

(11) 非偏平球殻の逆対称形応答振動特性

京大 ○國枝 治郎, 日本鋼管 村田 潤一, 新日本製鉄 作本 好文

序 容器類として用いられる非偏平な薄肉の球形シェルの逆対称形動的な外乱に対する応答特性を解明しようとするのが本稿の目的である。従って直接的数値計算法を適用することなく、解析的な取り扱いを行なっているが、この方面の研究は少ない。球殻の様な連続体の応答解析はモード解析法に基づくのが一般的であるから、各モードに対応する応答性状を明確にすればよい。本稿では応答変形モードがルジャンドル陪多項式の有限個級数で表わされるとして、幾何的非線形性を考慮した運動方程式に Galerkin 法を適用し、必要な支配式を得て解を求めた。応答変形は加振方向に一致するもの（加振型モードと名付ける）の外にそれに直交する方向にも生じる（随伴型モードと名付ける）と仮定し、定常応答振動状態に於ける安定性も論じている。この場合、応答変形は緯線方向に伝播型となっている。得られた結論として、加振型モードに於ける或る不安定領域は、伝播型モードの安定な存在領域であることを明らかにし、定常応答振動解析に於いては伝播型モードの採用の必要性を指摘している。尚、解法は文献[1]と同様である。厳正解としては複素或は非整次ルジャンドル陪関数で表現される変形をルジャンドル陪多項式の有限個級数で表現し、互いに直交する応答振動モードが得られることは厳正線形自由振動解[2], [3]との比較によって確かめている。本稿は日本建築学会大会学術講演会等で今迄に口頭で報告されて来たもの[8]をまとめたものである。

§ 1 基礎式 非偏平の薄肉球殻の支配式を導びくに当って次の仮定を用いる。1) 大変形だが微小歪 2) 殻厚 / 半径 $\ll 1$ 3) 面要素の相対回転は小さい 4) 要素回転慣性力と面外剪断剛性は無視。要素回転角を次の様に近似化し、且つ面内方向の慣性項を無視すると D'Alembert

$$\Psi_1 = (u + w^0)/a \approx w^0/a, \quad \Psi_2 = (v + w'/\sin\varphi)/a \approx w'/\sin\varphi/a, \quad \varphi^0 = \partial/\partial\varphi, \quad \varphi' = \partial/\partial\theta$$

の原理を適用して、球殻の法線方向運動方程式が文献[4]から少しの計算の後、(1)式の様に導びかれる。

$$H_2 H_2(w) - a H_2(\phi)/K - \{ w^{00} H_0(\phi) - K H_2(w)/a + \phi H_0(w) + \phi^{00} H_0(w) - 2 w^{00} \phi^{00} - K w^0 H_2^0(w)/a - K w' H_2^0(w)/a / \sin^2 \varphi - 2 (w^{0\theta} - w' \cot \varphi) (\phi^{0\theta} - \phi' \cot \varphi) / \sin^2 \varphi \} + (m/g) a^4 \ddot{w}/K + \tau a^4 w/K - P a^4/K = 0 \quad (1)$$

ここに w は法線方向変位、 ϕ は次式を満たす応力関数である。

$$N_\varphi = \{ \phi'' / \sin^2 \varphi + \phi' \cot \varphi + \phi - (K/a) H_2(w) \} / a^2$$

$$N_\theta = \{ \phi^{00} + \phi - (K/a) H_2(w) \} / a^2$$

$$N_{\varphi\theta} = - \{ \phi^{0\theta} / \sin \varphi - (\cos \varphi / \sin^2 \varphi) \phi' \} / a^2$$

適合条件は w , ϕ により次の様に与えられる。

$$H_2 H_1(\phi) / Eh - (1 - \nu) K H_2 H_2(w) / (E h a) + a H_2(w) + \{ w^{00} H_0(w) - (w^{00})^2 - (w^0)^2 - (w' / \sin^2 \varphi)^2 - w^{0\theta} (w' / \sin^2 \varphi)^0 \} = 0 \quad (2)$$

但し次の歪～変位関係式を用いている。

$$e_\varphi = \{ u^0 - w + (w^0)^2 / (2a) \} / a, \quad e_\theta = \{ w' / \sin \varphi + u \cot \varphi - w + (w' / \sin \varphi)^2 / 2a \} / a$$

$$e_{\varphi\theta} = \{ v^0 + u' / \sin \varphi - v \cot \varphi + w^0 w' / \sin \varphi / a \} / a$$

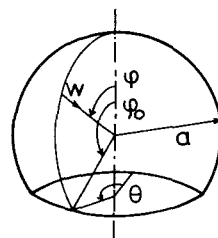


Fig. 1

§ 2 解法

円筒殻において周方向の traveling wave を考慮した振動応答解析がなされている〔6〕。

同様に球殻の逆対称形振動の場合にもこの様な応答が存在することが予想される。従って外力の作用方向に一致する応答変形（加振型モード）の他にそれに直交する方向に応答変形（随伴型モード）が誘起される場合があると仮定する。両モードがある条件を満たすとき、球殻の応答変形は緯線方向に伝播形となり、内容物として液体を含むならばそれは回転運動が誘起されることになる。この様な応答が生じると構造物の安全上不都合な事が生じることもあると考えられる。応答変形 w を次の形に置く。

$$w = w_c(t, \varphi) \cos \theta + w_s(t, \varphi) \sin \theta \quad (3)$$

(3) 式を (2) 式に代入することにより応力関数 ϕ は次の形で得られる。

$$\phi = \phi_0 + \phi_{c1} \cos \theta + \phi_{s1} \sin \theta + \phi_{c2} \cos 2\theta + \phi_{s2} \sin 2\theta, \quad \phi_0 \equiv \phi_0(t, \varphi) \text{ etc.} \quad (4)$$

(3), (4) を (2) 式に代入し、Galerkin 法により解を求めることにする。従って w_c を t 及び φ の関数に変数分離するが、境界条件を満たす φ のみの関数として線形自由振動の固有ベクトルを用いる事は、これらが一般に非整次、複素次数ルジャンドル陪関数の線形結合として表現されるので〔2〕、本稿の様に非線形問題に於ては望ましい事ではない。しかし固有ベクトルの表現のうち実数次の解が全体的振動モードを表現し且つ小さい値の次数に対応する解が低次モードに対応することが明らかにされている〔2〕。他方直交関数であるルジャンドル多項式の無限級数として解が表現されることは明らかであるが、上述の事より低次振動モードはルジャンドル多項式の低次項の有限個級数で固有ベクトルを近似的に表現することが可能と考えられる。境界条件を満たす w を次式で仮定する。

$$w_c \equiv x_c(t) W_c(\varphi) = x_c(t) h \sum_i A_i P_{l_i}^1(\cos \varphi), \quad w_s \equiv x_s(t) h \sum_j B_j P_{m_j}^1(\cos \varphi) \quad (5)$$

