

(12) 任意母線縁境界をもつ円筒網目シェル屋根の全体座屈

— 等方性網目の場合 —

都立大大学院 新川 牧

§-1 序

Y型、円筒断面等をもつ単一材を使用して建設される単層剛接合網目シェル屋根は面外曲げ剛性が非常に小さく、従ってその全体座屈に対する安全性を検討する必要がある。しかし、円筒網目シェル屋根の全体座屈に関しては、まだ解明されていない点が多い様である。三角形網目状母線方向部材と斜材により構成された円筒網目シェル屋根の全体座屈性状は次の四項目、(1). 網目の組み方、(2). シェル形状、(3). 周辺支持条件（特に母線縁支持条件）、(4). 荷重分布の影響と特に強く受けると思われる。本研究は、これらの諸点が全体座屈性状に及ぼす影響を連続体置換の立場に基づき理論的に解明することを目的とする。本報告では、網目が等方性の場合について、円筒なシェル形状、周辺が妻側縁辺で単純支持、母線縁辺でピン、単純支持、自由、荷重は一樣升圧のもとでの所謂「完全系」の対称座屈あるいは中央母線に関する非対称な座屈性状を幾何学的非線形解析により数値解析的に解明し、さらに、母線縁単純支持の場合について、円弧方向に非対称な荷重分布あるいは座屈後形状に比例する初期曲面不整を考慮し、「不完全系」の座屈性状についても検討を行う。

§-2 非線形基礎式

1. 解析仮定

解析の対象となる円筒網目シェル屋根をFig. 1-aに示し、次の仮定のもとに非線形基礎式を導く。(1) 円筒曲面上を覆う網目形状の展開平面はFig. 1-bに示す。且つ一単位の網目パネルは構造全体のそれに比し極めて小さいとする。

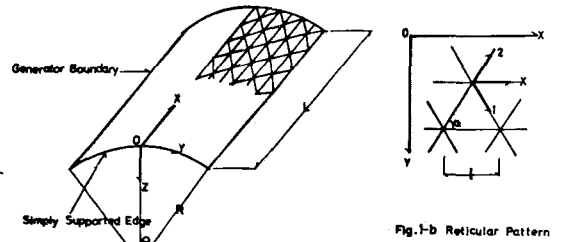


Fig. 1-a Geometry

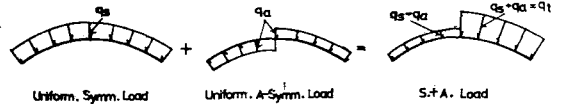


Fig. 1-c Load Distribution For Circumferential Direction

(2) 斜材、母線方向部材はそれぞれ一定断面材とし、さらに(1)の仮定より連続化して扱う。(3) 部材の歪エネルギーは軸歪エネルギー及円筒曲面接平面内にある軸に関する曲げ歪エネルギーについて評価し、他の歪エネルギーは無視する。(4) 軸歪は法線方向変位： w の関数に関してのみ2次の非線形項を採用する。曲げ歪は初等理論が成立する。(5) 部材の歪と応力の間にはHooke's Lawが成立する。(6) 荷重は法線方向に作用し、その分布は母線方向に一樣、円弧方向は非対称性を考慮してFig. 1-cに示す如きとする。(7) 初期曲面不整は法線方向にのみ考慮し、その量を、非線形解析より得られる変形と比較倍で表す。

2. 基礎式の誘導

a. 歪-変位式

母線方向と一定角度： α を成す部材即ち斜材1の軸歪度： ε_1 はFig. 2を参照して式(1)で与えられる。 $\varepsilon_1 = \frac{dD_1}{ds_1} - \frac{w}{R_1} + \frac{dz_0}{ds_1} \frac{dw}{ds_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds_1} \right)^2 - t_1 \frac{d^2 w}{ds_1^2}$ (1), 二に、 D_1 : 斜材1の軸方向変位、 R_1 : 斜材1の曲率半径 ($= \frac{R}{\sin \alpha}$)、 w : 法線方向変位、 z_0 : 初期曲面不整量、 ds_1 : 斜材1の軸方向線素、 t_1 : 中立軸からの仮根距離、仮定(7)より $z_0 = c w$ (c :一定)、さらに

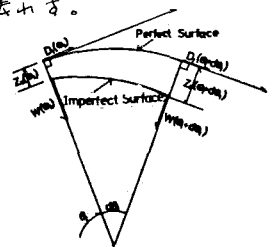


Fig. 2 Geometrical Imperfection

$D_1 = U \cos \alpha + V \sin \alpha$, $\frac{d}{ds_1} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ を用いて, E_1 を x - y 座標系にて表すと式(2)を得る。

$$E_1 = \cos^2 \alpha \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+2c) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\} + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + (1+2c) \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right\} + \sin^2 \alpha \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{W}{R} + \frac{1}{2}(1+2c) \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$-t_1 \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (2), \quad \text{二に } U, V \text{ は母線, 円弧方向変位である。}$$

斜材 2, 母線方向部材の E_2, E_3 は式(2)にて, $\alpha \rightarrow -\alpha$, 0 を代入して得られる。

6. 基礎式 荷重は法線方向に作用すると仮定式(2)を用いて, 系の Total Potential Energy を組み立てその停留条件より U, V, W の変位表示による釣合式を得, さらに応力関数: φ を導入し, U, V を消去し, 無次元化を施して次の非線形基礎式(3)を得る。

$$\text{適合条件式: } F'''' + \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) \beta^2 F'' + \left(\cot^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \beta^4 F'' = -\mu_n \beta^2 W'' + \beta^2 (1+2c) (W'^2 - W'' W''') \quad (3.a)$$

$$\text{法線方向釣合式: } \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W'''' + 6 \cot^2 \alpha \beta^2 W'' + \left(\cot^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \beta^4 W'' \right\} = \mu_n \beta^2 F'' + \lambda_n (Y) + \beta^2 (1+c) (W' F' + W'' W'' - 2 W' W''') \quad (3.b)$$

二に, $W = \frac{W}{t_n}$, $F = \frac{\varphi}{E_n t_n^3}$, $\mu_n = \frac{B^2}{R t_n}$, $\beta = \frac{B}{L}$, $B = 2 R \cos \alpha$, $t_n = \sqrt{\frac{32}{3}} \cdot i \sin \alpha$, i : 斜材の断面二次半径,

$$E_n = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{8} \cdot \frac{A}{i \sin^2 \alpha} E, \quad i = \frac{A_x}{2A}, \quad S = \frac{I_x}{2I}, \quad (A, A_x), (E, I_x): \text{斜材, 母線方向部材の単位幅当りの断面}$$

