

(17) 長大吊橋の塔-基礎系の動的相互作用解析

京都大学工学部 山田善一

京都大学工学部 河野健二

1. 緒言

地震時における構造物の応答性状は、構造物の振動特性だけでなく基礎-地盤系の動的特性が大きく影響する場合もある。このような構造物の動的特性を把握するためには構造物と地盤を一体として扱う動的相互作用解析が重要となり、これまでに多数の研究が発表されている。地盤と構造物の動的相互作用では、地盤のインピーダンス関数(バネ効果および減衰効果)の評価に基づき構造物系の振動と、地盤振動が含まれている。特に根入れのある基礎形式では、構造物への地震入力が地盤振動と関連している。

構造物系における地盤の振動特性はインピーダンス関数と呼ばれる振動数依存形で表される。基礎の振動はインピーダンス関数により表されるため上部構造物を含む全体系の解析はサブ・ストラクチャ法により行うことができる。一般に基礎頂部での上載加振により得られるインピーダンス関数は、地盤振動も含むがその影響は明確でない。本研究では、半無限弾性体理論に基づく混合境界値問題の近似解⁽¹⁾および有限境界の設定により有限要素法(FEM)を用いて、基礎-地盤系の応答解析からインピーダンス関数の評価を行なう。さらにこれらを用いた解析から表層地盤の影響について検討する。解析対象としては剛性基礎を有する長大吊橋の塔-基礎系を選び、上部構造と地盤を含む下部構造に分離して独立に解析し、その後両者を統合するサブ・ストラクチャ法を用いている。一般にインピーダンス関数は振動数に依存しているため応答解析はFFT(Fast Fourier Transform)を用いることにより高速かつ簡単に行なうことができる。このような系の動的相互作用解析にFFTを応用する場合の有用性についても述べる。

2. 定式化

有限境界の設定 基礎-地盤系の動的相互作用問題をFEMにより扱う場合、有限個の節点のみによって解析を行なうため半無限連続体である地盤の波動伝播に直接適用することはできない。したがって、仮想境界を設定し有限な領域に置きかえるとともに、その境界において波の反射が生じないようにすることが必要となる。非対称な外力が作用する三次元領域で表わされる基礎-地盤系をFEMで解析する場合の有限境界はE. Kauselら⁽²⁾により提案された伝達境界を用いると次のようになる。すなわちFig.1に示されるような三次元モデルによる解析において、円筒座標系を用いると各変位は、

$$\begin{aligned} u(r, z, \theta) &= \sum_{n=0}^N u_n \cos n\theta, & w(r, z, \theta) &= \sum_{n=0}^N w_n \cos n\theta \\ v(r, z, \theta) &= -\sum_{n=0}^N v_n \sin n\theta \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $n=0$ の項は軸対称の、 $n=1$ の項は非対称の問題にそれぞれ対応している。ところで、円筒座標系における n 次の波動方程式に関して、振動数 ω の調和振動の解は r と z の関数に分けて表わされる。

$$\{U\} = [\bar{H}_n] \{G_0\} \quad (2)$$

$$\text{ただし } \{U\} = \begin{Bmatrix} u_n \\ w_n \\ v_n \end{Bmatrix}, \quad [\bar{H}_n] = \begin{bmatrix} H'_n & 0 & \frac{\pi}{r} H_n \\ 0 & SH_n & 0 \\ \frac{\pi}{r} H_n & 0 & H'_n \end{bmatrix}, \quad \{G_0\} = \begin{Bmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ g_3(z) \end{Bmatrix}$$

ここに s は波数を表わし、第 n 種のハンセル関数 $H_n^{(2)}(sr)$ を H_n 、その r に関する微分を H'_n と書き、 $e^{i\omega t}$ は省略している。また $\{G_0\}$ は積分定数を含む z の関数である。Fig. 1 に示すようにリング要素を用いて解析する半径 r_0 の円筒領域の外側に、半径 r_0 と r_0 の二つの円筒面に囲まれた層状領域を考える。この層状領域の地盤は水平な層に分割されるが、その際各層面の節点がリング要素で分割される領域の節点と一致するようにする。調和外力による各層中の変位は式(2)で与えられるが、 $\{G_0\}$ は未知の積分定数や波数 s を含んでいる。したがって二つの領域の境界における変位の連続性が満足されるように $\{G_0\}$ を決定する必要がある。いま $\{G_0\}$ は各層面での変位 $\{X\}$ を用いると

$$\{G_0\} = [N] \{X\} \quad (3)$$

$$\text{ただし } [N] = \begin{bmatrix} 1-\eta & & \eta & \\ & 1-\eta & & \\ & & 1-\eta & \\ & & & \eta \end{bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} \{U_i\} \\ \{U_j\} \end{Bmatrix}, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