ここに $P_{l_i}^1(\cos \varphi)$, $P_{m_j}^1(\cos \varphi)$ は各々 l_i 次, m_j 次 1 階のルジャンドル陪多項式である。 A_i , B_j は常数で境界条件を満たす様に決められているものとする。(5) を (2) 式に代入すると $\phi_0 \sim \phi_{s2}$ が求まる。

$$\begin{aligned} \phi_0 &= E h^3 x_c^2(t) \sum_{p=0}^R C_p P_p(\cos \varphi) + E h^3 x_s^2(t) \sum_{q=0}^R D_q P_q(\cos \varphi) \\ \phi_{c1} &= (K/a) x_c h \sum_i A_i C_{l_i} P_{l_i}^1(\cos \varphi), \quad \phi_{s1} = (K/a) x_s h \sum_j B_j D_{m_j} P_{m_j}^1(\cos \varphi) \\ \phi_{c2} &= E h^3 x_c^2 \sum_{p=2}^R C_p P_p^2(\cos \varphi) + E h^3 x_s^2 \sum_{q=2}^R D_q P_q^2(\cos \varphi) \\ \phi_{s2} &= E h^3 x_s x_c \sum_{q=2}^R D_q P_q^2(\cos \varphi), \quad R = \text{Max}(\text{Max}(l_i + l_s), \text{Max}(m_j + m_t)) \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式中の ${}_0C_p$, ${}_0D_q$, ${}_1C_s$, ${}_1D_t$, ${}_2C_p$, ${}_2D_q$ の内容は Appendix に示す。(5) 及び (6) を (1) に代入し、Galerkin 法を次式の様な形式で適用する。非偏平な球殻を対象にしている事、いずれにせよ近似解法である事を考えるとき、これは認容されるであろう。

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \{ (1) \text{ 式の左辺} \} W_c \sin \varphi \cos \theta d\theta d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \{ (1) \text{ 式の左辺} \} W_s \sin \varphi \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

上式の計算を遂行すると次の連立非線形微分方程式を得る。 $\hat{r} = r g/m$ として

$$\ddot{x}_c + \omega_c^2 x_c = -\hat{r} \dot{x}_c + \varepsilon (k_1 x_c^3 + k_2 x_c x_s^2) - f_c \quad (7)$$

$$\ddot{x}_s + \omega_s^2 x_s = -\hat{r} \dot{x}_s + \varepsilon (k_3 x_s^3 + k_4 x_s x_c^2) - f_s \quad (8)$$

$$\text{ここに } \omega_c^2 = \alpha_1 \left[\frac{\sum_i A_i}{(l_i - 1)!(2l_i + 1)} \left\{ \frac{1}{1 - \nu - l_i - l_i^2} - \frac{(2 - l_i - l_i^2) l_i (l_i + 1)}{12(1 - \nu^2)(1 - \nu - l_i - l_i^2)} \varepsilon \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
\omega_s^2 &= \alpha_2 \sum_j B_j \frac{2(m_j+1)!(2-m_j-m_j^2)}{(m_j-1)!(2m_j+1)} \left\{ \frac{1}{1-\nu-m_j-m_j^2} - \frac{(2-m_j-m_j^2)m_j(m_j+1)}{12(1-\nu^2)(1-\nu-m_j-m_j^2)} \varepsilon \right\} \\
\alpha_1 &= \frac{g}{m} \frac{Eh}{a^2} \left\{ \sum_i A_i \frac{2(\ell_i+1)!}{(\ell_i-1)!(2\ell_i+1)} \right\}^{-1}, \quad \alpha_2 = \frac{g}{m} \frac{Eh}{a^2} \left\{ \sum_j B_j \frac{2(m_j+1)!}{(m_j-1)!(2m_j+1)} \right\}^{-1}, \quad \varepsilon = (h/a)^2 \\
k_1 &= -\frac{\alpha_1}{2} \sum_{r,j,k} A_i A_k X_{\ell_i \ell_k r}({}_0C_r, {}_2\hat{C}_r), \quad k_3 = -\frac{\alpha_2}{2} \sum_{r,j,k} B_j B_k X_{m_j m_k r}({}_0D_r, -{}_2\hat{C}_r) \\
k_2 &= -\frac{d_1}{2} \left[\sum_{r,j,k} A_i A_k X_{\ell_i \ell_k r}({}_0D_r, {}_2\hat{C}_r) + \sum_{r,j,k} B_j B_k X_{m_j m_k r}({}_2D_r) \right] \\
k_4 &= -\frac{\alpha_2}{2} \left[\sum_{r,j,k} B_j B_k X_{m_j m_k r}({}_0C_r, -{}_2\hat{C}_r) + \sum_{r,i,k} A_i B_k X_{\ell_i m_k r}({}_2D_r) \right]
\end{aligned}$$

但し指標 r は R (既述) まで, k は適宜 i, j の最大値までとるものとする。上式中の $X_{rst}(F_t, G_t)$, $\hat{X}_{rst}(E_t)$ で表わされている関数の内容は Appendix を参照されたい。外力項は次の形のままとする。

$$\left\{ \begin{matrix} f_c \\ f_s \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{\pi E} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} P \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{matrix} \right\} d\theta \right) \left\{ \begin{matrix} W_c \\ W_s \end{matrix} \right\} \sin \varphi d\varphi$$

(7) 及び (8) 式の解はここでは非線形性は大きくはないと考えて平均法[5]を適用して求めることにする。外力 P が与えられ, 上式の計算の結果 $f_c = P_c \cos \Omega t$, $f_s = P_s \cos \Omega t$ (P_c, P_s は一定値) と仮定する。

(7) 及び (8) の解を

$$x_c = \bar{A}_c(t) \cos(\Omega t + \bar{\eta}_c(t)), \quad x_s = \bar{A}_s(t) \cos(\Omega t + \bar{\eta}_s(t)) \quad (9)$$