積, 断面二次モーメント, E : 部材のヤング係数, $\lambda_n(Y) = \lambda_n + \lambda_n G(Y)$, $\lambda_n = \frac{8s}{E_n} \left(\frac{B}{t_n} \right)^4$, $\lambda_n = \frac{8a}{E_n} \left(\frac{B}{t_n} \right)^4$,
 $G(Y) = \begin{cases} 1 & Y \geq 0 \\ -1 & Y \leq 0 \end{cases}, \quad \bullet = \frac{\partial}{\partial Y}, \quad Y = \frac{y}{B}, \quad l = \frac{\partial}{\partial X}, \quad X = \frac{x}{L}$

C 境界条件式 各方向部材の断面力, 変位は F, W によって式(4)で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{E_n t_n^3}{2B^2} \left(\frac{B^2}{\sin^2 \alpha} F'' + \frac{B}{\cos \alpha \sin \alpha} F' \right), \quad N_2 = \frac{E_n t_n^3}{B^2} (-\cot^2 \alpha \beta^2 F'' + F'), \quad M_1 = \frac{\partial E_n t_n^3}{64 B^2 \sin^2 \alpha} (\beta^2 \cos^2 \alpha W'' + \beta \sin^2 \alpha W' + \sin^2 \alpha W''') \\ M_2 &= \frac{3 E_n t_n^3}{32 B^2 \sin^2 \alpha} \cdot \beta^2 W'', \quad U' = \frac{t_n^2}{B^2} (F'' - \cot^2 \alpha \beta^2 F'' - \frac{1}{2} \beta^2 (1+2c) W'^2), \quad V' = \frac{t_n^2}{B^2} \left\{ (\cot^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}) \beta^2 F' - \cot^2 \alpha F' + \mu_n W - \frac{1}{2} (1+2c) W'^2 \right\} \\ U' + \beta^2 V' &= -\frac{t_n^2}{B^2} \beta^2 \left\{ \frac{Y}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} F' + (1+2c) W' W'' \right\}, \quad \text{但し, } N, M: \text{単位幅当りの軸力, 曲げモーメント, } U = \frac{u}{L}, V = \frac{v}{B} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

境界条件式は各部材の境界辺に作用する断面力を考慮して導く。まず, 垂側縁辺で単純支持の場合は $W = (M_1 + M_2) \cos^2 \alpha + M_2 = (N_1 + N_2) \cos^2 \alpha + N_2 = V = 0$: at $X = 0, 1$ であるから式(4)より $W = W'' = F'' = F' = 0$, at $X = 0, 1$ (5)となる。母線縁辺境界条件式 (at $Y = \pm \frac{1}{2}$) はピン, 単純支持, 自由についてそれぞれ

(6.a, b, c) で表す。ピンの場合は $W = (M_1 + M_2) \sin^2 \alpha = U = V = 0$ であるから式(4)より, $W = W'' = F'' - \cot^2 \alpha \beta^2 F'' = \int_0^{\pm \frac{1}{2}} \left\{ (\cot^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}) \beta^2 F'' - \cot^2 \alpha F'' + \mu_n W - \frac{1}{2} (1+c) W'^2 \right\} dY = \int_0^X \left[\int_{\pm \frac{1}{2}}^t \left\{ F'' - \cot^2 \alpha \beta^2 F'' - \frac{1}{2} (1+c) \beta^2 (W'^2) \right\} \right. \\ \left. \Big|_{Y=0} dX + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} F' \Big|_{Y=0} + (1+2c) W' W'' \Big|_{Y=0} \right] dt$ (6.a) となる。尚, 式(6.a)の4式は中央円弧に關

する対称性を考慮して導いた。単純支持の場合は, $W = (M_1 + M_2) \sin^2 \alpha = U = (N_1 + N_2) \sin^2 \alpha = 0$ であるから結局, $W = W'' = F'' = F' = 0$ (6.b) となる。自由縁辺の場合は, $(M_1 + M_2) \sin^2 \alpha = 2 \frac{\partial (M_1 + M_2)}{\partial X} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{\partial (M_1 + M_2)}{\partial Y} \sin^2 \alpha = N_1 = N_2 = 0$ より, $W'' + \cot^2 \alpha \beta^2 W'' = W'' + 5 \cot^2 \alpha \beta^2 W'' = F'' = F' = 0$ (6.c) となる。

8-3 近似解法

垂側縁辺で単純支持 (式(5)), 母線縁辺で種々の支持条件 (式(6)) の間接境界条件式のもと, 非線形基礎式(3)の近似解法を以下に述べる。

1. 円弧方向連立非線形常微分方程式 垂側縁辺で単純支持条件(5)を満足し, 且つ中央円弧に關する対称性を考慮して, W, F を式(7)で与える。

$$W = \sum_m f_m(y) \sin m\pi x = \sum_m \{ f_{ms}(y) + f_{ma}(y) \} \sin m\pi x, \quad F = \sum_m g_m(y) \sin m\pi x = \sum_m \{ g_{ms}(y) + g_{ma}(y) \} \sin m\pi x \quad (7)$$

二に, $m = 1, 3, 5, \dots$, $f_m(y), g_m(y)$ は円弧方向の未知変位, 応力関数で定まる β, α は各々中央母線に關し対称, 逆対称を意味する。式(7)を式(3)に代入し, Kantorovich 法を適用し, X について 0 から 1 迄の範囲で積分し, さらに中央母線に關し対称, 逆対称成分に分離すると式(8), (9)を得る。

$$\text{対称成分: } \Delta_{1m} g_{ms} = \mu_n \beta^2 m^2 \int_{-1/2}^{1/2} f_{ms} + 2 \beta^2 \pi^2 (1+2c) \sum_p \left\{ i j (f_{is} f_{js} + f_{ia} f_{ja}) P_{ijm} + i^2 (f_{is} f_{js} + f_{ia} f_{ja}) Q_{ijm} \right\} = \Phi_{ms}(y) \quad (8)$$

