

(7) 大口径 T-joint hole を有する鋼管の応力集中について

埼玉大学 奥村敏恵 埼玉大学 秋山成興 東京電機大学 ○ 青柳 栄

〔1〕 はじめに

開口を有する円筒の弾性応力解析（開口部近傍の応力集中問題）は各種のシェル構造物の設計上、不可欠な問題であり、たとえば、円孔を有する円筒が一樣軸引張、ねじりを受ける場合について、開口部近傍の撓乱応力を解析するために、shallow shellの基礎方程式を用いる解析的研究や、あるいは有限要素法による研究が行なわれている。この種の問題に対する主な研究目的は、円筒の曲率が最大応力集中率に及ぼす影響を定量的に定めることにあるが、従来の研究は解析結果が $a/R < 1/2$ (a : 円孔の半径, R : 円筒の半径) に限られている傾向にある。一般に開口の形状が non-circular になると、解析的手法はさらに複雑化し、たとえば円孔を有する円筒の一樣軸引張に関する研究でも解析結果は、円筒のディメンションに比し、小さな円孔の場合にしか適用できないと報告されている。解析的研究に関しては、特殊関数の数値計算上の問題が、従来の研究を、円筒のディメンションに比し小さな開口を持つ場合に限っているようである。

以上の観点より、大口径、non-circular の開口を有する円筒の弾性応力挙動に関する解析的研究は、この分野の残された重要な研究テーマと思われる。本研究は、まず円孔を有する円筒について従来のほとんどの研究の場合のような、shallow shell の基礎方程式の解を Krylov function と Hankel function で表示し、これらを級数展開して数値計算を行なうという手法から離れ、基礎方程式の解を Kelvin function で表示して数値計算を行なった。この解析により、大口径の円孔について、円筒の曲率が最大応力集中率に及ぼす影響を定量的に明らかにした。次に、non-circular hole の例として、T-joint hole (T-type tubular joint の場合に生ずる開口) を取り上げ、Boundary Perturbation Method を用いて解析した。ここでは、最大応力集中率について、円孔と T-joint hole の解析結果を比較する。本研究は最後に指摘するように、管径比の大きい T 型鋼管継手の応力解析の基礎をなすものと思われる。なお、数値解析例は、円筒の一樣軸引張に関する結果を報告する。数値計算は、東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 を利用した。

〔2〕 円孔を有する円筒の弾性応力解析

2.1 基礎方程式とその解

開口近傍の撓乱応力の解析のために、shallow shell の基礎方程式を用いる。これは円筒シェルの場合、次式で表わされる。(Fig.1 参照)

$$\Delta \Delta \Psi - 4\mu^2 i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.1)$$

ここで、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \mu = \frac{a}{2\sqrt{Rc}}$$

$$\Psi = F - iEhcw$$

F ; Airy's stress function, w ; normal displacement, $i = \sqrt{-1}$

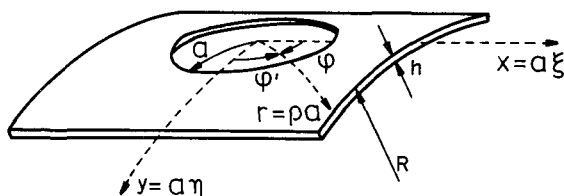


Fig.1 Coordinate systems

E ; Young's modulus, ν ; Poisson's ratio, h ; シェル厚, $c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$

円筒の平面展開上に極座標系 (ρ, φ') を導入し $(\xi = \rho \sin \varphi', \eta = \rho \cos \varphi')$, 基本方程式, (2.1) の極座標系での解を求めると,

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(-1)^k \tilde{A}_n + \tilde{B}_n\} J_k[\mu \rho (-i)^{1/2}] H_n^{(1)}[\mu \rho (-i)^{1/2}] e^{i(k+n)\varphi'} \quad (2.2)$$

となる。ここで $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$ は複素未定定数である。また $(-i)^{1/2} = e^{3\pi i/4}$ を採用し, Hankel function の asymptotic behavior を考慮し, $H_n^{(2)}$ は (2.2) から除かれている。 $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$ に条件を課すことにより, (2.2) より x, y 軸に関して doubly symmetric な解 (円筒の一樣軸引張に相当), あるいは doubly skew symmetric な解 (円筒のねじりに相当) などを導くことが可能である。