と置き, $\bar{A}_c, \bar{A}_s, \bar{\eta}_c, \bar{\eta}_s$ を 1 周期に渉って平均化した値 A_c, A_s, η_c, η_s を用いる事にすると定常振動状態に於いてこれらは次式を満たす。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\omega_c^2 - \Omega^2)A_c - \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{3}{4}k_1 A_c^3 + \frac{1}{2}k_2 A_s^2 A_c \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2(\eta_c - \eta_s) \right\} \right] + \frac{1}{2}P_c \cos \eta_c = 0 \\
& -\frac{1}{2}\hat{r}\Omega A_c - \frac{1}{8}\varepsilon k_2 A_c A_s^2 \sin 2(\eta_c - \eta_s) + \frac{1}{2}P_c \sin \eta_c = 0 \\
& -\frac{1}{2}(\omega_s^2 - \Omega^2)A_s - \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{3}{4}k_3 A_s^3 + \frac{1}{2}k_4 A_c^2 A_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos 2(\eta_s - \eta_c) \right\} \right] + \frac{1}{2}P_s \cos \eta_s = 0 \\
& -\frac{1}{2}\hat{r}\Omega A_s - \frac{1}{8}\varepsilon k_4 A_s A_c^2 \sin 2(\eta_s - \eta_c) + \frac{1}{2}P_s \sin \eta_s = 0 \quad (10)
\end{aligned}$$

(10) 式を解くことにより周期的外力に対する球殻の応答振動が決定される。ただ (10) 式の根を陽な表現で与えるのは容易ではない。

§ 3 定常振動解の安定性 解 (9) に微小攪乱が附加された場合の解の性状に注目する。解を次の形に置く。但し a_c, a_s, η_c, η_s は十分に小さく, 又, λ は必要な order で小さいとする。

$$\tilde{A}_s = A_s + a_s e^{i\lambda t}, \quad \tilde{\eta}_s = \eta_s + \zeta_s e^{i\lambda t} \quad (11)$$

A_c, A_s, η_c, η_s は (10) 式を満たす根である。同様に $\tilde{A}_c, \tilde{A}_s, \tilde{\eta}_c, \tilde{\eta}_s$ は (10) 式を満たさねばならない

から、代入して non-trivial な $a_c \sim \zeta_s$ が定まるための条件として次式が導びける。

$$(\zeta_c, a_c, \zeta_s, a_s) [E_{ij}]^T = 0 \rightarrow f(\lambda) = \det(E_{ij}) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4, \quad E_{ij}: \text{Appendix 参照} \quad (12)$$

(12) 式の根 λ が正値の実数部をもつとき、応答振動は発散振動となる。以下に加振型モードのみが存在する場合、伝播形モードの場合の応答振動の安定性を調べる。

(I) 加振型モードのみが応答振動として存在している場合、(10) 式において $P_s = A_s = 0$ とするときの場合の共振曲線は次の形で求まる。

$$A_c^2 \left[\left\{ \frac{1}{2} (\omega_c^2 - \Omega^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 \right\}^2 + \frac{1}{4} \hat{\gamma} \Omega^2 \right] = \frac{1}{4} P_c \quad (13)$$

(i) 加振型モード自身に起因する不安定性について検討する。 a_c, η_c のみが存在する条件として (12) 式に於いて $\det(E_{ij}) = 0$ ($1 \leq i, j \leq 2$) より

$$\Omega^2 (\lambda + \frac{1}{2} \hat{\gamma})^2 + \left\{ \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega_c^2 - \Omega^2) \right\} \left\{ \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 - \frac{1}{2} (\omega_c^2 - \Omega^2) \right\} = 0$$

(13) 式より定まる応答振動が不安定になる領域として上式の根が正の実数部を有する条件がこの場合次の様に与えられる。

$$\left(\frac{9}{4} \varepsilon k_1 A_c^2 + \Omega^2 - \omega_c^2 \right) \left(\frac{3}{4} \varepsilon k_1 A_c^2 + \Omega^2 - \omega_c^2 \right) + \hat{\gamma} \Omega^2 < 0 \quad (14)$$

(ii) 球殻の持つ微小な不整形性或は何等かの微小攪乱により随伴型モードが発生しようとするときこれに起因して加振型モードに不安定域が生じることが予想される。これは(i)による不安定領域に附加されるものである。 $A_s = P_s = 0, a_s \neq 0, \zeta_s \neq 0$ の条件より (12) 式から $E_{34} = E_{44} = 0$ が与えられる。

即ち

$$\Omega^2 (\lambda + \frac{1}{2} \hat{\gamma})^2 + \frac{1}{4} (\omega_s^2 - \Omega^2 - \frac{3}{4} \varepsilon k_4 A_c^2) (\omega_s^2 - \Omega^2 - \frac{1}{4} \varepsilon k_4 A_c^2) = 0$$

これより次の不安定領域が定まる。

$$\left(\frac{3}{4} \varepsilon k_4 A_c^2 + \Omega^2 - \omega_s^2 \right) \left(\frac{1}{4} \varepsilon k_4 A_c^2 + \Omega^2 - \omega_s^2 \right) + \hat{\gamma} \Omega^2 < 0 \quad (15)$$

以上により k_1 の正負によって加振型モードの共振曲線の形態、及びそれ自身に起因する不安定領域が定まり、 k_4 の値によって随伴型モードの発生しようとすることに起因する加振型モードの不安定領域が決定されることが分かる。いずれにせよ以上の結果より随伴型モードが発生しようとするとき加振型モードの不安定領域が附加設定されることが明らかとなった。 $\hat{\gamma} = 0$ の場合を考察すれば、この特質はより明瞭であろう。

(II) 伝播形モードが応答振動として存在している場合。(10) 式において $P_s = 0$ の場合のみを考察するがそれで充分であろう。取り扱いを簡単化するために次の様な場合に限定する。

$$\hat{\gamma} = 0, \quad W_s = \beta W_c$$

この場合 (10) 式より $\cos 2(\eta_s - \eta_c) = \pm 1$ が導びかれるが、 $+1$ の場合は加振型モードのみの定常振動と本質的に異ならないので、考察から除外する。

$$\cos 2(\eta_s - \eta_c) = -1 \rightarrow \eta_s = \eta_c + \frac{1}{2}(2n+1)\pi, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

であり、この場合の応答変形は(5)，(9)より次の様に表わせる。

$$w = h \left(\sum_i A_i P_{l_i}^1(\cos \varphi) \right) (A_c \cos \theta \cos \Omega t + \beta A_s \sin \theta \sin \Omega t) \quad (16)$$

これは緯線方向に traveling の状態の応答モードとなる。この場合の共振曲線は次の様に与えられる。

$$A_c^2 \{ (\omega_c^2 - \Omega^2) - k_2^2 (\omega_s^2 - \Omega^2) / 3 / k_3 + \frac{3}{4} A_c^2 (k_2 k_4 / 3 / k_3 - 3 k_1) \}^2 = P_c^2$$

$$A_s^2 = \{ \frac{4}{\varepsilon} (\omega_s^2 - \Omega^2) - k_4 A_c^2 \} / 3 / k_3 \quad (17)$$

