが知られている。(1)式を多元連立一次方程式と考え，ガウスの消去法で解くと前進消去終了時点において，

$$\tilde{P} = \tilde{K} \cdot u \tag{2}$$

となる。ただし $\tilde{k}_{ij} = 0$ $(j<i)$。この変化のうち，伝達経路に注目すれば (1)より(2)式への置き換えにより，前者において i, j 両点間の伝達は可逆であったものが 後者においては そうでなくなる一方，$k_{ij} = 0$ であったものが $\tilde{k}_{ij} \neq 0$ となる新たな伝達経路の発生（フィル・インと呼ぶ）がみられ，前者に比し，後者の方が複雑なネットワークとなる。しかしながら，このようなネットワークの変化はその伝達経路のみによって一義的に定まるものである。この他に，数値計算法で用いられる帯幅，プロファイルといったマトリクスの特性もネットワークのうちの伝達経路が与えられた時点で一義的に定まることより，それらも伝達経路固有のものであるのみならず 一種の不変量である。

本論文においては マトリクス法における構造特性の中に埋没している伝達経路の抽出をまず行い，それをもとに 系固有の不変量としての最小フィル・イン，帯幅，プロファイル それぞれの物理的意味付けを行い，従来の数値計算法以外の分野へのそれらの適用を図る。

2. 行列とグラフによる伝達経路の表現

行列Kの中の伝達経路のみを取り出す。離散化された解析モデルに含まれるそれぞれの節点を認識しうるように任意に $1, 2, 3, \cdots, n$ と番号を付ける。ここで次のような1つの行列 $A(n \times n)$ を定義す

る。ただし A_{ij} でもって A の i 行，j 列要素を示すものとする。

$$\left.\begin{array}{ll} i,j\text{ 両点が同一要素に含まれる 2 点であるとき} & A_{ij}=1 \\ i,j\text{ 両点が異なる 2 要素にそれぞれ含まれるとき} & A_{ij}=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

ただし $A_{ii}=1$。このようにして得られた 0，1 要素のみよりなる行列 A は 元の K より点の自由度，物理量を除いたものに一致することより，K 行列に含まれる伝達経路の行列表現を与える。すなわち 2 点間の伝達経路の存在は"1"という要素で示されることになる。

このようにして得られた行列 A より，次の方法で 1 つのグラフ G を得る。まず 1, 2, …, n とラベルされた n 個の点を準備し，

$$\left.\begin{array}{lll} \text{もし} & A_{ij}=1 & \text{ならば } i,j\text{ 両点を線で結ぶ。} \\ \text{もし} & A_{ij}=0 & \text{ならば } i,j\text{ 両点間を結ばない。} \end{array}\right\} \quad (4)$$

(4) で示されるグラフ G は 伝達経路"A"の異なった表現法であり，各伝達経路は"線"で示される。本節以後用いるグラフの用語の説明をかね，A と G の対応関係を列挙する。連結グラフとは G の任意の 2 点は いくつかの線を連らねることにより互に結びつけられているグラフであり，従って 1 個の独立な構造系のグラフ G は 1 個の連結グラフで示され，A においては各行（列）には A_{ii} を除き他に最少 1 個の"1"が存在することに等しい。点の次数 (deg.) とは，点に集まっている線の数を示し，A においては 各行（列）に含まれる非対角部の"1"の個数と等しい。G における距離 (d) とは，2 点間を結ぶ最短経路上に含まれる線の本数を示し，$d=1$ は 互に隣接する 2 点間の距離であり，行列 A においては 非対角部における"1"の存在が $d=1$，すなわち隣接する 2 点を示すにすぎない。言い換えると，A は $d=1$ なる関係を有する 2 点間の情報を与えるものでしかない。従って もし $d=\alpha$ ($\alpha \geq 2$) を満たす情報を行列において得ようとするならば，A^{α} なる行列のべキ計算を行う必要がある[1]。G の直径 (d_0) とは G の任意の 2 点間の距離のうちの最大値を云い，A において d_0 を求めようとすれば，A^{d_0} を求めなければならない。完全グラフ (G_c) とは $d_0=1$ のグラフのことであり，A においては その全ての要素が"1"であることで認識される。部分グラフとは，G の 1 部を残りの部分（補グラフ）よりきりはなした時のことを云い，A においては その小行列に一致する。