$$\Delta_{2m} f_{ms} = -\mu_n \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ms} + \frac{4}{m\pi} \lambda \beta - 2\beta^2 \pi^2 (1+C) \pi^2 \sum_f \sum_j \left[\{i^2 (f_{is} g_{js} + f_{ia} g_{ja}) + j^2 (f_{is} g_{js} + f_{ia} g_{ja})\} g_{ijm} + 2ij (f_{is} g_{js} + f_{ia} g_{ja}) p_{ijm} \right] = \Phi_{ms}(y) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{対称成分: } \Delta_{im} g_{ma} &= \mu_n \beta^2 m^2 \pi^2 f_{ma} + 2\beta^2 \pi^2 (1+C) \sum_f \sum_j \{2ij f_{is} f_{ja} p_{ijm} + (i^2 f_{is} f_{ja} + j^2 f_{is} f_{ja}) g_{ijm}\} = \Phi_{ma}(y) \\ \Delta_{2m} f_{ma} &= -\mu_n \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ma} + \frac{4}{m\pi} \lambda \alpha G(y) - 2\beta^2 \pi^2 (1+C) \sum_f \sum_j \{i^2 (f_{is} g_{ja} + f_{ia} g_{js}) + j^2 (f_{is} g_{ja} + f_{ia} g_{js})\} g_{ijm} \\ &\quad + 2ij (f_{is} g_{ja} + f_{ia} g_{js}) p_{ijm} = \Phi_{ma}(y) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \dots = m, i, j = 1, 3, 5, \dots, \Delta_{im} = \dots - \beta^2 m^2 \pi^2 \left(\frac{Y}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) + \beta^2 m^4 \pi^4 \left(\cot^2 \alpha + \frac{Y}{\sin^2 \alpha} \right) \\ \Delta_{2m} &= \frac{3}{32} \{ \dots - 6 \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 + \beta^2 m^4 \pi^4 \left(\cot^2 \alpha + \frac{Y}{\sin^2 \alpha} \right) \}, p_{ijm} = \int_0^1 \cos i\pi x \cos j\pi x \sin m\pi x dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{m+i+j} + \frac{1}{m-i-j} + \frac{1}{m+i-j} + \frac{1}{m-i+j} \right) \\ g_{ijm} &= \int_0^1 \sin i\pi x \sin j\pi x \sin m\pi x dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{m+i+j} - \frac{1}{m-i-j} + \frac{1}{m+i-j} + \frac{1}{m-i+j} \right) \end{aligned}$$

又、母線境界条件式モ \$Y\$ の関数で表わすことが出来、例えば \$B \ge a\$ の場合を示すと、式(8),(9)より

$$\begin{aligned} \text{対称成分: } f_{ms} &= f_{ms}'' = g_{ms}'' + \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ms} = - \left(\cot^2 \alpha + \frac{Y}{\sin^2 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} g_{ms} dy - \cot^2 \alpha g_{ms}(\frac{1}{2}) \\ &\quad + \mu_n \int_0^{\frac{1}{2}} f_{ms} dy - (1+2C) \sum_f \sum_j g_{ijm} \int_0^{\frac{1}{2}} (f_{is} f_{js} + f_{ia} f_{ja}) dy = 0 \\ \text{対称成分: } f_{ma} &= f_{ma}'' = g_{ma}'' + \cot^2 \alpha \beta^2 m^2 \pi^2 g_{ma} = - \left(\cot^2 \alpha + \frac{Y}{\sin^2 \alpha} \right) \beta^2 m^2 \pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} g_{ma} dy - \cot^2 \alpha g_{ma}(\frac{1}{2}) - 2 g_{ma}(\omega) \\ &\quad + \mu_n \int_0^{\frac{1}{2}} f_{ma} dy - 2(1+2C) \sum_f \sum_j g_{ijm} \int_0^{\frac{1}{2}} f_{ia} f_{js} dy + \frac{1}{\beta^2 m^2 \pi^2} g_{ma}''(\omega) - \frac{Y}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} g_{ma}(\omega) \\ &\quad - \frac{2}{m^2} (1+2C) \sum_f \sum_j ij p_{ijm} f_{ia}(\omega) f_{js}(\omega) - \frac{2}{m} (1+2C) \sum_f \sum_j j p_{ijm} f_{ia}(\omega) f_{js}(\omega) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

尚、式(10)の4式は非線形項を母線方向にFourier級数で展開してゐる。結局 \$F, W\$ に関する非線形偏微分方程式(8)は、\$f_m(y), g_m(y)\$ に関する連立非線形常微分方程式に変換されることになる。

2. 連立非線形連立常微分方程式の近似解法 上 \$F\$ に示す方法によつて式(8),(9)を任意境界条件 \$\alpha\$ もとて解く。式(8),(9)は \$f_{is}, g_{is}, f_{ia}, g_{ja} (i=1, 3, 5, \dots)\$ に関する連立非線形方程式であるが、今式(8),(9)の右辺を各々 \$\Phi_{ms}(y), \Phi_{ms}(y), \Phi_{ma}(y), \Phi_{ma}(y)\$ として恰も強制項の如く扱うとすれば、式(8),(9)は母線方向展開が数毎の各々独立した \$g_{ms}, f_{ms}, g_{ma}, f_{ma}\$ に関する四階の線形常微分方程式と見做すことが出来る。とすれば、解を各々について余解: \$h\$, 特解: \$p\$ の形で表わすことが出来る。即ち、

$$g_{ms} = g_{msh} + g_{msp}, f_{ms} = f_{msh} + f_{msp}, g_{ma} = g_{mah} + g_{map}, f_{ma} = f_{mah} + f_{map} \quad (11)$$

ア. 余解表示 \$\Delta_{im}(g_{msh}, g_{mah}) = 0, \Delta_{2m}(f_{msh}, f_{mah}) = 0\$ の特性根の性質は組目 \$1 \le \gamma < \alpha\$, \$\gamma, S\$ に依つて変化し、従つて余関数の形も変化する。 \$\therefore\$ 以下 \$8 \cos^4 \alpha > Y, S\$ の場合について余関数形を示す。 \$g_{msh} = C_{1ms} \sin \lambda_{2m} y \sinh \lambda_{1m} y + C_{2m} \cos \lambda_{2m} y \cosh \lambda_{1m} y, g_{mah} = C_{1ma} \cos \lambda_{2m} y \sinh \lambda_{1m} y + C_{2ma} \sin \lambda_{2m} y \cdot \cosh \lambda_{1m} y, f_{msh} = \sum_p D_{pms} \cosh \xi_{pm} y, f_{mah} = \sum_p D_{pma} \sinh \xi_{pm} y \quad (12), \therefore C_{pms}, C_{pma}, D_{pms}, D_{pma}\$ は未定定数, \$P=1, 2, \lambda_{2m}^{im} = \frac{\beta m \pi}{2 \sin \alpha} \sqrt{2 \cos^4 \alpha + Y \pm (2 \cos^2 \alpha - \frac{Y}{\cos^2 \alpha})}, \xi_{2m}^{im} = \frac{\beta m \pi}{\sin \alpha} \sqrt{3 \cos^2 \alpha \pm \sqrt{8 \cos^2 \alpha - 5}}, sh \equiv \sinh, ch \equiv \cosh\$