安定性を検討するため(12)式を書き下すと次の様に与えられる。

$$Y^2 - AY + B = 0, \quad Y = \lambda^2 \Omega^2 \quad (18)$$

$$A = \varepsilon^2 k_4 A_s^2 A_c^2 (2k_2 - 3k_3) / 16 - 3\varepsilon^2 (9k_1 A_c^2 + k_2 A_s^2) (k_1 A_c^2 + k_2 A_s^2) / 64$$

$$+ \varepsilon (\omega_c^2 - \Omega^2) (3k_1 A_c^2 + k_2 A_s^2) / 4 - (\omega_c^2 - \Omega^2)$$

$$B = \varepsilon^2 k_4 A_s^2 A_c^2 \{ -3k_3 (\omega_c^2 - \Omega^2) / 2 + 3\varepsilon k_3 (9k_1 A_c^2 + k_2 A_s^2) / 8 - \varepsilon k_2 k_4 A_c^2 / 4 \}$$

$$\times \{ -(\omega_c^2 - \Omega^2) / 2 + \varepsilon (3k_1 A_c^2 + k_2 A_s^2) / 8 \} / 16$$

(18)式において Y が負根のみを有する場合には定常振動解は少なくとも安定であることは言える。この安定領域の表現は極めて煩雑となるので、既述の加振型モードの不安定域との関係はこの様な表現に於いては明確ではないが、後述の数値計算例を通じてその関係を明らかにする。

§4 数値計算例 $\varphi_0 = 135^\circ$ に於いて固定境界を有する球殻を対象として、 $l_i \equiv i (i=1 \sim 5)$ とした場合を考察する。 A_1 にある値を定めると境界条件より $A_2 \sim A_5$ は一意的に定まる。ここでは $A_1 = 0.5$ として議論を進める。外力を $P_c = \alpha P_1^1 \cos \theta$ と定めると、加振型モードの共振曲線とその不安定限界は(13)，(14)，(15)式より計算される。結果を図2に示す。但し r は零とする。図中、鎖線で囲まれた領域が加振型モード自身に起因する不安定領域であり、一点鎖線で囲まれた領域は随伴型モードが発生することに起因する(但し $B_j \equiv 0$ である)不安定領域である。後者により加振型モードの不安定領域が増加していることがわかる。

次に加振型モードに加えて随伴型モードも存在し、両者に次の関係がある場合を取り扱う。

$$m_j \equiv j (j=1 \sim 5), \quad B_1 = A_1, \quad \eta_s - \eta_c = -\pi, \quad P_s = 0$$

従って伝播形モードである。この場合の共振曲線を(17)より求めて示したのが図3である。図中の1点鎖線 LL 及び UL は A_c に対する安定領域限界として(18)式より計算されたもので、この領域内の A_c の共振曲線及び対応する A_s の共振曲線は安定なものとして図中実線で示している。図中の点 Q より右方では有意な A_s は(17)式では存在しない。 A_s に関して同様な安定限界を(18)式より直接に計算することは困難である。図3から点 Q より左方側に於いて安定な伝播形の応答振動が存在することがわかる。ところで点 Q は図2の点 $\bar{Q}$ と数値計算上一致する。点 $\bar{Q}$ は随伴型モード発生に起因する加振型モードの不安定限界である。換言すれば随伴型モードとして微小攪乱があると加振型モー

ドは不安定となる領域が現われるが、その領域では安定な伝播形振動が生じる。もし容器状構造物においてこの種伝播形応答振動の存在が問題とされる様な場合には従ってこの加振型モードの不安定限界を知ればよい。

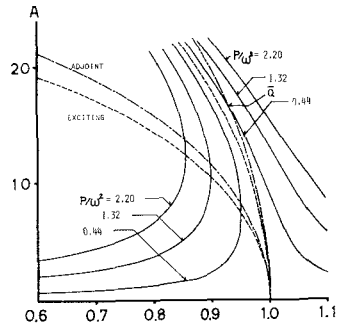


Fig.2 An Example of Resonance of Exciting Mode in case of $l_i = 1 \sim 5$ and Unstable Regions.

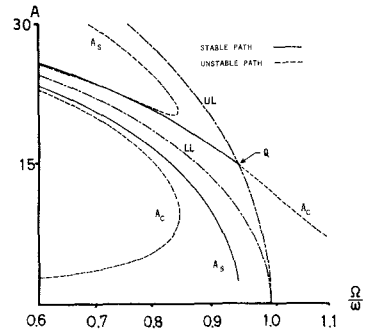


Fig.3 An Example of Resonance of Traveling Mode and Stable Region.

§ 5 互いに直交する変形モードの設定 モード解析法に基づいて応答解析を行なうには (5) 式の様に表現される W_c 或は W_s が複数列必要とされ、それらは互いに直交しなければならない。従って l_i , m_j 等はこの直交条件を満たすように幾組か設定されねばならない。又、境界条件も満たさねばならない。この様な要求を満たす W_c 或は W_s の作成法を次に示す。次の 3 段階の手順を経て設定する。

- I. (a) 最初のモード (2nd モード) を次の様に設定する。含まれる未知常数は、 $F_{21} = 1.0$ と定め、境界条件より残り F_{2i} ($i = 2 \sim 5$)

$$\tilde{W}_2 = \sum_{i=1}^5 F_{2i} P_i^1 (\cos \varphi)$$

を決定する。

- (b) 第 2 番目のモード (3rd モード) を設定し、 $\tilde{W}_2$ との直交条件、境界条件より係数を定める。

$$\tilde{W}_3 = \sum_{i=1}^5 F_{3i} P_i^1 (\cos \varphi), \quad \text{直交条件: } \int_0^\pi \tilde{W}_2 \tilde{W}_3 \sin \varphi d\varphi = 0 \quad \text{但し } F_{31} = 1.0 \text{ とする。}$$

- (c) 同様に ($k-1$) 番目モードを設定し、 $\tilde{W}_2 \sim \tilde{W}_{k-1}$ との直交条件、境界条件より係数を定める。

$$\tilde{W}_k = \sum_{i=1}^N F_{ki} P_i^1 (\cos \varphi), \quad \text{直交条件: } \int_0^\pi \tilde{W}_k \tilde{W}_n \sin \varphi d\varphi = 0 \quad \text{但し } F_{k1} = 1.0$$

$$(n = 2 \sim k-1) \quad N = k+3$$

II. $W = \sum_{j=2}^N a_j \tilde{W}_j$ として線形自由振動方程式 ((1) 式) の非線形項及び外力項を無視したもの) に代入して Galerkin 法を適用し、($k-1$) 個の固有ベクトル $(a_j)_i$ を決定する。これにより互いに直交する変形モード W_c 或は W_s は次の様に求まる。

$$W_i = \sum_{j=2}^k (a_j)_i \tilde{W}_j = \sum_{s=1}^N G_{si} P_s^1 (\cos \varphi), \quad N = k+3, \quad G_{si}: \text{確定値} \quad (19)$$