一般に構造物の離散化手法により求められる特性行列 K は，その要素の多くは零であることより，疎（スパース）であるといわれるが，これを行列 A において調べると，K と同様 A_{ij} のほとんどが 0 に等しく 1 要素が少いことになる。G におけるスパース性は，G に含まれる点の数 (n) と線の数 (m) との間に次式が成り立つことで示される。

$$m < n(n-1)/2 \quad (5)$$

すなわち，疎な行列に対応するグラフは完全に密なグラフ（完全グラフ：G_c）に含まれる線の数に比べて非常に少ない数しか有しないことに該当することを上式は示している。

このスパース性を 下式でもって定義する。

$$\rho = 1 - 2m/n(n-1) \quad (6)$$

ここで ρ はスパース性を示し，G_c の場合 $\rho=0$。2 次元連続体の離散化モデルにおいては，

$$\rho \fallingdotseq 1 - 2\alpha/(n-1) \quad (7)$$

ただし α は離散化モデルの示すグラフの点の次数の平均値を示し，2 次元連続体の三角要素分割を

例にとれば $\alpha = 6$, 四辺形要素においては $\alpha = 8$。

(7)式より、離散点の数が増加すれば、ρは1に近づく。すなわち K あるいは A に含まれる非零要素数の全要素数に対する比率が減少し、これが行列の疎の理由である。(7)式より、次のような説明も可能となる。構造系の離散化による伝達経路の設定は、比較的簡単なものでしかない。なぜならば、1個の離散点の設定により発生する伝達経路の増加は α でしかなく、α は上記のような定数であるからである。一方、1個の離散点の増加による可能な伝達経路は n 個も存在する。従ってれが増加すればする程スパース性は高くなる。

このようなスパースな行列において、各行に関して主対角と最終非零要素の列番号差の最大値は、行・列の入れ換えを行ってもある値以下には下げられないことが知られており、これが最小半帯幅(min. HBW で示す)と呼ばれるものである。

また、各列に関して主対角と最初の非零要素で囲まれる領域内に含まれる要素数も、行・列の入れ換えにより最小化され、それは最小プロファイル(min.|P|と略記する)と呼ばれる。このような最小帯幅, 最小プロファイルを求める為に行った行列における行・列の入れ換えはグラフにおけるRenumbering, すなわち節点番号順序(1, 2, 3, …, n)の付け換えと等価であり、従ってグラフの構造変化に影響を及ぼすものではない。よって min. HBW および min|P| はグラフの特性, 言い換えると伝達経路の特性の一つであることがわかる。

3. 消去演算のネットワーク理論的考察 および フィル・インの意味付け

マトリクス解析法で得られた構造系の応答を示す(1)式は数値計算における消去演算

$$\tilde{k}_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{ik}\cdot k_{jk}}{k_{ii}} \tag{8}$$

により、最終的には(2)式に置き換えられる。このような等価置換により得た新たな構造特性行列 $\tilde{K}$ は

$$\tilde{k}_{ij} = 0, \quad ただし \quad i > j \tag{9}$$

すなわち上三角行列となる。更に $k_{ij}=0$ なる要素に注目すると消去後の $\tilde{k}_{ij}$ には次の2つが存在する。

$$k_{ij} = 0 \longrightarrow \tilde{k}_{ij} \neq 0 \tag{10}$$

$$k_{ij} = 0 \longrightarrow \tilde{k}_{ij} = 0 \tag{11}$$

(10), (11)式をそれぞれ満たすような要素 (i, j) を Fill-in (Fと略記), Zero (Zと略記)と呼ぶことにする。この消去演算プロセスを行列A, グラフGにおいて行う。