2.2 二軸対称解と Kelvin function の導入

二軸対称解は次のように表わされる。ただし, 次式で $\epsilon_m = \begin{cases} 1/2 & (m=0) \\ 1 & (m \geq 1) \end{cases}$ とする。

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n + iB_n) \epsilon_m (-1)^m H_n^{(1)}[\mu \rho e^{3\pi i/4}] \{J_{2m-n}[\mu \rho e^{3\pi i/4}] - J_{-2m-n}[\mu \rho e^{3\pi i/4}]\} \cos 2m\varphi \quad (2.3)$$

(2.3) に $\rho = r/a$ を代入し, また Bessel function, Hankel function と Kelvin function の関係式

$$J_\alpha(xe^{3\pi i/4}) = ber_\alpha x + i bei_\alpha x, H_\alpha(xe^{3\pi i/4}) = her_\alpha x + i hei_\alpha x = \frac{2}{\pi} (kei_\alpha x - iker_\alpha x)$$

を用いて (2.3) を Kelvin function で表示すれば,

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n + iB_n) (I^{nm} + iA^{nm}) \cos 2m\varphi \quad (A_n, B_n; \text{実数の未定定数}) \quad (2.4)$$

となる。ここで, I^{nm}, A^{nm} は次式で与えられる。 $\left(\mu^* = \frac{1}{2\sqrt{Re}}\right)$

$$I^{nm} = (-1)^m \epsilon_m \frac{2}{\pi} [kei_n(\mu^* r) \{ber_{2m-n}(\mu^* r) + ber_{-2m-n}(\mu^* r)\} + ker_n(\mu^* r) \{bei_{2m-n}(\mu^* r) + bei_{-2m-n}(\mu^* r)\}] \quad (2.5)$$

$$A^{nm} = (-1)^m \epsilon_m \frac{2}{\pi} [kei_n(\mu^* r) \{bei_{2m-n}(\mu^* r) + bei_{-2m-n}(\mu^* r)\} - ker_n(\mu^* r) \{ber_{2m-n}(\mu^* r) + ber_{-2m-n}(\mu^* r)\}]$$

2.3 断面力, モーメントの表示式

応力, 変形が二軸対称の場合の複素応力関数 Ψ が (2.4) のように得られた。(2.4) 式より極座標系での断面力, モーメントの表示式が得られる。例として, 境界条件に用いるもののみを示す。

$$Q_{rr} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) Re\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{r} I_r^{nm} + \frac{1}{r^2} I_{\varphi\varphi}^{nm}\right) A_n - \left(\frac{1}{r} A_r^{nm} + \frac{1}{r^2} A_{\varphi\varphi}^{nm}\right) B_n \right\} \cos 2m\varphi \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{rra}^{nm} A_n + F_{rrb}^{nm} B_n) \cos 2m\varphi \quad (2.6a)$$

$$Q_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) Re\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} I_{\varphi}^{nm} - \frac{1}{r} I_r^{nm}\right) A_n - \left(\frac{1}{r^2} A_{\varphi}^{nm} - \frac{1}{r} A_r^{nm}\right) B_n \right\} \sin 2m\varphi \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (F_{r\varphi a}^{nm} A_n + F_{r\varphi b}^{nm} B_n) \sin 2m\varphi \quad (2.6b)$$

$$M_{rr} = -D(\kappa_{rr} + \nu \kappa_{\varphi\varphi}) = -C \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \right\} I m\Psi \\ = -C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ A_{rr}^{nm} + \nu \left(\frac{1}{r} A_r^{nm} + \frac{1}{r^2} A_{\varphi\varphi}^{nm}\right) \right\} A_n + \left\{ I_{rr}^{nm} + \nu \left(\frac{1}{r} I_r^{nm} + \frac{1}{r^2} I_{\varphi\varphi}^{nm}\right) \right\} B_n \right] \cos 2m\varphi \quad (2.6c)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (W_{rra}^{nm} A_n + W_{rrb}^{nm} B_n) \cos 2m\varphi \\
Q_{rn} &= -D \frac{\partial}{\partial r} r^2 w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \\
&= c \left\{ \left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + (1-\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\} I m \Psi \\
&= c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(A_{rrr}^{nm} - \frac{1}{r^2} A_r^{nm} + \frac{1}{r} A_{rr}^{nm} - \frac{2}{r^3} A_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1}{r^2} A_{\varphi\varphi r}^{nm} - \frac{1-\nu}{r^3} A_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1-\nu}{r^2} A_{r\varphi\varphi}^{nm} \right) A_n \right. \\
&\quad \left. + \left(\Gamma_{rrr}^{nm} - \frac{1}{r^2} \Gamma_r^{nm} + \frac{1}{r} \Gamma_{rr}^{nm} - \frac{2}{r^3} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1}{r^2} \Gamma_{\varphi\varphi r}^{nm} - \frac{1-\nu}{r^2} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1-\nu}{r^2} \Gamma_{r\varphi\varphi}^{nm} \right) B_n \right\} \cos 2m\varphi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (K_{rna}^{nm} A_n + K_{rnb}^{nm} B_n) \cos 2m\varphi \tag{2.6 b}
\end{aligned}$$