III. 逆対称形振動時には最低次変形モードは剛体移動形に近い事は既知である〔7〕〔3〕。この変形は近似的に $W = (P_1^1 (\cos \varphi) + c) \cdot \cos \theta$ で与えられるが、この振動モードは既述の方法からは得られない。何故ならば応力関数表示の支配式ではこの解に相当するものが含まれないためである〔2〕。又この変形モードを数少ないルジャンドル陪多項式の級数和として境界条件も満して定めることは極めて困難である。だがこれに相当するモードは応答解析上必要とされるので、ここでは境界条件は満さないが、境界近辺以外の領域に於いて一般的振動性状を考察するために $W_1 = P_1^1 (\cos \varphi)$ を採用することにする。当然ながら W_1 は W_i ($i \neq 1$) とは直交しない。これに対応する固有振動数は〔7〕或は〔3〕

より求められる。

以上Ⅰ～Ⅲの手順によってモード解析法に於ける固有ベクトルを決定することが出来た。 N として如何なる値まで採用すればよいかは数値計算を行なって検定する以外にはない。 $\mathcal{W}_2$ について $N = 8, 10, 15$ の場合の変形モードの一例を図4に示す。これは $\varphi_0 = 135^\circ$ で固定支持した場合である。又、 $\mathcal{W}_2$ 及び $\mathcal{W}_3$ の固有円振動数の変化と N の関係を具体的数値の下に図5に示している。用いた数値は $\alpha = 10^m$, $h = 1^{\text{cm}}$, $\nu = 0.3$ で普通鋼材としている。図4及び図5より10個のルジャンドル陪多項式の級

数和として変形を表現すれば低次振動に対しては可と考

§ 6 応答共振特性

$N = 10$ として得られた6組の直交モードと既述の最低次振動モードに相当するものの計7個の振動モードに対する共振曲線と不安定領域を図

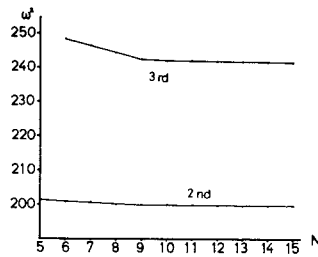


Fig.5 Variation of Natural Frequencies of 2nd and 3rd Modes Due to N.

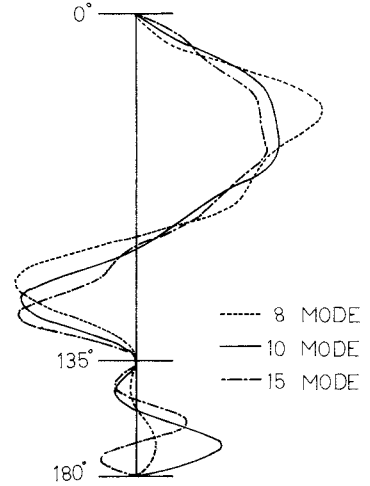


Fig.4 Comparison of Spatial Modes Due to Number of Summation, N, of Legendre Bi-Polynomials.

6に示す。外力は $P_c = \alpha P_1^1 (\cos \varphi)$ のみで、 $\varphi_0 = 135^\circ$ で固定支持とした場合の例である。加振型モードのみが存在するとした場合の共振曲線で、各モードは既述Ⅰ～Ⅱの手順で決定されている。図中点線は加振型モード自身に起因する不安定限界を（両点線内の領域が不安定）、1点鎖線は随伴型モード発生に伴う（但し $B_j \equiv 0$ ）加振型モードの不安定限界であるが、この例の場合、前者の上限を示す曲線と後者の下限を示す曲線がほぼ一致している。これはルジャンドル陪多項式を多く採用して変形モードを決定しているため、高次のルジャンドル多項式の影響で非線形項係数 $k_1 \doteq k_2, k_3 \doteq k_4$ の為である。両曲線内の領域が不安定領域である。この随伴型モードの発生に伴う不安定領域での共振は伝播形の安定な応答振動の領域と一致することは§4で述べた通りである。

高次型の振動モードになる程変位振幅は小さく、且つ非線形性の増すことが図5に見られる。 $\mathcal{W}_1$ の振幅は極めて大きいが、周期は $\mathcal{W}_2$ 以上のモードに比較して極めて長く〔3〕形状によっては地震時の影響は十分に小さいことも考えられる。尚 $\mathcal{W}_1$ の場合は外力を他の場合の $1/100$ としている。図5の縦軸 A の値自身には意味は無い。

§ 7 球形液体用容器の場合 球形シェルの液（気）体容器として使用する場合には通常 $\varphi = \varphi_0$ の緯線に沿って支持する完全球として用いるのが普通であろう。この場合例えば $\varphi = \varphi_0$ で固定リング（必ずしも固定でなくても可）の入った完全球として考えれば応答解析には既述の手法がそのままで適用できる。ただこの場合内部液体とシェルの間の動的相互作用を考慮せねばならない。内部液体が部分的に満されている場合にはスロッシングが生じるが、この場合の液体表面部の動きは円筒殻の場合と違って極めて複雑なので、未だ解析することは不可である。完全に充満している場合にはスロッシングは生じないので、液体は附加質量として取り扱われる。ここではこの附加質量の算定法を示す。

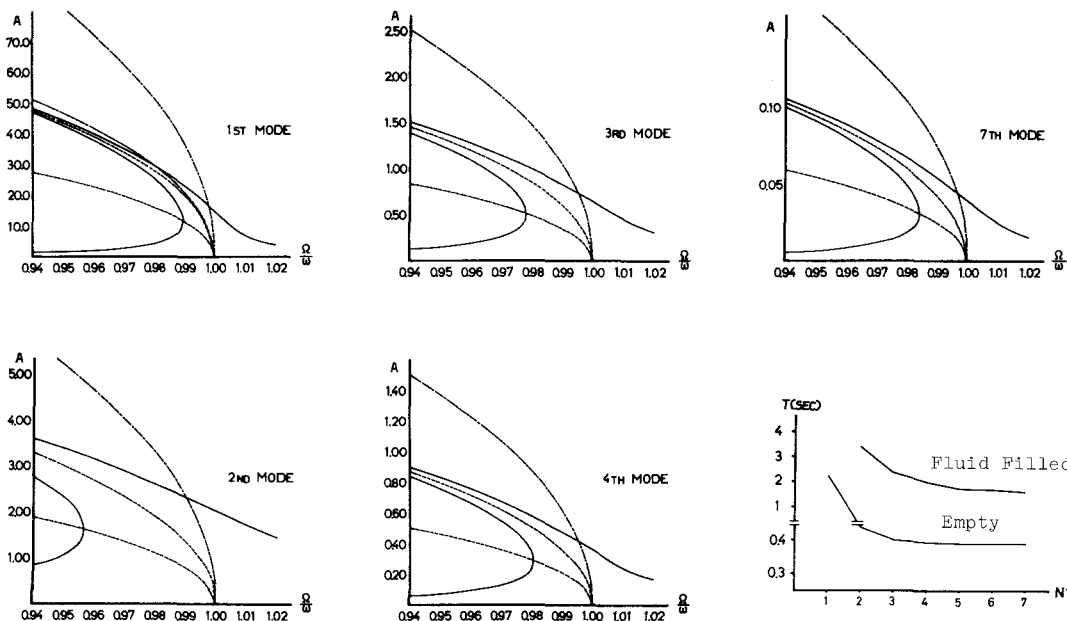


Fig.6 Resonances of Some fundamental Exciting Modes and Unstable Regions.