イ. 特解表示 領域 \$|y| \le \frac{1}{2}\$ にて特解 \$g_{msp}, f_{msp} \in\$ Fourier Cosine 級数で、又 \$g_{map}, f_{map} \in\$ Fourier Sine 級数で展開できるものとする。即ち、 \$g_{msp} = \sum_{k_2} P_{k_2m} \cos k_2 \pi y, f_{msp} = \sum_{k_2} T_{k_2m} \cos k_2 \pi y, g_{map} = \sum_{k_a} P_{k_2m} \sin k_a \pi y, f_{map} = \sum_{k_a} T_{k_2m} \sin k_a \pi y \quad (13) \therefore k_2 = 0, 2, 4, 6, \dots, k_a = 2, 4, 6, \dots\$ 同様に \$\Phi_{ms}, \Phi_{ma}, \Phi_{ma}, \Phi_{ma}\$ も Fourier 級数展開可能とすると、 \$\Phi_{ms} = \sum_{k_2} P_{k_2m} \cos k_2 \pi y, \Phi_{ms} = \sum_{k_2} E_{k_2m} \cos k_2 \pi y, \Phi_{ma} = \sum_{k_a} P_{k_2m} \sin k_a \pi y, \Phi_{ma} = \sum_{k_a} E_{k_2m} \sin k_a \pi y \quad (14) P_{k_2m}, E_{k_2m}, P_{k_2m}, E_{k_2m}\$ 式(15)より求まる。

$$(P_{k_2m}, E_{k_2m}) = \begin{cases} 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (\Phi_{ms}, \Phi_{ma}) \cos k_2 \pi y dy : k_2 \ge 2 \\ 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\Phi_{ms}, \Phi_{ma}) dy : k_2 = 0 \end{cases} \quad (P_{k_2m}, E_{k_2m}) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (\Phi_{ma}, \Phi_{ma}) \sin k_a \pi y dy \quad (15)$$

尚、式(15)の右辺の積分は数値計算に依つて解析的に求めることが出来る。式(13),(14)を式(8),(9)に代入し、係数比較を行つと、 \$P_{k_2m} \pi^4 \{ k_2^4 + k_2^2 m^2 \beta^2 \left(\frac{Y}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \cot^2 \alpha \right) + m^4 \beta^2 \left(\cot^2 \alpha + \frac{Y}{\sin^2 \alpha} \right) \} = P_{k_2m},\$

$$t_{k\pi m} \frac{3}{32} \pi^2 \left\{ k_s^2 + k_s^2 m^2 \beta^2 \cot^2 \alpha + m^2 \beta^2 \left(\cot^2 \alpha + \frac{5}{\sin^2 \alpha} \right) \right\} = \varepsilon_{k\pi m}, \quad \delta_{k\pi m} \pi^2 \left\{ k_a^2 + k_a^2 m^2 \beta^2 \left(\frac{5}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \cot^2 \alpha \right) + m^2 \beta^2 \alpha \left(\cot^2 \alpha + \frac{5}{\sin^2 \alpha} \right) \right\} = \varepsilon_{k\pi m} \quad (16) \text{を得る。}$$

C. 数値計算法 結局、母線縁境界条件式(例えば式(40))及び特解式(46)は $D_{pms}, D_{pma}, C_{pms}, C_{pma}$ $t_{k\pi m}, t_{k\pi m}, \delta_{k\pi m}, \delta_{k\pi m}, \Lambda_s, \Lambda_a$ ($p=1, 2, m=1, 3, 5, \dots, k_s=0, 2, 4, \dots, k_a=2, 4, 6, \dots$)に関する連立代数方程式で表わすことができ、これを Newton-Raphson 法を適用し逐次解を求める。

3. 等方性細目の場合の解法 $\gamma = \delta = 0.5, \alpha = 60^\circ$ の場合、即ち右方向部材が同一で、且つ正三角形に組むと、基礎式(3)は等方性円筒殻の基礎式である Donnell 式(但し $\rho = \gamma \sin \alpha = \frac{1}{2}$)に一致し、つまり、等方性円筒細目細目シエル α 全体座屈問題は等方性円筒殻 α 座屈問題に等価であるといえる。 $\gamma = \delta = 0.5, \alpha = 60^\circ$ の場合、特性根は重根をもち、このとき用いる余関数形は前項2で述べた解法に従って式(12)と異なる α であるが、ここには以下の方眼により、等方性細目の場合でも式(12)の余関数形を用いても解析可能となるよう工夫する。微小定数: η とし、式(8), (9)を式(17), (18)に変形する。

$$D_{1m} g_{ms} = \Phi_{ms} + 2\beta^2 m^2 \pi^2 \eta g_{ms}, \quad \frac{3}{32} D_{2m} f_{ms} = \Phi_{ms} - \frac{3}{32} \beta^2 m^2 \pi^2 2\eta f_{ms} \quad (17)$$

$$D_{1m} g_{ma} = \Phi_{ma} + 2\beta^2 m^2 \pi^2 \eta g_{ma}, \quad \frac{3}{32} D_{2m} f_{ma} = \Phi_{ma} - \frac{3}{32} \beta^2 m^2 \pi^2 2\eta f_{ma} \quad (18)$$

すなわち、 $D_{1m} = \dots - 2\beta^2 m^2 \pi^2 (1-\eta)^{-1} + \beta^2 m^2 \pi^2$, $D_{2m} = \dots - 2\beta^2 m^2 \pi^2 (1+\eta)^{-1} + \beta^2 m^2 \pi^2$ 、従って、 $\eta > 0$ となる式(12)の余関数形が使えることになる。但し、式(12)に於いて $\lambda_{1m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta m \pi \sqrt{2-\eta}$, $\lambda_{2m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta m \pi \sqrt{\eta}$, $\delta_{2m} = \beta m \pi \sqrt{1+\eta \pm \sqrt{2\eta + \eta^2}}$ である。