(2.6) 式で、 Γ^{nm} , A^{nm} の subscript r は、 Γ^{nm} , A^{nm} を r で微分することを意味し、また、subscript φ は、 $\Gamma_{\varphi}^{nm} = (-2m) \Gamma^{nm}$, $A_{\varphi\varphi}^{nm} = (-4m^2) A^{nm}$, 等を意味する。

2.4 境界条件

円筒の一樣軸引張に対する境界条件を示す。Unperforated Cylinder の一樣軸引張応力状態 (upper bar で示す)

$$\bar{Q}_{rr} = \frac{1}{2} qh(1 + \cos 2\varphi), \bar{Q}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} qh(1 - \cos 2\varphi), \bar{Q}_{r\varphi} = -\frac{1}{2} qh \sin 2\varphi, \bar{M}_{rr} = \bar{M}_{\varphi\varphi} = \bar{M}_{r\varphi} = \bar{Q}_{rn} = \bar{Q}_{\varphi n} = 0 \tag{2.7}$$

を基本応力状態に選ぶ。円孔を有する円筒に対しては、円孔の edge $r=a$ で stress-free の条件

$$(i) Q_{rr} + \bar{Q}_{rr} = 0 \quad (ii) Q_{r\varphi} + \bar{Q}_{r\varphi} = 0 \quad (iii) M_{rr} = 0 \quad (iv) Q_{rn} = 0 \tag{2.8}$$

を満足させればよい。(2.6), (2.7) を (2.8) に代入し、Fourier 係数を等置すれば、境界条件は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
(i) \sum_{n=0}^{\infty} (F_{rra}^{nm} A_n + F_{rrb}^{nm} B_n) &= \begin{cases} qh/2 & (m=0, 1) \\ 0 & (m \geq 2) \end{cases} & (ii) \sum_{n=0}^{\infty} (F_{r\varphi a}^{nm} A_n + F_{r\varphi b}^{nm} B_n) &= \begin{cases} qh/2 & (m=1) \\ 0 & (m \geq 2) \end{cases} \\
(iii) \sum_{n=0}^{\infty} (W_{rra}^{nm} A_n + W_{rrb}^{nm} B_n) &= \begin{cases} 0 & (m \geq 0) \end{cases} & (iv) \sum_{n=0}^{\infty} (K_{rna}^{nm} A_n + K_{rnb}^{nm} B_n) &= \begin{cases} 0 & (m \geq 0) \end{cases} \tag{2.9}
\end{aligned}$$

(2.9) より明らかなように、 A_n , B_n は理論的には、無限次元の線型代数方程式系より決定されるが、実際の数値計算では、(2.6) のように級数表示される断面力、モーメントが、収束するような点で、 n, m を打ち切ることになる。本解析では、(2.9) の係数行列が正方となるように、つまり、 $n=2l+4$, $m=l+2$ ($l=1, 2, 3, \dots$) のように、 n, m を選び、Gauss-Jordan 法で連立方程式を解いた。一樣軸引張に対し、最も大きな応力が現われる φ 方向の面内力 $Q_{\varphi\varphi}$ を

$$Q_{\varphi\varphi} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} R e \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\Gamma_{rr}^{nm} A_n - A_{rr}^{nm} B_n) \cos 2m\varphi = f_0 + f_1 \cos 2\varphi + f_2 \cos 4\varphi + f_3 \cos 6\varphi + \dots$$