特に、節点 j での変位は $\{X\}$ を用いると、

$$\{U_j\} = [\bar{H}_n] \{X_j\} = \begin{Bmatrix} u_n \\ w_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

となるから、各層の変位は境界での節点変位を用いて表わされる。また式(2)は波動方程式の解であるから、境界における仮想変位式を満たすことが必要である。このことより境界において波数 s に関する固有値問題が得られる。この固有値問題は u_n, w_n に関するものと、 v_n に関するものに分けられる。前者は s に関する2次の固有値問題となり、後者は s^2 に関する1次の固有値問題となる。波動論的には u_n, w_n に関するものは一般化されたレイリー波についての、また v_n に関するものはラブ波についての固有値問題である。これらの固有値解析は地盤の粘弾性的特性を考える場合、複素数のマトリックスに関する固有値解析を行なう必要がある。このような複素固有値解析は、マトリックスの自由度を倍にして実数形のマトリックスに変換し、2段QR法を用いて実行することが出来る。

ところで l 次モードの波動による境界の節点力は k 層に関して

$$\{P\} = r_0 [Z] [Y] \{A\} \quad (5)$$

ただし $[A] = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{3l}]$ 、 l : 地盤層の分割数、 $[Y]$: $3l$ 個の固有ベクトル

また $[Z]$ は境界における応力を積分することにより求められるものであり、固有値、地盤のラメ一定

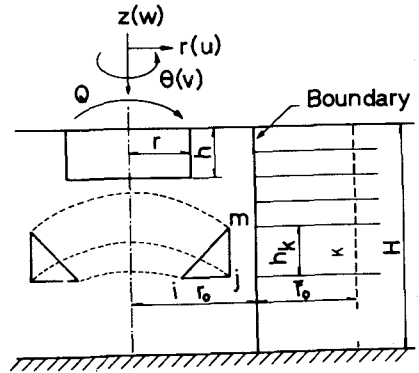


Fig. 1 Soil-Structure Interaction System by FEM

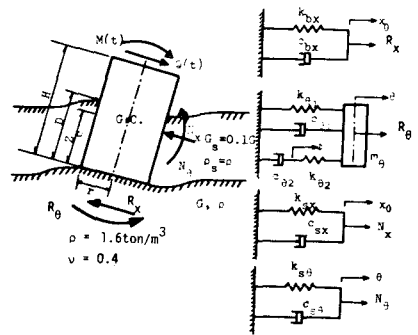


Fig. 2 Soil-Pier Foundation Model by Elastic Half Space

数, および各層厚などを用いて表わされる複素数のマトリックスである。ところで節点 j の変位は、固有ベクトルを用いて

$$\{U_j\} = [\bar{F}_n][Y_j]\{A\} = [\bar{w}_j]\{A\} \quad (6)$$

ただし $[Y_j]$: 各次モードの中で節点 j に対応する成分からなるマトリックス

したがって境界の全節点の変位ベクトル $\{U\}_B$ は式(6)より求められ $\{A\}$ が計算できる。 $\{A\}$ が求まると、式(5)より境界における節点力と節点変位の関係が得られる。

$$\{P\} = r_0[Z][Y]\{\bar{W}\}^{-1}\{U\}_B = [R]\{U\}_B \quad (7)$$

ただし $[\bar{W}]$ は節点 j に関する $[\bar{w}_j]$ を全節点において加算して求められるマトリックスである。このようにして得られる $[R]$ は動的剛性マトリックスと呼ばれるものであり、複素数で対称な大きさが $3L \times 3L$ のマトリックスであり振動数の関数となっている。