§-4 数値解析結果

§-3で示した近似解法に基づいて、細目が等方性 ($\gamma = \delta = 0.5, \alpha = 60^\circ$)、曲形状パラメータ $\beta = 0.5 \sim 1.0$, $M_n = 100 \sim 300$ 、母線縁境界条件がピン、単純支持、自由の範囲内で完全系(一様外圧及び初期曲面不整合即ち $\Lambda_a = 0$ かつ $C = 0$)の座屈性状(対称座屈あるいは中央母線に関する逆対称分岐座屈)を数値解析的に解明し、さらに、母線縁に単純支持について、前述した荷重あるいは初期曲面不整合を考慮して非線形解析を行い、不完全系の座屈性状も検討する。尚、計算精度を確かめた上で、計算項数 m, k_s, k_a は母線縁境界条件がピン、単純支持のとき、 $m=2$ 項、 $k_s = k_a = 4$ 項、自由のとき $m=3, k_s = k_a = 5$ 項迄採用し、又微小定数: η は $\eta = 0.005$ として計算を行った。

1. 古典座屈値

偏平球殻に於ける座屈値の整理法に倣って、幾何学的非線形解析より得られる座屈値を一様外圧下に於ける閉(closed)円筒細目シエル α 座屈値、所謂「古典座屈値」との比率に表わす。 $\gamma = \delta = 0.5, \alpha = 60^\circ, C = 0$ のとき式(4)より得られる古典座屈式は巻側端部で単純支持とする式(49)で与えられる。

$$\Lambda_{cro} = \frac{\delta_{cro}(\beta)}{E_h \left(\frac{B}{t_n} \right)} = M_n^3 \left[\frac{1}{(\Theta n)^2 \left\{ \left(\frac{\Theta n}{\beta \pi} \right)^2 + 1 \right\}^2} + \frac{3}{32} \frac{1}{M_n^2} (\Theta n)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\beta \pi}{\Theta n} \right)^2 \right\}^2 \right] \Big|_{\min} \quad (49)$$

すなわち、 Λ_{cro} は無次元古典座屈値で式(49)の Θn (Θ : 半開角, n : 周方向波数)に関する最小値より求まる。Table 1 に示す様に式(49)を $\beta = 0.5 \sim 1.0, M_n = 100 \sim 300$ の範囲で Λ_{cro} を直接計算し、検討したところ式(49)は近似式(20)で表わされることとなる。

$$\log_{10} \Lambda_{cro} = \left\{ 1.4 + 10^2 \left(-2.24/\beta^2 + 9.8/\beta - 3.45 \right) \right\} \log_{10} M_n + (0.168/\beta^2 - 0.897/\beta + 0.879) \quad (20)$$

2. 完全系の座屈解析

$\Lambda_a = 0$ 且つ $C = 0$ の所謂完全系について対称座屈及中央母線に関する逆対称分岐座屈解析を $\beta = 1.2, 1.5, 0.5, M_n = 100 \sim 300 @ 25$ 、母線縁境界条件がピン、単純支持、自由のもとに行い、結果をまとめると次の様になる。

TABLE 1 Λ_{cro}

M_n	$\beta=1.0$		$\beta=1.5$		$\beta=0.5$	
	Eq.(19)	(20)	(19)	(20)	(19)	(20)
100	1072.	1073.	681.7	682.2	499.6	500.0
125	1476.	1479.	943.5	945.2	693.2	694.3
150	1919.	1923.	1231.	1234.	906.3	907.9
175	2397.	2401.	1543.	1545.	1137.	1139.
200	2909.	2910.	1877.	1878.	1385.	1386.
225	3451.	3448.	2231.	2231.	1648.	1648.
250	4023.	4013.	2605.	2602.	1926.	1925.
275	4622.	4604.	2997.	2991.	2217.	2214.
300	5248.	5219.	3407.	3397.	2522.	2517.

2. ピン支持の場合 Fig. 3 に母線縁ピン支持

の計算結果を示す。非線形解析より得られる座屈値を λ_{cr} で表すと、Fig. 3 より、 $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ は 1 よりも大きく、 $(\beta=1, 100 \leq M_n \leq 150)$ 、 $(\beta=1/1.5, 175 \leq M_n \leq 275)$ 、 $(\beta=0.5, 100 \leq M_n \leq 300)$ では初座屈が先行し、その座屈モードの半波形数 N は 3、又、 $(\beta=1, 175 \leq M_n \leq 275)$ では $N=4$ の分岐座屈が先行し、これらの各範囲に於いて各々 $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ は座数 R_1, R_2, R_3 を用いて近似的に $k_1 \frac{1}{M_n} + R_2 + R_3 M_n$ で表し得る。尚、Fig. 3-d に $\beta=1$ の場合の中央円弧の座屈モードを示す。これより $\beta=1, M_n=300$ のとき、分岐座屈点直後新しく $N=5$ の増分モード（図中央線に示す。）が生じており、シエル中央部の局部的座屈の可能性も充分考えられる。

3. 単純支持の場合

結果を Fig. 4 に示す。

$\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ は 1 よりも小さく、 $M_n \geq 150$ では β が小さくなるにつれ、増える傾向を示す。

$\beta=1, M_n \geq 225$ のとき初座屈 ($N=3$)、他の場合は分岐座屈 ($N=2$) が

先行する。 $(\beta=1, 100 \leq M_n \leq 200)$ 、 $(\beta=1/1.5, 150 \leq M_n \leq 300)$ の範囲では $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ (分岐座屈値) λ_{cr0} を $k_1 M_n + k_2$ で近似できる。 $\beta=0.5$ のとき、 $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ は $M_n=200$ で最大値 0.736、 $M_n=100$ のとき最小値 0.690 であるから、 $100 \leq M_n \leq 300$ ではほとんど変化しない。 $\beta=1$ のとき分岐座屈点前にて変位が急増する部分が存在し、その後、 λ_{cr0} -Wav (平均変位) は近似的に直線関係を保ち、分岐点は二の直線上で発生する。

4. 自由境界の場合

結果を Fig. 5 に示す。

$\lambda_{cr}/\lambda_{cr0} = M_n, \beta$ 及び座屈様式は $\beta=0.5$ 且 $M_n < 150$ を除いて単純支持の場合とほぼ一致する。