行列Aを用いて(10), (11)式を満たす条件を調べると、$A_{ij}=0$ であっても

$$\text{if} \quad A_{ik} = A_{kj} = 1, \quad \text{then} \quad \tilde{A}_{ij} = 1 \tag{12}$$

$$\text{if} \quad A_{ik} = 0 \ \text{and (or)} \ A_{kj} = 0, \quad \text{then} \quad \tilde{A}_{ij} = 0 \tag{13}$$

(12), (13)両式をいわゆる Vertex Elimination の考え方[2]に従えばグラフGにおける次の表現と等価である。ただし $d(v_i, v_j)$ はGに含まれる i, j 両点間の距離を示す。たとえ $d(v_i, v_j) > 1$ in G であっても

$$\text{if} \quad d(v_i, v_k) = d(v_j, v_k) = 1, \quad \text{then} \quad d(v_i, v_j) = 1 \ \text{in} \ \tilde{G}. \tag{14}$$

$$\text{if} \quad d(v_i, v_k) > 1 \ \text{and/or} \ d(v_j, v_k) > 1, \quad \text{then} \quad d(v_i, v_j) > 1 \ \text{in} \ \tilde{G} \tag{15}$$

ここで $\tilde{G}$ は v_k の消去によるグラフの変化，すなわちフィル・インを付加したグラフを示す。

(1)式より(2)式への変換は，行列の要素の値の変化，すなわち k_{ij} という伝達能力の変化とともに，(14)式で明確化された伝達構造の変化，すなわち新たな線の発生をも伴うことがわかる。しかしながら，このようなグラフの変化は Vertex Elimination Ordering，すなわち行列 K(A) における消去の進め方によっても変わる。K と $\tilde{K}$ は，等価なネットワークであるが，それはあくまで求める未知ベクトル u が一義的に定まるという意味での等価性でしかなく，$\tilde{K}$ の伝達機構は一義的には定まらないことをこれは示している。従って解ベクトル u の唯一性は，伝達機構の違いを各伝達経路上の線のもつ伝達能力を変化させることにより保障している。

消去演算におけるこのような伝達機構の変化は(14)式に示されるフィル・インの発生に依る。1つのグラフ：G において発生する最小フィル・インは G 固有のものであり，その数 |F| を規定する最大の要因は"グラフの幅"であることが参考文献 3) に示されている。更にフィル・インは互に隣接する部分グラフ間においてのみ発生する。従って，G は伝達経路であることを考えれば，最小フィル・インおよびその発生の物理的意味として，

1). フィル・インの発生は伝達経路の多様化を示す。しかしながら，その多様化は，G の d_0 方向に添って d_0 の1端より G を等距離部分グラフの集合に置き換えた時の，各部分グラフ内，および，相隣る部分グラフ間に限定され，他の領域には及ばない。

2). 最小フィル・インを発生させる消去順序においては G の伝達経路を大きく変えるようなフィル・インは発生せず（1)より明らか），従ってその G の構造が $\tilde{G}$ においても保存される。

3). 従って，最小フィル・インの大・小（同じ点個数を有する2このグラフに対して）は，系全体の伝達経路の多様さの総合的評価に役立つ。あるいは，部分グラフ内における多様さの評価手段にもなりうる。

一般に K 行列に含まれる全ての非零要素を K の主対角に添うある領域内に収めることが可能であり，このような行列に対し消去プロセスを適用しても，Fill-in はその領域内においてのみ発生する。従って，そのようなグラフの構造変化の及ぶ最大の領域自体が，伝達機構としてのグラフの一特性であることは自明であり，その特性を知る為にいわゆる帯幅，プロファイルの最小値が重要な意味をもつ。

以上に示したような消去演算後得られる等価なネットワークは(9)式に示される特徴を有する。ここにおいて $k_{ij}=0$，$k_{ji}\neq 0$ とは i より j への伝達機構は存在しないが，逆の j より i への伝達機構は存在するということである。これに対し，グラフ理論的表現を行えば，前進消去プロセスにより，無向グラフ的伝達機構が向き付けグラフ的伝達機構に置き換えられたと云えよう。