一方連統体としての地盤を有限領域に離散化して扱う場合、境界条件を速度に比例した形の応力で表わす方法が J. Lysmer³⁾ らにより提案されている。二次元時に表わされたこの境界条件を三次元領域においても同様の拡張を行なうことが可能であると考えられる。Fig. 1 で示したリング要素を用いると、側方境界での応力条件は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr}^u \\ \sigma_{rz}^u \\ \sigma_{r\theta}^u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} aP V_P & & \\ & bP V_S & \\ & & cP V_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_n \\ \dot{w}_n \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここに V_P, V_S はそれぞれP波およびS波の速度を表わす。また係数 a, b, c は表面波の卓越を考えると振動数の関数となる。したがって境界に関する減衰マトリックスは、境界面に沿って式(8)の積分を行なうことにより求められる。このようにして境界条件がそれぞれの形で求められると、FEMにより要素分割された領域での剛性マトリックスや減衰マトリックスに加算することにより基礎-地盤系の動的相互作用解析が可能となる。

下部構造 一般に基礎-地盤系を非軸対称外力を受ける三次元問題、あるいは平面ひずみ問題として表わすと次のような運動方程式が得られる。

$$[M]_b \{\ddot{x}\} + [C]_b \{\dot{x}\} + [K]_b \{x\} = \{F\}_b + \{F\}_g \quad (9)$$

$$\text{ただし } \{F\}_g = ([M]_b [K]_b^{-1} [K^b] - [M^b]_b) \{\ddot{z}_g(t)\}$$

有限境界における反力は、振動数に依存した形で表わされているので式(9)は振動数領域で解析する必要がある。ここで式(7)で表される有限境界の反力は複素数となるため、実数部は対応する要素に、また虚数部は地盤の粘弾性に基づく内部減衰も含めた上で $[C]_b$ の対応する要素にそれぞれ加算している。また式(8)で表される有限境界を用いると、 $[C]_b$ に対応する減衰マトリックスの形で加算される。 $\{F\}_g$ は上載加振を表わしており基礎からの入力がない場合の応答量からインピーダンス関数を求めることが出来る。また $\{F\}_b$ は基礎からの入力を表わしており $[K^b]_b$ は有限要素分割する領域の基礎に対応する剛性マトリックスを、 $[M^b]_b$ は同様に質量マトリックスを表わす。 $\{\ddot{z}_g(t)\}$ は基礎における地震入力を表わすベクトルである。

ところで基礎に作用する水平力、回転力をそれぞれ振動数領域で $\bar{Q}(\omega)$, $\bar{M}(\omega)$ と表わし、変位との関係をインピーダンス関数を用いて表わすと、Fig. 2 に表されるようになり

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}(\omega)/Gr^2 \\ \overline{M}(\omega)/Gr^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}(\omega) & K_{12}(\omega) \\ K_{21}(\omega) & K_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{x}_0(\omega)/r \\ \overline{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに G は地盤のせん断定数, r は基礎の半径を表わしている。インピーダンス関数は一般に

$$K_{lm} = k_{lm}(a_0) + i a_0 C_{lm}(a_0) \quad (11)$$

$$\text{ただし } i = \sqrt{-1}, \quad a_0 = \omega r / V_s, \quad l, m = 1, 2$$

上部構造 吊橋の橋部を梁要素を用いて分割し固数項の影響を除いて縮合された剛性マトリックスおよび質量マトリックスを作成する。減衰マトリックスは、上部構造のみでは古典モード分解で各モードのモードに減衰定数を仮定する。その結果、運動方程式は、

$$[M]_s \{\ddot{y}\}_s + [C]_s \{\dot{y}\}_s + [K]_s \{y\}_s = \{0\} \quad (12)$$

ここで $\{y\}_s$ は各節点での絶対変位ベクトルで、下部構造の剛体基礎部の変位で表わすと、

$$\{y\}_s = \{x\}_s + \{r\}\theta + \{1\}x_0 + \{1\}\ddot{z}_g \quad (13)$$

$\{x\}_s$ は各節点の剛体基礎頂面に対する相対変位ベクトル, $\{r\}$ はその重心から各節点までの高さベクトルを表わす。上部構造の底面に働く断面力 (弯矩要素 $M(\omega)$, せん断力 $Q(\omega)$) はそれより上部にかかる慣性力とつり合うからサブストラクチャ法により全体系の運動方程式が得られる。