Fig. 4-d と Fig. 5-d とを比較より、座屈モード波形に 11111 も母線

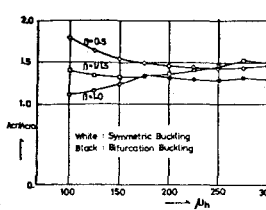


Fig. 3-a $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ (Pinned)

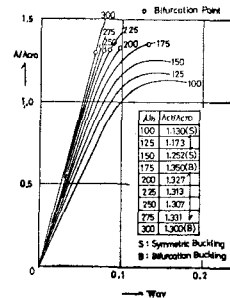


Fig. 3-b $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ -Wav (Pinned, $\beta=1$)

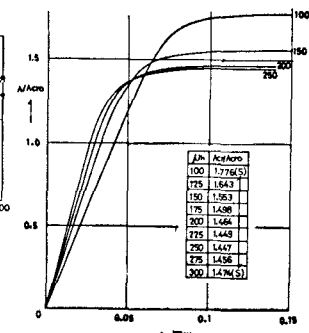


Fig. 3-c $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ -Wav (Pinned, $\beta=0.5$)

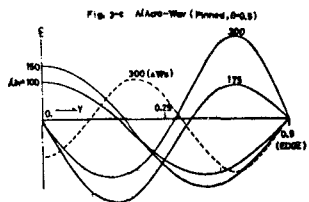


Fig. 3-d Buckling Mode (Pinned, $\beta=1$)

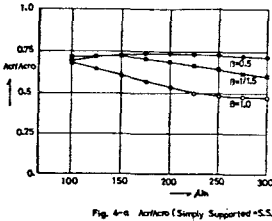


Fig. 4-a $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ (Simply Supported - S.S.)

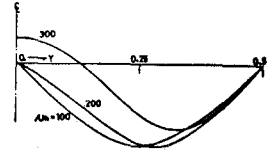


Fig. 4-b Buckling Mode (S.S., $\beta=1$)

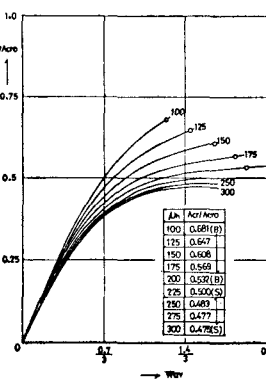


Fig. 4-c $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ -Wav (S.S., $\beta=1$)

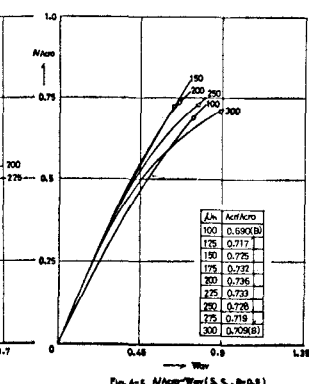


Fig. 4-d $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ -Wav (S.S., $\beta=0.5$)

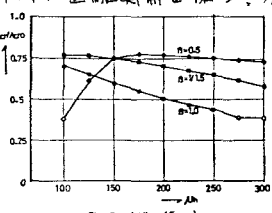


Fig. 5-a $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ (Free)

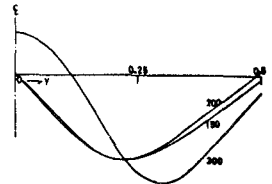


Fig. 5-b Buckling Mode (Free, $\beta=1$)

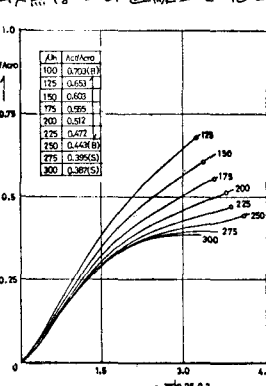


Fig. 5-c $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ -W (0.25, 0.3) (Free, $\beta=1$)

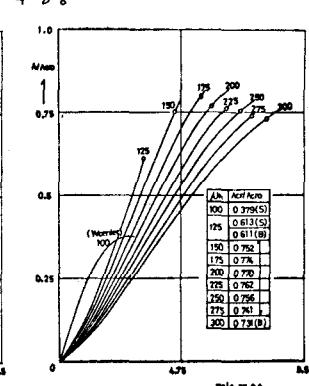


Fig. 5-d $\lambda_{cr}/\lambda_{cr0}$ -W (0.25, 0.3) (Free, $\beta=0.5$)

縁辺部を除いて両者は大略同じである。 $\beta=0.5$ とき、 $M_n=125$ で対称座屈点と合岐座屈点は近接し、 $M_n<125$ ではシェル中央部分の対称座屈($N=1$)、 $M_n>125$ では合岐座屈($N=2$)が先行する。

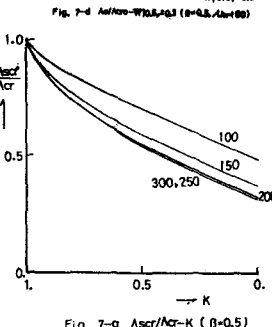
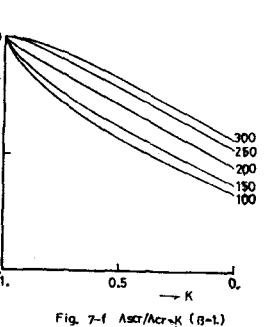
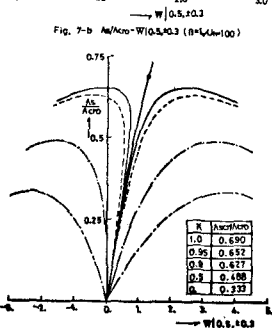
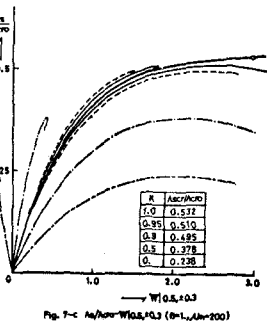
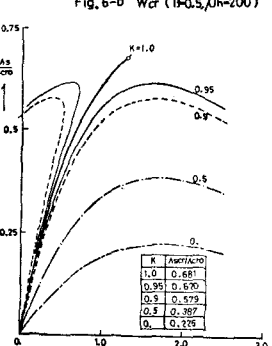
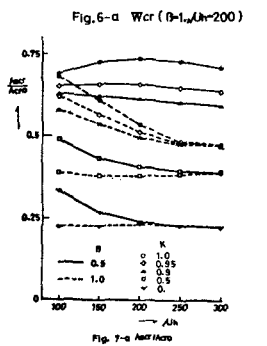
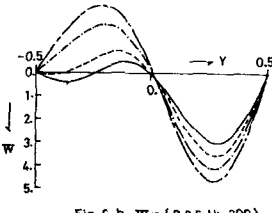
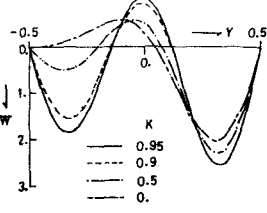
4 境界条件の影響について 単純支持と自由境界は $\beta=0.5$ 、 $M_n<150$ を除いて両者の $\Lambda_{cr}/\Lambda_{cro}$ 座屈様式、モードは座屈前に於ける変形応力場に大きな違いがあるにも拘わらずほぼ一致する。ピンと単純支持との比較より、面内内張方向の拘束が座屈荷重を著しく高めることが分かる。