Fig.7 Periods of Fluid Filled and Empty Shell in Some Modes.

液体の圧縮性は無視しても誤差は小さいと予想されるので、理想流体として取り扱う。

連続条件 $\nabla^2 \Phi = 0$ の解を $\Phi = \Phi_c \cos \theta + \Phi_s \sin \theta$ と置く。今、球殻の法線方向変位が $w = w_c \cos \theta + w_s \sin \theta$ で与えられ、 w_c が既述の様に設定されたとすると、対応して解 Φ を次の様に定める。

$$w_c = x_c(t) h \sum_i C_i P_{l_i}^1(\cos \varphi) \rightarrow \Phi_c = \dot{x}_c(t) \cdot h \cdot a \sum_i D_i \left(\frac{r}{a}\right)^i P_{l_i}^1(\cos \varphi) \quad (20)$$

シェル面に於ける境界条件を次式で与え、これから便法として D_i を下式の様に定めるとする。

$$\dot{w}_c = \frac{\partial \Phi_c}{\partial r} \Big|_{r=a} \rightarrow D_i = \frac{C_i}{i}$$

液体のシェルの運動方程式に於ける影響は次式より定まる外力として考慮されることになる。

$$P_c = \rho_f \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \Big|_{r=a}, \quad \rho_f: \text{液体密度} \quad (21)$$

w_s , Φ_s に関しても同様である。(21)式により定まる外力はシェルの附加質量として取り扱われ得る。線形自由振動(非減衰)の場合の固有周期の比較を図7に示す。 l_i として1~10をとり w_c として6個の直交モードを作成して用いた。形状・材料パラメータは図5の場合と同一である。尚この図で1次固有周期は空の場合(剛体移動形モード)のみであるが、液体が充満する場合は剛体置換して水平・回転移動を考慮すればよいだけであるから求めていない。この様な液体~シェル連成系としての自由振動より求めた振動モードと、空の場合の振動モードを比較のため示したのが図8で、固有振動数は大きく異なるにもかかわらずいずれの図でも両者の変形モードはよく一致している。即

ち液体を附加質量と見做すことの妥当性が示されている。この事は逆に未知常数 D_i の決定に於ける便法の妥当性を示すとも云える。

参考文献

[1] Kunieda, H. "Nonlinear Axisymmetric Flexural Vibration of Spherical Shell" NASA TND-6776, 1972

[2] 横尾, 松岡, 國枝 "球殻振動時一般解" その 1, その 2, 建・論・報 83 号, 84 号

[3] 國枝 "球殻自由振動時固有振動数 ($n=1$ の場合)" 建・論・報 号外 昭 41.10

[4] Sanders, J. L., Jr. "Nonlinear Theories for Thin Shells" Q. Appl. Math. vol. XXI, no. 1, 1963

[5] ボゴリョーボフ, ミトロポリスキー "非線形振動論" 共立出版 (日本語訳)

[6] 松崎雄嗣, 小林繁夫 "薄肉円筒殻の非線形振動解析" 日本航・宇・会誌第 17 巻第 187 号, 1969

[7] 坪井善勝, 川股重也 "球殻の横振動固有周期の略算" 建・論・報 83 号

[8] 横尾, 國枝, 村田; 昭 50 建・近畿支部研・報, 横尾, 國枝, 村田; 昭 50 建・大会講・梗・集
横尾, 國枝, 作本; 昭 52 建・大会講・梗・集

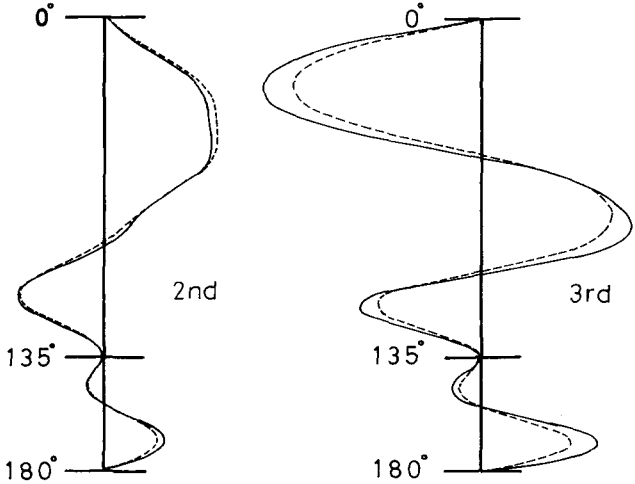


Fig.8 Comparison of Spatial Modes of Fluid Filled and Empty Shells.

使用記号

$H_0(\quad) = (\quad)^{00} + (\quad)^0 \cot \varphi + (\quad)^{\theta} \operatorname{cosec}^2 \varphi$, $H_1(\quad) = H_0(\quad) + (1-\nu)(\quad)$, $H_2(\quad) = H_0(\quad) + 2(\quad)$
 $K = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $\varepsilon = (h/a)^2$, $\hat{\gamma} = \gamma g/m$, $\quad^0 = \partial/\partial \varphi$, $\quad' = \partial/\partial \theta$, $\quad\cdot = \partial/\partial t$
 a : 半径, h : 版厚, E : 弾性係数, ν : ポアソン比, m : 殻の単位面積当り重量,
 g : 重力加速度, $P_n(\cos \varphi)$, $P_m^1(\cos \varphi)$, $P_\ell^2(\cos \varphi)$,: ルジャンドル (陪) 多項式