全体系構造 基礎を固定した場合の上部構造物に関するモーダルマトリックス $[E]$ の中で応答に及ぼす影響の大きいモードのみを用いて自由度の低減を行なう。ところで式(10)で表わされるインピーダンス関数を用いると、全体系の運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} [I] & \{L_1\} \{L_2\} \\ \{L_1\}^T & m_x L_3 \\ \{L_2\}^T & L_3 J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\}_s \\ \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [2B\omega] & [0] \\ [0] & Gr^2 C_{11} & Gr^2 C_{12} \\ [0] & Gr^2 C_{21} & Gr^2 C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\}_s \\ \dot{x}_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [W] & & \\ & Grk_{11} & Grk_{12} \\ & Grk_{21} & Grk_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\overline{y}\}_s \\ \overline{x}_0 \\ \overline{\theta} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{L_1\} \\ m_x \\ L_3 \end{Bmatrix} \ddot{z}_g \quad (14)$$

$$\text{ただし } \{L_1\} = [E]^T [M]_s \{1\}, \quad \{L_2\} = [E]^T [M]_s \{r\}, \quad \{x\}_s = [E] \{y\}_s \\ L_3 = \{r\}^T [M]_s \{1\}, \quad m_x = m_0 + \{1\}^T [M]_s \{1\}, \quad I_0 = I_0 + \{r\}^T [M]_s \{r\}, \quad G' = G/V_s$$

ここに $\{\overline{y}\}_s$, $\overline{x}_0$, $\overline{\theta}$, $\ddot{z}_g$ はすべて振動数領域に変換されていることを表わしている。したがって式(14)は各振動数に関して解くことになる。そして各振動数に関して解かれた応答のフーリエ逆変換を行えば、時間領域での応答が得られることになる。このような系の逆変換にはFFTの応用が効果的である。FFTを利用した応答計算法を自由度を低減した系の応答と結びつけると、振動数領域での解析を非常に効果的に実行することが可能である。

3. 解析結果と考察

有限境界の影響 剛な基礎にある一層地盤および二層地盤に根入れのある基礎について解析を行ないインピーダンス関数を計算し有限境界の影響を調べる。二層地盤モデルでは、上層と下層の地盤の剛性が異なるものとする。Fig. 3 は有限境界として三次元領域に拡張した粘性境界と動的剛性マトリックスによる伝達境界を用いた場合に基礎の回転に関して求めたインピーダンス関数を示したものである。半無限弾性地盤に対する解は、M. Novak¹⁾らにより近似的に求められたものである。

これらの有限境界を用いて求められるインピーダンス関数は比較的類似した結果を与えているが、半無限弾性地盤に関する近似解との間には若干の相違が見られる。すなわち $k_2(a_0)$ に関しては伝達境界を用いると、地盤の一次の鉛直固有振動数付近で若干の低下を示すが、粘性境界を用いた場合は滑らかな減少を示している。一方 $c_2(a_0)$ に関しては伝達境界と粘性境界に基づく結果は比較的一致した値を示している。また半無限弾性地盤に対する近似解から得られた結果と比較すると $k_2(a_0)$ は地盤の一次の鉛直振動数付近で大きく減少している。さらに半無限弾性地盤に対する近似解に比べて有限境界を設定し FEM で解析すると、内部減衰の効果は大きく評価されている。さらに有限境界を設定しインピーダンス関数を求めると、地盤振動の影響が含まれていることが明らかとなる。

基礎の深さの影響 一層地盤に関して剛な基礎の存在する深さ H がインピーダンス関数に及ぼす影響を調べると Fig. 4 が得られる。基礎の根入れ比 h/r が 1、内部減衰 β が 10% として基礎深さと基礎の半径比 H/r が 2, 3, 4 の各場合についてロッキング振動に対する結果を示したものである。一般に $c_2(a_0)$ の形は内部減衰のため a_0 に逆比例した形の変化を示している。しかしながら地盤の固有振動数に相当する振動数を越えると $c_2(a_0)$ は一定あるいは漸増した値を示し始める。このことは地盤の固有振動数以下では波動の遠散による減衰効果は起らないことを表わしている。半無限弾性地盤に関する解と比較すると、基礎が有限深さにある一層地盤では、遠散減衰に変化が見られる。このため $k_2(a_0)$ も振動数の増加にしたがって変動する。また基礎が深くなるにつれて $k_2(a_0)$ は全体的に低振動数側にすれている。これは地盤の固有振動数の低下と関係がある。

