(5) 橋トラスの幾何学的形状の決定に関する基礎的考察

京都大学工学部　白石成人
京都大学工学部　○吉田均

1. 緒論

要求される機能を十分に果たし、かつ安全性の条件をも満たす構造物としては種々のものが考えられる。このことはある規定された荷重条件下においても、設計には多くの自由度があることを示している。一般に構造設計の問題はハイアラーキーを構成している。Templeman[1]によると以下のように設計過程を分類することが可能である。①トポロジーに関する決定　②ジオメトリーに関する決定　③構造物部材の全体寸法　④要素の詳細設計。①②の決定は設計の第一段階に位置づけられ、設計の概要を決定する非常に重要なものである。従来これらの決定は直感、経験等に基づいてなされてきたが、この部分の変更は③④のプロセスに非常に大きな影響を与え、またそのメカニズムは非常に複雑でかつ多くの要因が関連しており、その合理的な決定は非常に困難である。

本研究は①②に関連して橋トラスの幾何学的形状の特性を探り、最適設計の考え方を用い、設計における形状決定について考察を行なうものである。橋トラスは全体としてみると骨組系とみなすことができる。このとき、その幾何学的形状はトポロジーとジオメトリーにより規定される。トラス構造物のジオメトリーの影響についてはこれまでかなりの研究がなされており、ジオメトリーを最適化過程に含めることにより大幅な重量あるいは費用の節減が図れることが報告されている[2]。これに対し、トポロジーはハイアラーキーの頂点に立つものであるにもかかわらず、2,3のものを除きこれまであまり扱われていない[3]。これはトポロジーの問題が本質的に離散問題であり、直接的に最適化過程に含めることが難しいことがその原因であろう。本研究ではまずこのトポロジーとジオメトリーの関連に注目し、簡単な例を用い、橋トラスの場合、支持点に関するものを除けばジオメトリーが部材あるいは節点のトポロジーを支配することを示す。このことに基き、以下主としてジオメトリーに注目して形状の影響を探る。ジオメトリーを最適化に含めるためには節点座標を設計変数として考える必要がある。このことは設計変数の増加を意味する。また、部材断面積等の他の変数とは次元の異なるものを扱うことになり、解の収束性および計算容量、演算時間で問題が生じることになる。同時にトポロジーの影響を把握するには、いろいろな場合を想定し代表的なパラメーターについて比較検討することが必要である。以上の諸条件を考えるとき、形状の影響を調べるためには簡単に解が得られる手法が不可欠である。本研究では、Moses, Vanderplaats[4], Kirsch[5]等の考え方を基にし、設計変数を2つのグループに分け、さらに最適規準設計法の考え方を導入し近似的に最適な値を求める手法を提案する。まず、橋トラスの形状の認識の仕方およびその構成要素であるトポロジーとジオメトリーの関連について考察を加える。次に近似設計手法の概略を説明する。さらに数値計算を行なうことにより、スパン長の影響あるいは支持点の影響を考察し、最後に天草一号橋のモデルに本方法を適用し、その有効性について検討を加える。

2. 橋トラスの形状およびその構成要素

トラスに限らず構造物の形状を支配するのは使用目的およびそれに付随する外力である。本研

究で考究する命題は〝外荷重が規定された時、与えられた機能を満たす橋トラスの最良の形状を決定せよ〟ということになる。そのためには橋トラスの形状をどのように認識し規定するかが重要である。トラスは明らかに節点および部材より構成されるものであり、かつ力学的に安定でなければならないという条件から、その形状は一つの非分離グラフとして一般に表現される。まずこのグラフを規定するのはトポロジーである。つまり、いくつの点あるいは線よりそのグラフが構成されており、その結合の仕方はどうであるかということである。つぎにこのグラフのモデルが各物理量をもつと考えた時問題となってくるのが線に対応する部材の太さ、および節点の位置である。これら節点、部材に関するものを分離し、概念的に「節点の集合」、「部材の集合」というものを考える。この節点の集合を節点系、部材の集合を部材系という言葉で表わし、以下のように分類する。