と表示した時の Fourier 係数 f_m を Table 1 に示す。これは $R/h=30.03 \text{ cm}/0.9 \text{ cm}=33.07$ で $a/R=1/5, 1/2, 2/3$ ($\mu=1.05, 2.61, 3.48$) の場合の値である。Table 1 より大口径の円孔の場合でも、打ち切りは、 $m=4, n=8$ で十分であると判断される。この場合には、16 次までの Kelvin function を用いることになる。最終的な応力状態は、(2.6) と (2.7) を重ねあわせて得られる。以下に数値計算例として、 $a/R=2/3, h/R=33.07$ ($\mu=3.48$) の場合の、 φ 方向の腹応力、曲げ応力集中率を示す (nominal stress = $\sigma_0 = q$)。

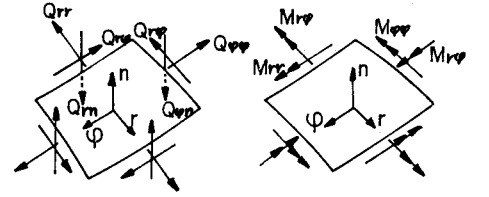


Fig.2 Stress resultants

Fig. 3.1 より、膜応力集中率は $\varphi = \pi/2$ で 6.6 となり、円孔を有する板の場合に比べ、2 倍以上の値をとることがわかる。しかし、減衰は速く、 $\rho = 2.0$ の点で基本応力状態になる。(Fig. 3.2) また大口径の場合、曲げ応力は $\rho = 1.0 \sim 2.0$ の間で顕著であるが、最大曲げ応力集中率は $\mu = 3.48$ の場合 2 程度である。

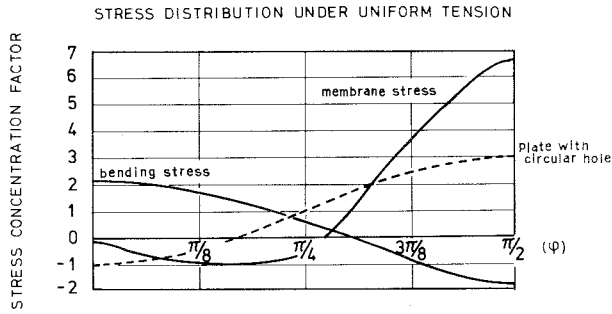


Fig. 3.1 CIRCUMFERENTIAL MEMBRANE AND BENDING STRESS (at $r = a$)

[3] T-joint hole を有する円筒の弾性応力解析

3.1 Boundary Perturbation について

T-joint hole の平面展開図を Fig. 4 に、また T 型継手の管径比 $\varepsilon = R_I / R_{II}$ (R_I ; 枝管の半径, R_{II} ; 主管の半径) を変えた時の T-joint hole の形状変化を Table 2 に示す。 ε が $1/3$ 以下の場合には、T-joint hole の形状は、ほとんど円形に近く、 ε が大きいほど、T-joint hole の形状は円から deviate し、平均径の仮想円 (一点鎖線) に対する deviation は $\varepsilon = 2/3$ でも約 4.5 % 程度である。

この事実に着目し、 ε を微小パラメータに選び、Boundary perturbation を導入して T-joint hole を有する円筒の解析を行なった。T-joint hole を平面展開した時の径 a は φ の関数であり、かつ ε を含んでいる。

$$a(\varphi, \varepsilon) = [R_I^2 \cos^2 \varphi + \{R_{II} \sin^{-1}(\frac{R_I}{R_{II}} \sin \varphi)\}^2]^{1/2}$$

$$= r_0 [1 + \varepsilon_{ECC} (2 \sin^4 \varphi - 1)] \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{ECC} = \frac{\frac{1}{12} \varepsilon^2}{1 + \frac{1}{12} \varepsilon^2}, \quad r_0; \text{ 仮想円 (平均径) の半径}$$

そこで [2] で得られた (2.7) 式の Ψ を $\Psi^{(j)}$ と書きかえ、T-joint hole に対する複素応力関数を、

Table 1
Values of f_m for three truncation numbers
 $f_m = \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_n m A_n - \Lambda_n m B_n)$