APPENDIX

(6)式中の ${}_0C_p, {}_0D_q, {}_1C_{\ell_i}, {}_1D_{m_j}, {}_2C_p^{(1)}, {}_2C_q^{(2)}, {}_2D_q$ について

$${}_0C_p = \xi(p) \sum_{i,k} A_i A_k H_{p\ell_i\ell_k}, \quad {}_0D_q = \xi(q) \sum_{j,k} B_j B_k H_{qm_jm_k}, \quad \xi(s) = \frac{1}{16\{1-\nu-s(s+1)\}\{2-s(s+1)\}}$$

$$H_{rpq} = \frac{2r+1}{2} \{ (p^2+p)(q^2+q) + 4(p^2-3p+2)-4 \} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ p & q & r \end{bmatrix} + 4(p^2+p)(q-3q^2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

$$-4 \sum_{\substack{p>s \\ p-s, \text{even}}} (8s+4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s & q & r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ p & q & r \end{bmatrix} + 8p(p+1) \sum_{\substack{q>s \\ q-s, \text{even}}} (4s+2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & s & r \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

但し r は $p+q \geq r \geq 0$ を満す整数。

$${}_1C_{\ell_i} = \frac{(1-\nu)\{2-\ell_i(\ell_i+1)\}-Eha^2/K}{1-\nu-\ell_i(\ell_i+1)}, \quad {}_1D_{m_j} = \frac{(1-\nu)\{2-m_j(m_j+1)\}-Eha^2/K}{1-\nu-m_j(m_j+1)}$$

$${}^{(1)}_2C_p = 2\xi(p)\Sigma_{i,k} A_i A_k I_{p\ell_i\ell_k}, \quad {}^{(2)}_2C_q = 2\xi(q)\Sigma_{j,k} B_j B_k I_{qm_jm_k}, \quad \xi(s): \text{既出}$$

$$\text{ここに} \quad I_{rpq} = \frac{2r+1}{2} \frac{(r-2)!}{(r+2)!} \{q(q+1)(p^2+p+2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ p & q & r \end{bmatrix} + q(q+1) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ p & q & r \end{bmatrix} \}$$

但し r は $p+q \geq r \geq 2$ を満す整数

$${}_2D_q = 2\xi(q)\Sigma_{i,j} (I_{qm_j\ell_i} + I_{p\ell_i m_j}) A_i B_j, \quad I_{rst}, \quad \xi(q): \text{既出}$$

(8)式中の $X_{mnr}(F_r, G_r)$, $\hat{X}_{mnr}(E_r)$ 関数について

$$\begin{aligned} X_{mnr}(F_r, G_r) &= \overset{1}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{2}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{3}{M_r} \Sigma_{\substack{m>s \\ m-s:\text{even}}} (2s+1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s & n & r \end{bmatrix} + \overset{4}{M_r} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ m & n & r \end{bmatrix} \\ &+ \overset{5}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{6}{M_r} \Sigma_{\substack{m>s \\ m-s:\text{even}}} (2s+1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ s & n & r \end{bmatrix} + \overset{7}{M_r} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{8}{M_r} \Sigma_{\substack{r>s \\ r-s:\text{even}}} (2s+1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & n & s \end{bmatrix} \\ \hat{X}_{mnr}(E_r) &= \overset{9}{M_r} \Sigma_{\substack{m>s \\ m-s:\text{even}}} (2s+1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s & n & r \end{bmatrix} + \overset{10}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{11}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & n & r \end{bmatrix} \\ &+ \overset{12}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{13}{M_{nr}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & n & r \end{bmatrix} + \overset{14}{M_r} \Sigma_{\substack{m>s \\ m-s:\text{even}}} (2s+1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ s & n & r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但し} \quad \overset{1}{M_{nr}} &= m(m+1)(r+2)(r-1)F_r - m(m-1)(r+2)(r+1)r(r-1)G_r/2 \\ \overset{2}{M_{nr}} &= (m+2)(m-1)F_r/2 + \{r^2+r+1-3m(m+1)/2\}G_r \\ \overset{3}{M_r} &= (r+2)(r+1)r(r-1)G_r, \quad \overset{4}{M_r} = -F_r/2 + (r^2+r+1)G_r/2 \\ \overset{5}{M_{nr}} &= 6m(m-1)G_r, \quad \overset{6}{M_r} = \overset{8}{M_r} = -12G_r, \quad \overset{7}{M_r} = 4(r-1)^2G_r \\ \overset{9}{M_r} &= (r+2)(r+1)r(r-1)E_r, \quad \overset{10}{M_{nr}} = -m(m-1)(r+2)(r+1)r(r-1)E_r/2 \\ \overset{11}{M_{nr}} &= -\{3m(m+1)r(r+1)-2r(r+1)+7m(m+1)-2\}E_r/2 \\ \overset{12}{M_r} &= (r^2+r+1)E_r/2, \quad \overset{13}{M_{nr}} = 12m^2E_r, \quad \overset{14}{M_r} = -12E_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ \ell & m & n \end{bmatrix} &\equiv \int_0^\pi P_\ell^a P_m^b P_n^c \sin\varphi d\varphi, \quad P_i^j \equiv P_i^j(\cos\varphi), \quad P_i^o \equiv P_i^o(\cos\varphi) \\ \langle \begin{bmatrix} a & b & c \\ \ell & m & n \end{bmatrix} \rangle &\equiv \int_0^\pi \frac{P_\ell^a P_m^b P_n^c}{\sin\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \ell & m & n \end{bmatrix}$ に於いて $a=b+c$ の場合には Gaunt* による公式を用いてこの値を容易に計算出来る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b & c \\ \ell & m & n \end{bmatrix} &= (-1)^{s-m-c} 2 \frac{(\ell-a)! (m+b)! (n+c)! (n-c)! (2s-2n)! s!}{(s-\ell)! (s-m)! (s-n)! (2s+1)!} \\ &\times \sum_t (-1)^t \frac{(\ell+a+t)! (m+n-a-t)!}{(\ell-a-t)! (m-n+a+t)! (n-c-t)! t!} \dots\dots\dots \quad [A] \end{aligned}$$

但し $a=b+c, \quad \ell+m+n=2s$ (s : 整数)

$$m+n \geq \ell \geq m-n, \quad \ell \geq a, \quad \ell \geq n-m$$

等の条件を満たさねばならない。これらを満たさないときには上記積分値は零である。又、 t は負数の階乗とならない範囲で取り得る整数である。即ち下式の範囲の全ての整数である。

$$\text{Max}(0, n-m-a) \leq t \leq \text{Mini}(n-c, \ell-a, m+n-a)$$

既出の計算では全ての項は $a=b+c$ を満す様に変形してある。

$\langle \begin{bmatrix} a & b & c \\ \ell & m & n \end{bmatrix} \rangle$ に於いて $a=2, b=c=1$ の場合 (既出項は全てこの条件を満す) には計算は容易である。

$$p_\ell^2 p_m^1 = \sum_t \frac{(t-1)!(2t+1)}{2(t+1)!} \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \ell & m & t \end{smallmatrix} \right] p_t^1 \quad \text{よ り}$$

$$\left\langle \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \ell & m & n \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{\substack{n > t \\ n-t: \text{even}}} \frac{2t+1}{2} \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \ell & m & t \end{smallmatrix} \right] + n(n+1) \sum_{\substack{t \geq n \\ t-n: \text{even}}} \frac{(t-1)!(2t+1)}{2(t+1)!} \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \ell & m & t \end{smallmatrix} \right] \quad \text{.....} \quad \text{[B]}$$