節点系 { トポロジーに関する要素 ------ 節点の個数
　　　 { ジオメトリーに関する要素 --- 節点の位置

部材系 { トポロジーに関する要素 ------ 部材の数　配置
　　　 { ジオメトリーに関する要素 --- 部材長　部材断面積

この時、明らかに部材系というものは節点系の下に位置し、節点系の支配を大きく受ける。このように考えた時、トラスの形状を決定するためには以下の４つの項目について解答を与えなければならない。

(1) いくつの節点を設けるべきか　　(節点系の決定Ⅰ)
(2) それらの位置をどのようにするか　　(節点系の決定Ⅱ)
(3) いかにこれらの節点を結ぶか　　(部材系の決定Ⅰ)
(4) その時の部材断面積をいかにするか　(部材系の決定Ⅱ)

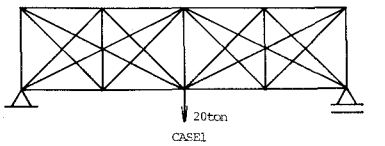
しかし、これら４項目の間には相互に関連が存在し、具体的に最適性の判断規準が与えられたとしても、どの一つでも明確でなければその有効性の判定を行なうことは困難である。

3. トポロジーとジオメトリーの関係

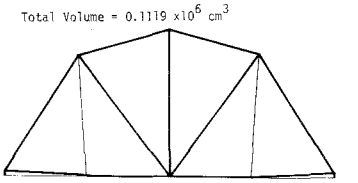
幾何学的形状に直接的に関連するのは、上記の(1)(2)(3)の項目である。判断規準としてその重量をとるならば、(4)の部材長、部材断面積は(1)(2)(3)から必然的に決定されるものと考えられる。よって、ここでは(i)部材系のトポロジーと節点系のジオメトリー(ii)部材系のトポロジーと節点系のトポロジーの２つの場合の関連を調べる。結論で述べたようにジオメトリーは連続量として扱うことができるがトポロジーは本質的に離散量であり直接的な最適化過程への導入は困難である。そこで、(i)の場合、Fig.1(a)に示すGround Structureを設定し、その後応力制約のもとで線形計画法を用い、不要な部材を取り除く手法を利用する。この時、ジオメトリーの影響はモンテカルロ法で上弦材の節点座標を発生させることにより考慮する。数値

Fig.1 Simply Supported Truss Model

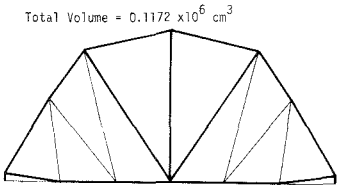
a) Ground Structure



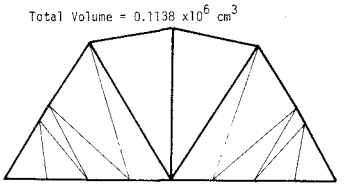
b) Optimal Configuration of Truss System with 10 Nodes



c) Optimal Configuration of Truss System with 14 Nodes

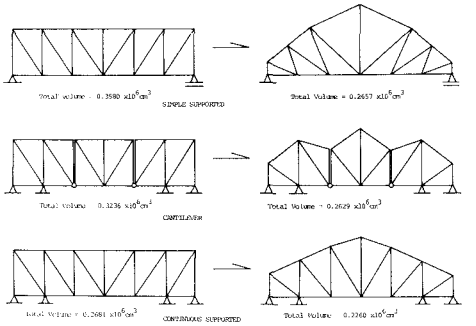


d) Optimal Configuration of Truss System with 18 Nodes



計算の結果 Fig. 1 (b) に示すものが最も軽くなり、節点位置が多少変化しても最小重量を与えるトポロジーは大体一つに決まることがわかった。つぎに、(ii)の場合も同様のモデルを用い、節点の個数を変化させて(i)と同じ操作を行なう。この時、Fig. 1 (c)(d) に示すものがその時の最小重量を与えている。この図で破線で示した部材は断面積がほとんど0で事実上不要な部材である。(図では不要な部材のみが集る節点は省略してある。) この結果から部材のトポロジーは節点の数にかかわらずほぼ一つに定まっていることがわかる。以上のことから荷重系が規定されており、支持条件および支持点の数が決められているならば、トポロジーはあまり変化しないことがわかった。そこで、つぎに支持点の影響を調べることにする。この時、トポロジーはあらかじめ規定し、節点位置を変化させてジオメトリーの影響を調べる。結果は Fig. 2 に示すように、形状は支持条件により大きく変化する。しかし、形状を固定させていた場合と比べると、連続、ゲルバー、単純支持の順に重くなるという傾向は同じである。以上のことから、形状を考慮して設計を行なう場合、次の手順に従うのが良いと考えられる。