	$m=3 \quad n=6$	$m=4 \quad n=8$	$m=5 \quad n=10$
$\mu=1.05$	f_0 0.51622826	0.51622826	0.51622826
	f_1 -1.75829124	-1.75829124	-1.75829124
	f_2 0.16566187	0.16566187	0.16566187
	f_3 -0.00215450	-0.00215439	-0.00215439
	f_4 -----	0.00000219	0.00000219
$\mu=2.61$	f_0 0.66754627	0.66754699	0.66754699
	f_1 -2.33140755	-2.33141994	-2.33142090
	f_2 1.15331364	1.15334415	1.15334320
	f_3 -0.02693747	-0.02661480	-0.02661400
	f_4 -----	0.00243964	0.00244690
$\mu=3.48$	f_0 0.72534055	0.72532672	0.72532090
	f_1 -2.46753216	-2.46778107	-2.46778202
	f_2 1.74345684	1.74304390	1.74304962
	f_3 -0.11253041	-0.11304790	-0.11302710
	f_4 -----	0.00378261	0.00412713
	f_5 -----	-----	0.00008373

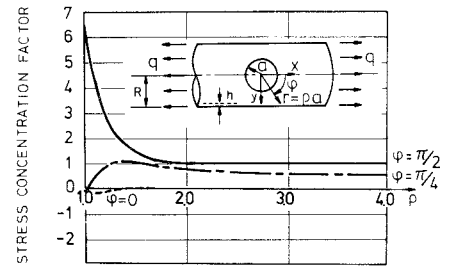


Fig. 3.2 CIRCUMFERENTIAL MEMBRANE STRESS

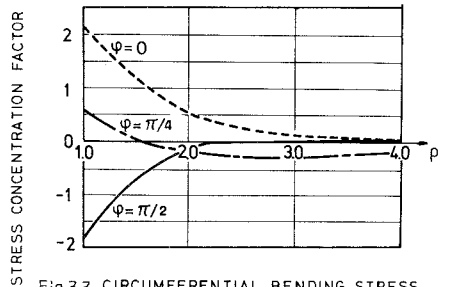


Fig. 3.3 CIRCUMFERENTIAL BENDING STRESS

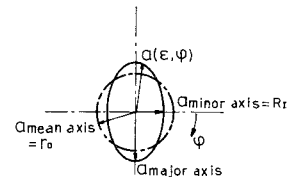


Fig. 4 T-joint hole in the developed cylinder surface

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \Psi^{(j)} \quad (3.2)$$

$$\Psi^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n^{(j)} + iB_n^{(j)}) \epsilon_m (-1)^m H_n^{(1)} [\mu(\epsilon, \varphi) \rho e^{3\pi i/4}] \{J_{2m-n} [\mu(\epsilon, \varphi) \rho e^{3\pi i/4}] + J_{-2m-n} [\mu(\epsilon, \varphi) \rho e^{3\pi i/4}]\} \cos 2m\varphi \quad (3.3)$$

と仮定する。

$$\mu(\epsilon, \varphi) = \frac{a(\epsilon, \varphi)}{2\sqrt{Rc}} = \frac{4\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2} \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} [1 + \epsilon_{RCC} (2\sin^4 \varphi - 1)] \quad (3.4)$$

であるから、Bessel, Hankel も argument に微小パラメータを含んでいる。今、新しい変数、

$$\epsilon_0 = \epsilon_{RCC} (2\sin^4 \varphi - 1), \quad \beta = \frac{4\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2} \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \rho \quad (3.5)$$

を導入すれば、 $\mu(\epsilon, \varphi) \rho e^{3\pi i/4} = \beta(1 + \epsilon_0) e^{3\pi i/4}$ となる。そこで円筒関数の加法定理を用いて、Bessel function, Hankel function を ϵ_0 のべき乗に展開し、(3.3) に代入すれば、

$$\Psi^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_0^k \Psi_k^{(j)} \quad (3.6)$$

と表わし得る。しかるに、(3.5) より、 $\epsilon = 2/3$ の場合でも $\epsilon_0 = 0.037$ であることを考慮し、(3.6) の第1項のみを採用すれば、T-joint hole に対する複素応力関数として、

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \Psi_0^{(j)} \quad (3.7)$$

$$\Psi^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n^{(j)} + iB_n^{(j)}) (-1)^m \epsilon_m H_n^{(1)} [\mu_m \rho e^{3\pi i/4}] \{J_{2m-n} [\mu_m \rho e^{3\pi i/4}] + J_{-2m-n} [\mu_m \rho e^{3\pi i/4}]\} \cos 2m\varphi \quad (3.8)$$

$$\beta = \frac{4\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2} \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \rho = \frac{r_0}{2\sqrt{Rc}} \rho = \mu_m \rho \quad (3.9)$$

が得られる。 $\Psi_0^{(j)}$ の subscript 0 は平均径の仮想円を意味する。この場合も Kelvin function で表示すれば、 Ψ は次のようになる。