3 不完全系の座屈解析 現実には建設される円筒細目シェル屋根は(1)自重に風、雪荷重が付けられ、一般に非材料荷重を受けること(荷重不整)、(2)施工誤差によって初期曲面は完全な円筒面でない(曲面不整)等の不整を含む。一般にシェル構造は他の構造に比較し、これらの不整に対して敏感であると考え、二つでは先に述べた荷重、初期曲面の不整をもつ不完全系の座屈挙動を母線縁辺が単純支持の場合について数値解析的に説明する。

a. 荷重不整 初期曲面不整はないと $L(C=0)$ 、荷重の不整を表わすパラメータとして $k=\frac{\Lambda_s-\Lambda_0}{\Lambda_s+\Lambda_0}$ を用い、 $k=1, 0.95, 0.9, 0.5, 0$ 、 $\beta=1, 0.5$ 、 $M_n=100 \sim 300$ の範囲で計算を行った。結果は次の通り。

(1) 座屈時変形の最大変位: W_{max} はいずれも $X=0.5$ (中央内張)、 $Y=0.3$ 近傍で生じ、 $\beta=1$ では M_n に依らず k が小さくなるにつれ W_{max} は小さくなり、 $\beta=0.5$ では逆の傾向を示す。(Fig. 6 参照)

(2) 座屈点の Λ_s と Λ_{scr} とすると $(\therefore k=1$ のとき、 $\Lambda_{scr}=\Lambda_{cr})$ 、 $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cro}$ はいずれも k が小さくなるにつれ単調に減少する。完全系で合岐座屈が先行するとき($\beta=1$ 、 $M_n=100 \sim 200$ 及 $\beta=0.5$ 、 $M_n=100 \sim 300$)、僅かな荷重不整によって $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は急激に減少し、 $\beta=1$ では $M_n=100$ から200、 $\beta=0.5$ では300から ∞ の順にこの傾向が著しい。例えば $\beta=1$ 、 $M_n=100$ でFig. 7-bの結果に加えて、 $k=0.975$ のとき $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}=0.940$ 、 $k=0.925$ のとき 0.876 であるから、 $0.9 \leq k \leq 1$ では $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-1 = -0.6906 \times (1-k)^{\frac{2}{3}}$ (21) となり「two-thirds power law」が成立していることが確認される。 $\beta=1$ 且つ $k=0.5, 0$ のとき、 $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cro}$ はほぼ一定でその値はそれぞれ0.38、0.225である。二つをとり、 $\beta=1$ の場合



長がある値以下で $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は M_n に与らず、 k に対応して一定値をもつことが推測される。(Fig. 7 参照)

③ 完全系で分岐座屈が先行するとき、 $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は 1 より小さく、同一の k に対して $\beta=1$ では M_n が小さくなるにつれ、 $\beta=0.5$ では M_n が大きくなるにつれ $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は減少する。二に、 Λ_{scr} は座屈点の $\Lambda_t = \Lambda_s + \Lambda_a$ である。一方、完全系で対称座屈の場合 ($\beta=1$, $M_n=225 \sim 300$) では $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は 1 より大きく、同一の k に対して M_n が大きくなるにつれ $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は増大する。従って $\beta=1$ のとき完全系に於いて対称座屈点と分岐座屈点が近接している場合、 $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は長に与らず一定値をとることが分り、 $M_n=225$ 前後で $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ はほぼ 0.5 である。又、 $\beta=0.5$ の場合は $M_n=100$ よりやや小さい M_n で、 $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は一定となり、その値はほぼ 0.67 である。(Fig. 8 参照)

④ $\beta=0.5$ については、 $M_n \leq 100$ のときも検討する為、 $M_n=50, 75$ について計算を行った。その結果より、 $M_n=50$ のとき対称座屈 ($N=1$)、 75 のとき分岐座屈 ($N=2$) が先行するのが分かる。 $M_n=50, k=0$ のとき、 $W|x=0.5, y=0.25=3$ 前後で反曲点をもち極大点: 2 に達する。尚、極大点: 2 前後の変形状態を Fig. 9-a に示す。 $M_n=75, k=0.95$ の場合、分岐座屈点に近づくとき $N=2$ の逆対称変形が急増し、その後変形の増加につれ荷重もやがて増加し、やがて極大点に達する。これより $M_n=75$ のときは stable な分岐座屈であることが推測される。極大点の荷重を Λ_{scr} として Fig. 9-c に $M_n=50 \sim 100$ の $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ を示す。これより $50 \leq M_n \leq 75$ で $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ は複雑な変化を呈しており、さらに詳細な検討が必要である。(Fig. 9)

初期曲面不整 本報告で用いている初

期曲面不整量の評価方法によれば、一様外圧下では初期曲面不整モードは対称であるから、完全系と同様、その座屈様式には対称座屈と分岐座屈がある。二では完全系で対称座屈が先行する場合のうち、 $\beta=1, M_n=250, 300$ について一様外圧 ($k=1$) のもと、 $C=-0.2 \sim 0.2$ (0.05) について計算を行った。

$\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}$ を縦軸に、 C を横軸にとり結果を Fig. 10-a に示す。横軸を C の代りに座屈変位 x の最大値 ($x=0.5, y=0.35$ 近傍で生ずる) より得られる初期曲面の最大片振幅: δ_{0max} で表すと Fig. 10-b となる。これより、