本節において得られた事柄をまとめれば，消去演算プロセスの伝達経路に及ぼす影響は

1). 伝達経路への方向性添付，および

2). フィル・イン発生による伝達経路そのものの多様化

として評価されるが，最小フィル・インを発生させる消去プロセスだけが意味を持つ。更に，フィル・イン発生が A のある領域内に限定されることより，最小帯幅，最小プロファイルも重要な意味をもつと考えられ，それらについては次節で考察を加える。

4. 最小プロファイルの物理的意味 および その利用

行列 A のプロファイル $|P|$ は各列に関して、最初の非零要素"1"の存在する要素 A_{ji}（ただし $j \leq i$）とその主対角要素 A_{ii} との間の領域の中の全要素数で測られ、

$$|P| = \sum_{i=1}^{n}(i-j_i) \tag{16}$$

$|P|$ の中には A の有する非零要素が全て包含されていることより、$|P|$ の最小値は $|P|$ の中の零要素の個数を最小にすることに一致する。

いま $|P|$ に占める零要素の個数を $|L|$ で示せば、

$$|L| = |F| + |Z| \tag{17}$$

ここで $|F|$, $|Z|$ はそれぞれ A の消去により発生するフィル・イン数と、消去後も零のままの要素数を示す。従って $\min|P|$ は下式と等価となる。

$$\begin{aligned} \min|P| &= \min|L| \\ &= \min\{|F| + |Z|\} \end{aligned} \tag{18}$$

特殊なグラフを除き通常(18)式において $|Z| \neq 0$ となることが知られている。[4] しかしながら、第4節で述べたように伝達経路を示すのは A もしくは $\tilde{A}$ の中の非零要素だけであり、従って Z は伝達経路には何ら関与しない。これより、$\min|P|$ の大・小は"伝達経路のみかけの多様さ"を示すものと云える。

ここで $|F| = 0$ の特性をもつトリーグラフを例にとって Z の存在の意義を考察してみよう。$|Z| = 0$ となる典型的なトリーグラフ：$G(n)$ は

1). n 個の点がシリーズに並んでいる場合（図－1）と、

2). $(n-1)$ 個の点が残る1個の点に集まっている場合（図－2）

に限られ、それ以外のトリーグラフにおいては $|Z| \neq 0$ となる。図－1と2より、$|Z| = 0$ となるグラフの特色として、伝達経路としては、

1). 唯一つの方向性をもつ場合（図－1）

2). 全く方向性をもたない場合（図－2）

の2つのタイプに限定され、従って $|Z| \neq 0$ となるグラフは3方向以上の分岐を有し、従ってそれぞれの分岐枝への方向性を有するグラフとなり、第3)の新たなタイプを作る。

以上、トリーグラフに関してのみ考察したが、トリーグラフとは構造を全く異にするものとしてメッシュグラフが存在する。メッシュグラフとはループを画くグラフであり、従って力学的伝達経路としては力学量の流れが同様にループを画くことになる。また、メッシュグラフの1点に入力すれば、その点において力学量が一度分岐され、再度ループの反対の点において集合する。このような特性を有する伝達経路はトリー構造では存在せず、従ってメッシュグラフは上記3つのタイプとは異にし、新たな第4)タイプを作る。このメッシュグラフを $|F|$, $|Z|$ を用いて表現すれば、$|F| \neq 0$ かつ $|Z| = 0$。この $|Z| = 0$ より、メッシュグラフとタイプ1）との相似性が推測される。すなわちタイプ1）とタイプ4）のいずれも力の伝達経路は一方向である点において一致している。