* Gaunt, J. A. "On the Triplets of Helium" Appendix (p.p 192-196), Philos. Trans. Royal Soc. A228, 1929

(12) 式中の E_{ij} について

$$E_{11} = A_c \mathcal{Q}(\lambda + \frac{1}{2} \hat{r}) - \frac{3}{8} \varepsilon k_2 A_s^2 A_c S_c$$

$$E_{12} = -\frac{1}{2}(\omega_c^2 - \mathcal{Q}^2) + \frac{9}{8} \varepsilon k_1 A_c^2 + \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s^2 (1 + \frac{1}{2} C_c)$$

$$E_{13} = \frac{1}{4} \varepsilon k_2 A_s^2 A_c S_c, \quad E_{14} = \frac{1}{2} \varepsilon k_2 A_s A_c (1 + \frac{1}{2} C_c)$$

$$E_{21} = \frac{1}{2} A_c (\omega_c^2 - \mathcal{Q}^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_1 A_c^3 + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_c A_s^2 (C_c - 2)$$

$$E_{22} = \mathcal{Q}(\lambda + \hat{r}/2) + \frac{1}{8} \varepsilon k_2 A_s^2 S_c, \quad E_{23} = -\frac{\varepsilon}{4} k_2 A_c A_s^2 C_c, \quad E_{24} = \frac{\varepsilon}{4} k_2 A_s A_c S_c$$

$$E_{31} = \frac{1}{4} \varepsilon k_4 A_c^2 A_s S_s, \quad E_{32} = \frac{1}{2} \varepsilon k_4 A_c A_s (1 + \frac{1}{2} C_s)$$

$$E_{33} = A_s \mathcal{Q}(\lambda + \hat{r}/2) - \frac{1}{8} \varepsilon k_4 A_c^2 A_s S_s$$

$$E_{34} = -\frac{1}{2}(\omega_s^2 - \mathcal{Q}^2) + \frac{9}{8} \varepsilon k_3 A_s^2 + \frac{1}{4} k_4 A_c^2 (1 + \frac{1}{2} C_s)$$

$$E_{41} = -\frac{1}{4} \varepsilon k_4 A_s A_c^2 C_s, \quad E_{42} = \frac{1}{4} \varepsilon k_4 A_s A_c S_s$$

$$E_{43} = \frac{1}{2} A_s (\omega_s^2 - \mathcal{Q}^2) - \frac{3}{8} \varepsilon k_3 A_s^3 + \frac{1}{8} \varepsilon k_4 A_s A_c^2 \{C_s - 2\}$$

$$E_{44} = \mathcal{Q}(\lambda + \hat{r}/2) + \frac{1}{8} \varepsilon k_4 A_c^2 S_s$$

但し $C_c = \cos 2(\eta_c - \eta_s)$, $C_s = \cos 2(\eta_s - \eta_c)$, $S_c = \sin 2(\eta_c - \eta_s)$, $S_s = \sin 2(\eta_s - \eta_c)$

Nonlinear Anti-symmetric Flexural Vibration of Spherical Shell

Haruo Kunieda* Junichi Murata** Yoshibumi Sakumoto***

It may be expected that for thin-walled spherical shells, especially non-shallow ones, analysis on the basis of nonlinear theory will reveal such phenomena of response that can not be provided by linear theory. By introducing some assumptions and approximations, the governing equations for anti-symmetric vibration of spherical shell can be derived as eqs.(1),(2) from ref[4]. In the solution of the nonlinear equations treated herein application of Galerkin's procedure seems most suitable, despite of its approximity, provided the deflection mode which satisfy boundary conditions. But, if eigen vectors of linear vibration are employed as deflection modes, equations can not be integrated easily in Galerkin's procedure since eigen vectors appear generally as the sum of Legendre functions with real fractional and complex conjugate orders for non-shallow spherical shell[2]. Thence, in this report the deflections are set as the truncated series of Legendre bi-polynomials to satisfy ordinary boundary conditions as represented in eq.(5). Two types of response mode are taken into consideration, referring [6]: one is exciting mode which is coincident to the direction of excitation and another is adjoint mode induced in the direction perpendicular to the excitation. If both response modes satisfy some conditions response deflection mode of the shell travels in circumferential direction. By substitution of eq.(5) into compatibility condition (2), stress function ψ can be obtained as (6). Thence with application of Galerkin's procedure, ordinary nonlinear simultaneous differential equations in regard to time function are finally derived as (7) and (8). If the shell is subject to a very specific type of exciting as $f_c = P_c \cos \Omega t$, $f_s = P_s \cos \Omega t$, solutions of (7) and (8) are obtained approximately in the form eq.(9) with (10) in the steady state of response, and the stability of the response can be discussed from these solutions. If small disturbances are added to the steady response in such form as shown in eq.(11) and with the neglect of higher order terms with respect to disturbance parameter, the condition that non-trivial disturbance parameter exist is represented as the eq.(12) with respect to λ . If a root of this equation, λ , has a real part of positive value, the response is divergent, that is, unstable. The unstable and stable regions of the response were examined about two cases as,

- I. the case only exciting mode exists:
 - (i) unstable region caused by self disturbance eq.(14)
 - (ii) unstable region caused by appearance of adjoint mode eq.(15)
- II. the case traveling mode exists: stable region can be calculated as the region where roots of eq.(18) are all negative only.

As an example the case of clumped boundary at $\phi_0 = 135^\circ$ and the selection of orders of Legendre function as $l_i \equiv i$ ($i=1 \sim 5$) was calculated numerically and the response curves and the limitation of the unstable or stable region of case I and II were depicted in Fig.2 and 3, respectively. Fig.2 shows the increase of unstable region of exciting mode due to the appearance of adjoint mode. The region bounded by LL and UL in Fig.3 implies stable region of traveling mode, and in the right hand side of point Q the traveling mode does not exist. The point Q coincides to the point Q in Fig.2. This indicates that unstable region of exciting mode due to appearance of adjoint mode is coincident to stable region of traveling mode. That is, traveling mode appears in this region as the response.

The formation of orthogonal deflection modes and a numerical example of the characteristics of the response of these orthogonal modes were also shown, and moreover, the case with fully filled liquid was examined.

*Kyoto University ** Nippon Kokan Co.Ltd. *** Shin Nippon Seitetsu Co.Ltd.