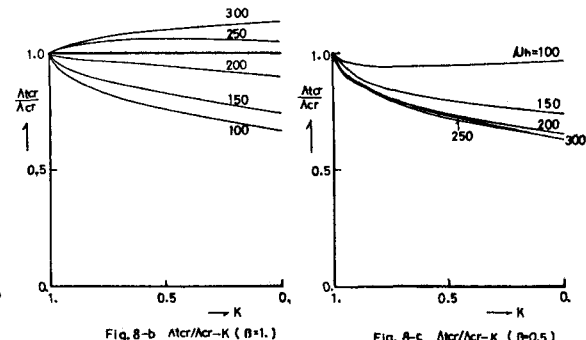


Fig. 8-b $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-K$ ($\beta=1$)

Fig. 8-c $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-K$ ($\beta=0.5$)

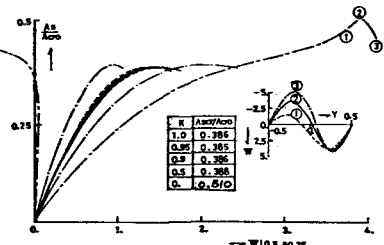


Fig. 9-a $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-W(x, y)$ ($\beta=0.5, M_n=50$)

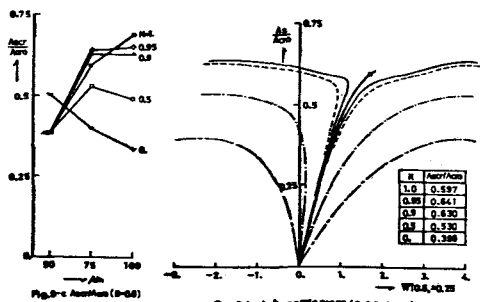


Fig. 9-b $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-C$ ($\beta=0.5, M_n=50$)

Fig. 9-c $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-\delta_{0max}$ ($\beta=0.5, M_n=50$)

TABLE 2

C	$\beta=1$ $M_n=250$		$\beta=1$ $M_n=300$	
	Λ_{scr}	Wmax	Λ_{scr}	Wmax
-0.20	0.619	3.01	0.612	3.12
-0.15	0.579	2.86	0.571	2.95
-0.10	0.543	2.72	0.534	2.78
-0.05	0.512	2.56	0.503	2.64
0.00	0.483	—	0.475	—
0.05	0.459	2.42	0.449	2.39
0.10	0.436	2.37	0.426	2.29
0.15	0.416	2.33	0.406	2.19
0.20	0.398	2.38	0.387	2.10

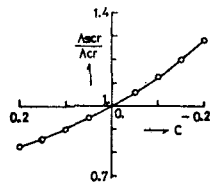


Fig. 10-a $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-C$

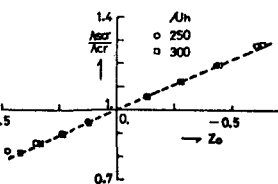


Fig. 10-b $\Lambda_{scr}/\Lambda_{cr}-\delta_{0max}$

$NH=250, 300$ とともに N_{scr}/N_{cr} は式(22) で近似される。 $N_{scr}/N_{cr} = -0.444 \cdot Z_{max} + 1$ (22)

§-5 結論 有限変形を考慮した曲線梁の連続体置換に基づき系の非線形基礎式を求め、さらに妻側縁直単純支持、母線縁任意境界のもとで非線形基礎式の近似解法を示した。この近似解法を用いて非線形解析を行い、等方性円筒網目シェル屋根の完全系及不完全系に於ける全体座屈性状を、一様外圧を受ける円筒の座屈値を導入し、数値解析的に解明した。

参考文献

- 2) Douglas T. Wright: MEMBRANE FORCES AND BUCKLING IN RETICULATED SHELLS, Proc. of ASCE, ST1, February, 1965
- 2) Buchert, K.P.: Guide to stability Design Criteria for Metal Structures, pp. 514~pp. 523 "Shell and shell-Like Structures", 3rd. Ed. Edited By Bruce G. Johnston John Wiley & Sons, 1976
- 3) Norio Chiba 他: RETICULATED CYLINDRICAL STEEL SHELL COMPOSED OF A SINGLE LAYER WITH WIDE-FLANGE SHAPES, Proc. IASS, 1971
- 4) M. OSAKI: A PRACTICAL METHOD FOR THE ANALYSIS OF SPACE FRAMEWORK PLATES AND SHELLS, Proc. IASS, 1971
- 5) 米国土木学会編: 円筒シェル設計, 横尾他訳, 1964, 丸善
- 6) J.M.T. THOMPSON: DISCRETE BRANCHING POINTS IN THE GENERAL THEORY OF ELASTIC STABILITY, J. Mech. Phys. Solids, 1965, Vol.13
- 7) Hangan, Y. and Kawamata, B.: Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems by Static Perturbation Method, Report of the Industrial Science, The Univ. of Tokyo, Vol.22, 1973
- 8) 杉川, 寿田: 任意母線縁境界を有する円筒網目シェル屋根の全体座屈解析, 日本建築学会関東支部報告集, Vol.48, 1978
- 9) 杉川, 寿田: 妻側ローラー, 母線縁任意境界を有する等方性円筒網目シェル屋根の全体座屈解析, 日本建築学会全国学術講演要旨集, 1978, 9
- 10) 杉川: 任意母線縁境界をもつ部分円筒殻の座屈解析, 水28年度中央学連合会議報告, 1978

SYNOPSIS

GENERAL BUCKLING OF CYLINDRICAL RETICULATED SHELL ROOFS

by TSUTOMU KOKAWA, Graduate Student of Tokyo
Metropolitan Univ. Member of A.I.J.

This paper contains the following matters.

- 1) Nonlinear basic equation of Cylindrical Reticulated Shell Roofs (C.R.S.R.) considering imperfections of the load and geometry is derived by planely continuous treatment of a curved beam having the elastically nonlinear stress-strain relation.
- 2) Under the boundary conditions that the two ends of the structure are simply supported and the two generator edges are arbitrary, approximate analytical method of the nonlinear basic equation is shown.
- 3) Based upon this method, general buckling behaviours of C.R.S.R. in the case of isotropic are clarified numerically under various boundary conditions and shell geometry as well as imperfection, introducing the classical buckling pressure of the closed type.