内部減衰の影響 地震時のように地盤に大きなひずみが生じる場合、地盤の内部減衰が相当大きくなるものと考えられる。ここでは内部減衰がそれぞれ 5%, 10%, 20% となる場合について解析した。Fig. 5 は根入れ比 h/r が 1、地盤の剛比 G_{ss} が 0.2 となる二層地盤に関して内部減衰がインピーダンス関数に及ぼす影響を示したものである。ロッキング振動が卓越する地盤の二次の水平振動数付近で内部減衰のた

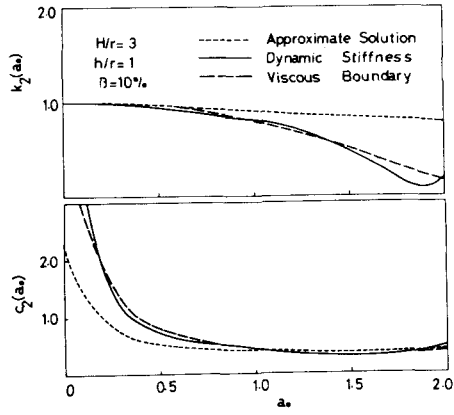


Fig. 3 Influence of Finite Boundary on Impedance Function

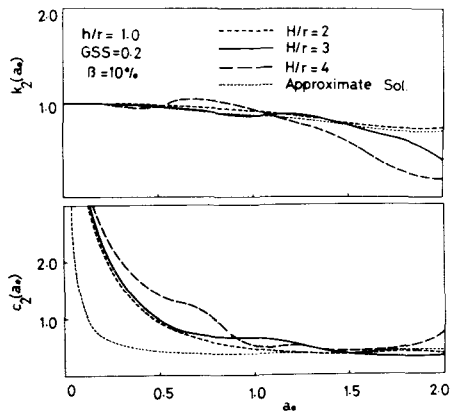


Fig. 4 Influence of Depth to Radius Ratio on Impedance Function

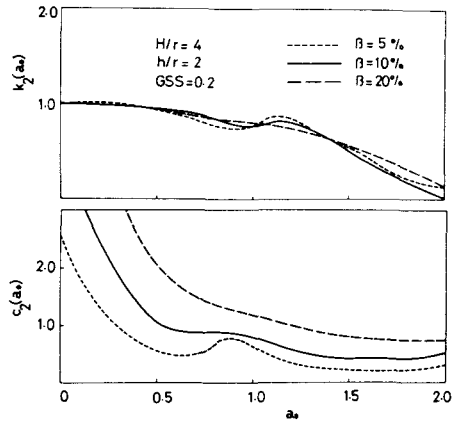


Fig. 5 Influence of Internal Damping on Impedance Function

きさにかかわらず $k_2(\omega)$ は小さな振動を示している。一方 $C_2(\omega)$ は内部減衰が小さい時、表面波の卓越による遠散減衰の増加は、地盤の一次の鉛直振動数付近に表われている。このように有限な深さの地盤を扱う場合、インピーダンス関数に及ぼす内部減衰の影響は大きいことがわかる。

基盤入力の影響 一般にインピーダンス関数は基礎構造に関する上載加振に対して求められる。一方基盤から入射する地震波を対象とした場合、地盤振動の影響を見るため FEM により基礎-地盤系を平面ひずみ問題として解析すると Fig. 6 が得られる。有限境界としては粘性境界を用いており、インピーダンス比は 1.0 としている。また基礎の下層地盤のせん断破壊速度 V_s は 400 m/s、上層と下層のせん断定数の比は 0.1 を用いている。基礎構造物の上載加振と基盤入力で応答が異なっている。これは基礎-地盤系の振動が構造物系振動と地盤系振動に分かれることを示している。半無限弾性体理論から得られるインピーダンス関数は地盤振動の影響が含まれない。しかしながら基盤上にある表層地盤のため基礎地盤系の解析では、表層地盤による固有振動時の応答の卓越が問題となる。FEM による解析では、インピーダンス関数にこの影響は含まれるが、構造物系の振動とは別に地盤系としての振動が存在したことになる。このため基礎構造物の上載加振より求められるインピーダンス関数を用いて上部構造物を含む全体系の解析を行なう場合、地盤系振動の影響を考慮する必要があることがわかる。