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{m=0}^{\infty} (A_n^{(j)} + iB_n^{(j)}) (\Gamma^{nm} + iA^{nm}) \cos 2m\varphi \quad (3.10)$$

3.2 局所座標系での断面力、モーメントの表示式

(3.10) より、極座標系での断面力、モーメントの表示式は、2.3 と同じプロセスを経て、

$$\left. \begin{aligned} Q_{rr} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{rra}^{nm} A_n^{(j)} + F_{rrb}^{nm} B_n^{(j)}) \cos 2m\varphi, \\ M_{rr} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (W_{rra}^{nm} A_n^{(j)} + W_{rrb}^{nm} B_n^{(j)}) \cos 2m\varphi, \\ Q_{\varphi\varphi} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{\varphi\varphi a}^{nm} A_n^{(j)} + F_{\varphi\varphi b}^{nm} B_n^{(j)}) \cos 2m\varphi, \\ M_{\varphi\varphi} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (W_{\varphi\varphi a}^{nm} A_n^{(j)} + W_{\varphi\varphi b}^{nm} B_n^{(j)}) \cos 2m\varphi, \\ Q_{r\varphi} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{r\varphi a}^{nm} A_n^{(j)} + F_{r\varphi b}^{nm} B_n^{(j)}) \sin 2m\varphi, \\ M_{r\varphi} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (W_{r\varphi a}^{nm} A_n^{(j)} + W_{r\varphi b}^{nm} B_n^{(j)}) \sin 2m\varphi, \\ Q_{r\theta} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (K_{r\theta a}^{nm} A_n^{(j)} + K_{r\theta b}^{nm} B_n^{(j)}) \cos 2m\varphi, \\ Q_{\varphi\theta} &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (K_{\varphi\theta a}^{nm} A_n^{(j)} + K_{\varphi\theta b}^{nm} B_n^{(j)}) \sin 2m\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Table 2 Shape of T-joint hole

minor axis = R ₁ (cm)	ε = R ₁ /R ₂	R = 30.03 (cm)		①-② X100 (%)
		major axis ① (cm)	mean axis ② (cm)	
3.00	1/10 (0.100)	3.005	3.0025	0.25
6.00	1/5 (0.200)	6.041	6.021	0.33
8.00	4/15 (0.267)	8.098	8.049	0.61
10.00	1/3 (0.333)	10.195	10.098	0.96
12.00	2/5 (0.400)	12.345	12.173	1.41
15.00	1/2 (0.500)	15.706	15.353	2.30
18.00	3/5 (0.600)	19.302	18.651	3.49
20.00	2/3 (0.667)	21.887	20.943	4.51

と表示される。 F, W, K については、(2.6) 式を参照されたい。

これらを用いれば、T-joint hole の境界線の法線方向、接線方向にとった局所座標系 (ν, t) での断面力、モーメントは、

$$Q_{\nu\nu} = Q_{rr} \cos^2 \Phi + Q_{\varphi\varphi} \sin^2 \Phi - 2 Q_{r\varphi} \sin \Phi \cos \Phi$$

$$Q_{\varphi n} = Q_{r\varphi} (\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi) + (Q_{rr} - Q_{\varphi\varphi}) \sin \Phi \cos \Phi$$

$$M_{\nu\nu} = M_{rr} \cos^2 \Phi + M_{\varphi\varphi} \sin^2 \Phi + 2 M_{r\varphi} \sin \Phi \cos \Phi, \quad Q_{\nu n} = Q_{rn} \cos \Phi - Q_{\varphi n} \sin \Phi \quad (3.12)$$

等により得られる。 $\cos \Phi, \sin \Phi$ も ε を含むことに注意すれば、これらは、

$$Q_{\nu\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_{\nu\nu}^{(j)}, \quad Q_{\nu t} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_{\nu t}^{(j)}, \quad M_{\nu\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j M_{\nu\nu}^{(j)}, \quad Q_{\nu n} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j Q_{\nu n}^{(j)} \quad (3.13)$$

と表示し得る。例として、 $Q_{\nu\nu}^{(j)}$ を示す。

$j = 0, 1$ の場合

$$Q_{\nu\nu}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(F_{rra}^{nm} A_n^{(j)} + F_{rrb}^{nm} B_n^{(j)} \right) \cos 2m\varphi$$