以上の考察を $|F|$, $|Z|$ を用いてまとめなおすと次のようになる。

Type 1 : $|F|=0$, $|Z|=0$ ⟶ 一方向性を有するトリー構造系

Type 2 : $|F|=0$, $|Z|=0$ ⟶ 方向性を全く有しないトリー構造系

Type 3 : $|F|=0$, $|Z|\neq 0$ ⟶ 分岐を有するトリー構造系

Type 4 : $|F|\neq 0$, $|Z|=0$ ⟶ メッシュ構造系

以上示したように min $|E|$ に含まれる $|Z|$ の存在の有無が系全体としての伝達機構の多様さを示すことがわかり，従って構造系の外観は簡単であったとしても それだけでは系全体の力学的構造特性は判断できず，その min $|E|$ を調べて始めて特性が判定できることになる。あるいは逆に系の外観が複雑であっても その内部機構によっては $|Z|=0$ となる場合もあり，そのような場合には 系の力学的特性は案外簡単なものであると判断できる。 このように 系の力学的伝達機能特性は 系の min $|E|$，特に $|Z|$ の存在の有無により決定されることがわかった。

このような min $|E|$，$|Z|$ の意味付けができたことにより，min $|E|$ を求めることにより，

a. 複雑な構造系の主たる力学的特性

b. 系全体としての力学的多様さ

c. 系の部分的修正による系全体としての力学的特性の変化

等を知ることができ，min $|E|$ の適用の一例として 構造系の補剛・補強の評価手段として用いられることが予想される。

5. 最小帯幅の物理的意味 および その利用

最小帯幅の物理的意味付けは 従来より 白石・後藤[5]により行なわれ，その結果 最小帯幅は"グラフの幅"を示すことが知られている。 グラフの幅とは，Gの直径方向を横切る線を引いた時の最長線上に位置する点個数により決定されることより，力の主たる流れ方向である直径方向の物理量の伝達を行なわしめた時の最大の伝達経路を示すものと考えられる。従って min HBW が大きいとは伝達経路の多様さの尺度を示し，そのような最大の多様さの存在する位置は，最小帯幅を定めるグラフの部分においてである。 このことより，最小帯幅では min $|E|$ とは異なり系全体としての伝達経路の多様さの評価は不可能であり，Gの中の min HBW を定める部分の多様さの評価しかできない。

以上の考察を基にして，最小帯幅による伝達経路の多様さの判断の実例を次に示す。前節において min $|E|$ を用いることにより得られた Type 1 および Type 4 に対して min HBW を考えてみると，それらにおいては 力の主たる流れの方向は唯1つしかなく，従ってそれに添う伝達機構は min HBW を定める部分において最も多様となっている。 すなわち min HBW を示す構造部分の力学的挙動が他の領域に比して複雑となっていることが，部分的伝達機構の多様さを要求していると考えられる。 このような実例として 切欠きを有する板 (Type 1 に該当)，および穴あき板 (Type 4 に該当) の応力集中部の FEM メッシュの細分化が挙げられよう。一定の伝達能力を有する要素をもってしては，このような力学的挙動の複雑さをカバーできないことより伝達機構の多様さの助けにより，言い換えれば メッシュの細分化による伝達機能の向上を その領域が要求しているものと考えられよう。

トリー構造 (Type 3) においては 通常 min HBW は分岐点近傍において定められることが例えば 図式帯幅減少法[5]よりも明らかである。 このような系の分岐点では 力の流れの分岐が行なわ

れ、他の領域に比し複雑な挙動がみられることより、その領域において伝達特性の多様さが要求され従って min.HBWは その領域で定まることになる。

以上述べたように、min HBWは 系全体，もしくは その部分系の中の主たる力の流れに注目した時、その流れを受け入れるべき系の最も多様な伝達経路を要求する場所と，相対的な意味における伝達経路の複雑さの度合いを示すものとなる。 これより、min HBWの利用法としては、上述したFEMのメッシュパターンの評価以外に、構造系の補強の一つの評価法が考えられる。

6. あとがき

本研究により 従来 帯行列法，プロファイル法，スパース・マトリクス法を用いて疎な係数行列をもつ連立一次方程式を有効に数値計算行う為に必要とされてきた 最小帯幅，最小プロファイル，最小フィル・インが 構造系の力学的伝達経路と 疎行列との関係を調べることにより，それら最小値の物理的な意味づけが始めて可能となり，それにより 数値計算以外の構造工学等の分野へのそれらの利用が可能となることが示された。