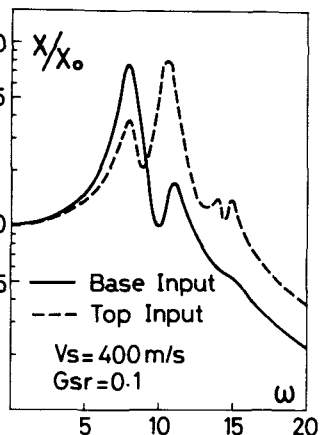


Fig. 6 Frequency Response of Soil Pier Foundation by FEM

塔-基礎系の応答 吊橋塔-基礎系の応答解析を行なうため高

さ 60 m のケーソン基礎に関するインピーダンス関数を求めると、その一例として Fig. 7 が得られる。半無限弾性地盤における $k_2(\omega)$ の値は、FEM によるものより大きく、いずれの場合も ω_0 の増加にともない減少する傾向にある。一方 $C_2(\omega)$ は内部減衰のため ω_0 の増加にともない逆比例的に減少する。

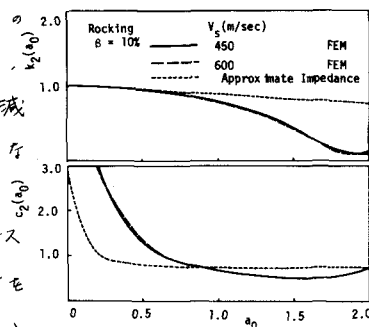


Fig. 7 Impedance Function of Soil-Pier Foundation

FEM および半無限弾性体地盤に関して得られるインピーダンス関数を用いてサブ・ストラクチャ法により吊橋の塔-基礎系の応答解析を行なうと Fig. 8 が得られる。塔の高さは 160 m、基礎の高さは 60 m、入力は EL-CENTRO NS (1940) の最大加速度を 200 gal として解析している。

Fig. 8 (a) は基礎の根入れが 60 m、基礎の下部地盤と側方地盤のせん断定数の比が 0.2 である場合、それぞれのインピーダンス関数による応答を基礎の下方地盤のせん断破壊速度を 450 m/s と 600 m/s について求めたものである。これらのインピーダンス関数モデルによる相違が応答に及ぼす影響は少ない。しかしながら、地盤の固有振動数、構造全体系の固有振動数、入力波動の卓越振動数などの条件により応答に及ぼす影響も異なるものと考えられる。Fig. 8 (b) は地盤の内部減衰が構造物の応答に及ぼす影響について調べたものである。基礎地盤のせん断破壊速度を 450 m/s、側方地盤とのせん断定数の比を 0.05 とした場合、内部減衰が構造物の応答に及ぼす影響は大きいことがわかる。この内部減衰の影