$j = 2, 3$ の場合

$$\begin{aligned} Q_{\nu\nu}^{(j)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{rra}^{nm} A_n^{(j)} + F_{rrb}^{nm} B_n^{(j)}) \cos 2m\varphi \\ & - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{r\varphi a}^{nm} A_n^{(j-2)} + F_{r\varphi b}^{nm} B_n^{(j-2)}) \cdot \frac{2}{3} \sin 2m\varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$j = 4$ の場合

$$\begin{aligned} Q_{\nu\nu}^{(4)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{rra}^{nm} A_n^{(4)} + F_{rrb}^{nm} B_n^{(4)}) \cos 2m\varphi \\ & - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (F_{r\varphi a}^{nm} A_n^{(2)} + F_{r\varphi b}^{nm} B_n^{(2)}) \sin 2m\varphi \cdot \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ & - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (F_{r\varphi a}^{nm} A_n^{(0)} + F_{r\varphi b}^{nm} B_n^{(0)}) \sin 2m\varphi \cdot \frac{19}{45} \sin^5 \varphi \cos \varphi \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{\varphi\varphi a}^{nm} A_n^{(0)} + F_{\varphi\varphi b}^{nm} B_n^{(0)}) \cos 2m\varphi \cdot \frac{4}{9} \cos^2 \varphi \sin^6 \varphi \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{rra}^{nm} A_n^{(0)} + F_{rrb}^{nm} B_n^{(0)}) \cos 2m\varphi \left(-\frac{4}{9} \cos^2 \varphi \sin^6 \varphi \right) \end{aligned}$$

同様に、(2.7) 式に示される基本応力状態も (3.12) より (ν, t) 座標系に変換すると、

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\nu\nu} = & \frac{1}{2} qh (1 + \cos 2\varphi) + \frac{2}{3} qh \sin 2\varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi \varepsilon^2 + \left(-\frac{4}{9} \cos 2\varphi \cos^2 \varphi \sin^6 \varphi \right. \\ & \left. + \frac{19}{45} \sin 2\varphi \sin^5 \varphi \cos \varphi \right) qh \varepsilon^4 = \bar{Q}_{\nu\nu}^{(0)} + \varepsilon^2 \bar{Q}_{\nu\nu}^{(2)} + \varepsilon^4 \bar{Q}_{\nu\nu}^{(4)} \quad (3.15 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{\nu t} = & -\frac{1}{2} qh (1 + \cos 2\varphi) + \frac{2}{3} qh \cos 2\varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi \varepsilon^2 + \left(\frac{4}{9} \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \sin^6 \varphi \right. \\ & \left. + \frac{19}{45} \cos 2\varphi \sin^5 \varphi \cos \varphi \right) qh \varepsilon^4 = \bar{Q}_{\nu t}^{(0)} + \varepsilon^2 \bar{Q}_{\nu t}^{(2)} + \varepsilon^4 \bar{Q}_{\nu t}^{(4)} \quad (3.15 b) \end{aligned}$$

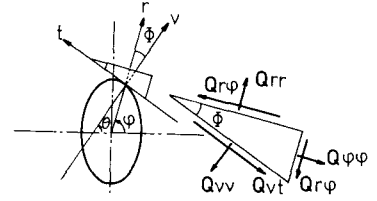


Fig.5 Stress resultants in the local coordinate

となる。

3.3 境界条件

円孔の場合と同様, stress-free の条件を満足させる。

$$(i) Q_{\nu\nu} + \bar{Q}_{\nu\nu} = 0 \quad (ii) Q_{\nu t} + \bar{Q}_{\nu t} = 0 \quad (iii) M_{\nu\nu} = 0 \quad (iv) Q_{\nu n} = 0 \quad (3.16)$$

(3.13), (3.15) を (3.16) に代入し, まず, ϵ の同べきを等置すれば

$$[I] \quad j=0, 2, 4 \text{ に対し,} \quad [II] \quad j=1, 3 \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned} Q_{\nu\nu}^{(j)} + \bar{Q}_{\nu\nu}^{(j)} &= 0 & Q_{\nu\nu}^{(j)} &= 0 \\ Q_{\nu t}^{(j)} + \bar{Q}_{\nu t}^{(j)} &= 0 & Q_{\nu t}^{(j)} &= 0 \\ M_{\nu\nu}^{(j)} &= 0 & M_{\nu\nu}^{(j)} &= 0 \\ Q_{\nu n}^{(j)} &= 0 & Q_{\nu n}^{(j)} &= 0 \end{aligned}$$