特に，最小プロファイルを利用することにより

1). 構造系の分類ができ，基本的には 4種しかない。

2). 離散化された構造系の中の主たる力学的特性が明らかとなる。

3). 2). に関連して 補剛等の構造系の修正による系の中の伝達経路の変化が明らかとなる。

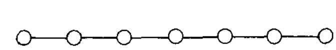
ことが示された。 また 最小帯幅を利用することにより，

1). FEM メッシュ分割の多様さの裏付け

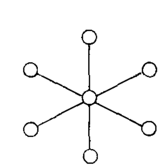
2). 補強等の構造系の部分的修正による伝達経路の多様さの増加の割り合いの評価

等が可能となることが示された。

従って 本研究により，帯幅，プロファイル，フィルインの最小化法の確立が一層望まれることになるが，これら最小化問題は いわゆる組み合わせ問題であることにより，今日いまだ真の意味での汎用性のある手法は見い出されていないのが現状である。しかしながら，min|P|，min|F|は系全体を直接扱うことは不必要で，系を分割し，各部分系に対しそれぞれの最小化を行えば 全体系の最小化が可能となることが最近示されたことにより[6] それらの汎用性あるアルゴリズム設計の可能性が高まったといえる。また 帯幅最小化についても，本論文で示した Type3，4を除けば そのアルゴリズム設計は非常に容易となることがわかっている。[6]



図−1. Type 1



図−2. Type 2

［参考文献］

1). 成岡，中村，"骨組解析法要覧(第1章)"，日本鋼構造協会

2). D.J. Rose, "Graph Theory and Computing", pp.183−217, 1972

3). 谷口，白石，"第13回マトリクス解析法研究発表論文集"，pp.103−108，1979

4). 白石，谷口，服本，3)と同じ，pp.97−102

5). I. Konishi, N. Shiraishi, T. Taniguchi, "Journal of Structural Mechanics", Vol.4, No.2, pp.197−226, 1976

6). 谷口，白石，"第4回電算機利用に関するシンポジウム"，1979

A Consideration on the Matrix Representation of Mechanical Property of Structure

Takeo Taniguchi* and Naruhito Shiraishi**

Proper rearrangement of lows and colums of a matrix representing the mechanical property of structural system can decrease the region of the matrix where all the non-zero elements locate and the minimum value of the region is measured by the width and the area of the region. These are called as the Minimum Bandwidth and the Minimum Profile, respectively, and they are utilized only in the field of effective solver of linear equations, for example the Band Matrix Method and the Profile Method.

On the other hand, graph-theoretic studies on above two solvers clarify that the elimination process on the matrix is equivalent to the vertex elimination process on the graph which is uniquely obtained from the matrix and which represents the connectivity relation of nodes that transmits physical quantity, and the process modifies the graph. But it is also known that the minimum bandwidth and profile are not influenced by the process, and the modification is restricted within the area of the matrix. These consideration results in that the minimum bandwidth and profile are not only one of the characteristics of the graph but also "Invariants" of the graph through the numerical treatment.

In this paper the authors investigate the physical meaning of the minimum bandwidth and profile as Invariants of the graph and they obtained following results:

1. Minimum profile of a matrix represents the main transmission pass of physical quantity in the structural system. Furthermore, it clarifies that any structural system belongs to one of following three types:
   - Fundamental system
   - Tree system
   - Mesh system.
2. Minimum bandwidth of a matrix clarifies not only the most complex portion of the transmission pass in the structural system but also the relative degree of the complexity comparing with other potion of the system.

Above results show that the minimum bandwidth and profile are important not only in the field of the numerical solvers of linear equations but also, for example,

1. classification of various structural systems,
2. proposal of new evaluation method of stiffening and strengthening in structural systems, and also
3. as a tool for the evaluation of the discretization effect of Finite Element Method and Finite Difference Method.

* Department of Civil Engineering, Okayama University
** Department of Civil Engineering, Kyoto University