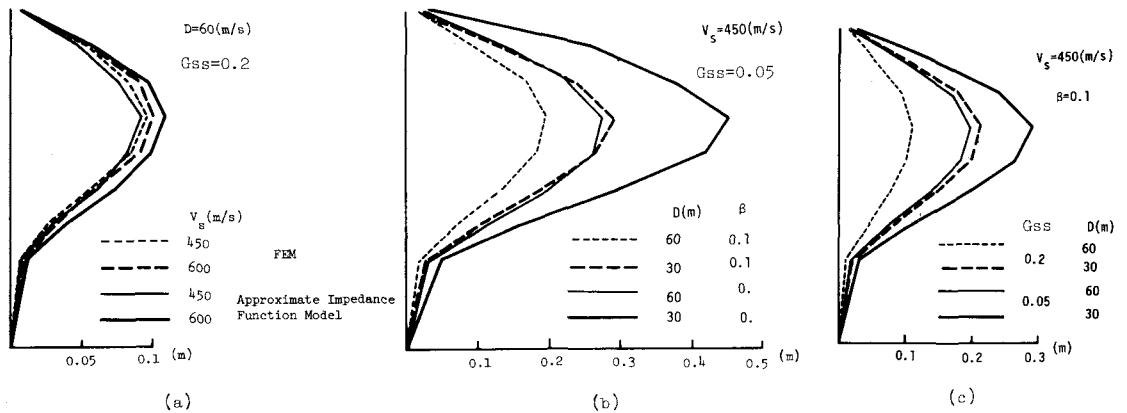


Fig. 8 Response of Tower-Pier System

響は基礎の根入れの変化に関しても大きく、その評価は遠散減衰と同様、塔-基礎系の応答解析では重要なものであると考えられる。Fig. 8 (c) は基礎地盤のせん断波速度が450 m/s、内部減衰が10%、上層地盤とのせん断定数の比がそれぞれ0.2, 0.05の場合、基礎の根入れ深さが応答に及ぼす影響を調べたものである。根入れ深さが全体系の応答に及ぼす影響は大きく、この事は上層地盤の剛性が低くなっても同様に変わらない。また同じ根入れを有する場合でも上層地盤の剛性が低下すると全体系の応答は大きくなり、表層地盤が塔部の応答に及ぼす影響は内部減衰と同様に、著しいものがあることがわかる。

4. 結言

基礎-地盤系のインピーダンス関数の評価を行ない、それを用いてサブストラクチャー法による吊橋塔-基礎系の応答解析を行った。その結果を要約すると次のようになる。

- (1) 基礎を有する基礎-地盤系に関して有限境界を設定しFEMにより求めたインピーダンス関数と半無限弾性地盤の仮定に基づいて得られた近似解との間には相違が見られる。応答解析においては地盤の固有振動数における剛性の減少と遠散減衰の増加が見られるため注意を要する。
- (2) 基礎の深さ、内部減衰の大きさ、基礎の根入れなどによりインピーダンス関数は大きな影響を受ける。そしてこれらの要因が吊橋塔-基礎系の応答に及ぼす影響は著しいものがある。
- (3) インピーダンス関数を用いた塔-基礎系の応答解析において地盤振動と構造物系の振動が分離する場合は地盤による地震入力の増中を加味することにより地盤振動をとり入れた解析が近似的に可能である。
- (4) 非減衰時のモーダル・マトリクスによる自由度の低減を行なった後、FFTを利用した応答解析法は振動数領域だけでなく時間領域においても非常に効果的であると言える。

参考文献

- 1) Beredugo, Y. and Novak, M., Cana. Geotech. J., Vol.9, pp 477-497, 1972
- 2) Kausel, E. and Roesset, J. M. and Waas, G., Proc. of ASCE, Vol.101, EM5, pp 679-693, 1975
- 3) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L., Proc. of ASCE, Vol. 95, EM4, pp 859-877, 1969
- 4) Yamada, Y. and Takemiya, H. and Kawano, K., 6th WCEE, Vol.3, pp 297-302, New Delhi, 1977

DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS

OF TOWER-PIER SYSTEMS OF LONG SUSPENSION BRIDGES

*

The following conclusions may be drawn from the present numerical examples; Impedance function determined by FEM based on a finite boundary and based on an elastic half space are different because of vibrations of soil layers and depth of ground. In dynamic response analysis with use of substructure method, it should be important because of decreasing stiffness and increasing dissipative damping at the natural frequency of the soil. It is shown that impedance functions are affected by the depth of soil layer, internal damping and the embedded foundation. Thus, dynamic response of tower-pier system are distinctly different due to these important factors. The earthquake response analysis of dynamic soil structure interaction is feasible due to the FFT (Fast Fourier Transform) because of the dependence on the frequency domain of impedance functions. It is found that the response analysis with FFT can be simplified if the freedom of equations of motions is reduced by classical normal mode. If the vibration modes are clearly uncoupled between soil layer and structural system, dynamic response of substructure method can be obtained by modifying the input so as to reflect vibration of soil layer.

** Assistant, Department of Civil Engineering, Kyoto University