となる。[II] は, 同次の連立方程式となり, 係数行列が non-singular であることより, $A_n^{(1)} = B_n^{(1)} = A_n^{(3)} = B_n^{(3)} = 0$ となる。[I] については, さらに, 断面力, モーメントを, Fourier 表示し, Fourier 係数を等置することにより, $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$ ($j=0, 2, 4$) を決定する連立方程式を誘導した。以下に $\epsilon=1/2$ の T-joint hole の一様軸引張に対する数値解析結果を示す。Fig. 6 に示すように本解析による T-joint hole の最大膜応力集中率 ($\varphi=\pi/2$) は, 短径を半径 (R_1) とする円孔の解よりも, $5.5 \rightarrow 6.6$ と約 17 % 増加する。曲げ応力集中率は $\varphi=\pi/2$ で $1.53 \rightarrow 1.99$ となる。 $\epsilon=1/2$ の場合, T-joint hole の, 平均径の仮想円に対するズレは高々 2.3 % である (Table 2) ことを考えると, これらの増加率はかなり大きいといえる。なお, 実験解析も現在あわせて行っている。

[4] おわりに 以上の解析により次のことが指摘される。

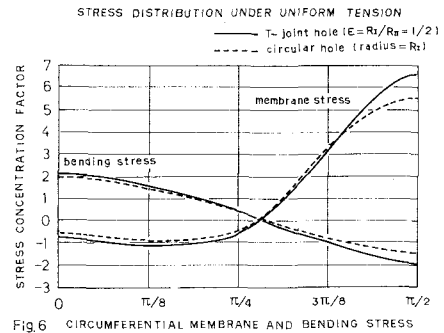


Fig. 6 CIRCUMFERENTIAL MEMBRANE AND BENDING STRESS

T 型鋼管継手の応力解析に関しては, 接合線を近似的に円とみなして扱っている場合が多く, 解析結果は管径比 ϵ の小さい場合に限られている。しかしながら, $\epsilon > 1/2$ の T 型継手については主管の解として円孔を有する円筒の解を用いることには無理があり, ここに示した T-joint hole の解を用いることが必要であると思われる。

STRESS ANALYSIS OF CYLINDER WITH A T-JOINT HOLE

Toshie Okumura*, Narioki Akiyama** and Sakae Aoyagi***

The presence of a hole in plates and shells generally introduces high stresses around the hole. Therefore the estimation of stress concentration around such a hole is of considerable importance in the practical design of tubular structures. The stress distribution in the vicinity of a circular hole in a flat plate was investigated for the first time by Kirsch. Many solutions for other relating problems such as non-circular hole have been studied by several researchers.

In the case of a cylindrical shell which has a hole of any shape, it may be easily expected that the curvature of the cylinder has a great influence on the stress distribution around the hole, especially on the maximum stress concentration. It may also be remarked in this case that the influence of the hole is restricted to a small area in its neighbourhood, so that the equations of shallow shell theory will be applied to analyze the disturbance of stresses in this region.

During the last two decades extensive and various theoretical analysis on the cylinder with a circular hole have been studied by many researchers. The pioneer who dealt with this problem was Lurie. The results for the problem which were derived by Lurie and nearly all subsequent authors are limited to a small hole, i.e. to a circular hole with a diameter smaller than about $1/4$ of the diameter of the cylinder. On the other hand Savin has studied a considerable amount of works on the stresses in thin shells with curvilinear hole of any shape. Murthy has investigated the cylinder with an elliptic hole. Their works, however, are also limited to a small hole in comparison with the dimension of the cylinder. Hence at present more complete study on large diameter hole of various non-circular shapes still remains to be treated.

This paper consists of two parts. In the first part, close investigations are made on the stress distribution in the vicinity of a circular hole in a cylindrical shell, which is under uniform axial tension. The results of the numerical calculation are presented for large value of a/R . In the second part, T-joint hole, which has a shape of the intersection of T-type tubular joint, is treated. The analysis is based on shallow shell theory, and in the study of T-joint hole, Boundary Perturbation Method is introduced. From these analysis, analytical solution can be obtained for stresses around T-joint hole in a cylindrical shell under axial tension. The numerical results for T-joint hole are reported and compared with the results of circular hole.

*, ** Saitama University
*** Tokyo DENKI University