Fig.2 Change of Geometry due to Supporting Condition



(1) 支持形式を決める。

(2) 節点数を決めた後、部材のトポロジーを決定する。

(3) その後、節点位置と部材断面積を設計変数として最適化を行なう。

4. 形状に影響を与える種々の力学的要因

一般に橋トラスはその機能から横に長く鉛直荷重が卓越し、全体として曲げ作用で抵抗する。この曲げ作用で抵抗することは、送電塔などとは異なる点であり、作用点から支持点への力の流れ(トラスであるから軸力として伝達される)を複雑にすると考えられる。しかし、一つの考え方としては曲げ作用で抵抗するということから、梁と同様に考え、上下弦材をフランジ、腹材をウェブと考えることは可能である。事実、簡単なトラスであれば、モーメントに関するつりあいから上下弦材、力のつりあいから腹材に生じる部材力が算定される。しかしながら、設計という面から考えると部材自身の座屈に対する安全性等の問題を考慮しなくてはならず、このようなアナロジーだけでは実際的に設計を行なうことは困難である。以下、設計において考慮されねばならない力学的要因を挙げ、その特性について若干の考察を加える。

① 許容応力(作用断面力に対する設計限界値)
② 座屈強度(圧縮力に対する安全限界値)
③ トラスの剛性(部材数および部材の配置方向に関係する力学的特性)
④ 支持形式(静定、不静定に関連する構造物の支持の条件)
⑤ 移動荷重等の荷重条件
⑥ その他(鋼種、2次応力等)

設計に許容応力のみが課せられている場合、もし構造が静定であるならば、その形状は力の流れの方向 大きく左右される。荷重が固定されていれば力の流れは一義的に決まり、最適形状を構成する部

材の配置、その方向、節点位置、節点数等は最適な流れを構成するよう限定されると思われる。しかし、②のオイラー座屈を考慮すると、力の流れだけでなく圧縮部材の長さ（座屈長）が問題となってくる。このことは形状決定に大きな影響を与えることを示している。つぎに③の問題について考える。一般に橋トラスの剛性は高く、他の構造系に比して変位量は小さいと考えられるが、橋トラスはその用途から考えて変位量に制限が加えられることが多い。この剛性も全体としての部材の配置、節点の位置等すべての要因に関連するものであり、形状決定に大きな影響を及ぼす場合もありうる。④は第3節で簡単な例を示したが、力の流れを根本的に変化させるものであり、⑤の荷重は最も影響が大であると考えられるものであり、両者とも形状に大きな影響を与えることは明らかである。その他、実際のトラスでは各節点がピン結合でなく、ほとんど剛結に近いため部材に曲げモーメントがまじ、これによって生じる2次モーメントの影響、鋼種の違いによる影響あるいは施工性の問題等も形状決定において考慮されねばならないものであろう。

5. 最適規準を利用した近似設計手法

第3節より節点系のトポロジー（主として支持点）の影響は大きいものの、部材系のトポロジーは節点系のジオメトリーに支配されることがわかった。ここでは、3節で示した設計手順に従い、もう一度設計におけるハイアラーキーとの関連を考える。ハイアラーキー①のトポロジーに関しては支持条件はあらかじめ与えられると考え、他の節点数、部材の配置は仮定する。②のジオメトリーの影響は節点座標Xを設計変数に導入することにより考慮する。③の部材の全体設計は断面積Aを設計変数として扱い考慮する。④については sub-optimization[6] の結果を利用する。

節点座標と部材断面積を同時に最適化過程で考慮することは種々の問題を生じさすことになるので、Moses, Kirsch 等の考え方に基き、節点座標と断面積を2つの群に分け、別々のプロセスで決定することを考える。節点座標の決定には数理計画法を用い、断面積の決定には最適規準設計法の考え方を用いる。また、座屈条件、鋼種の違いによる影響は sub-optimization の考え方を導入し考慮する。以下、この近似設計手法の概略を述べる。（Fig.3 に flow chart を示す）

Step 1　初期の形状を設定する。（支持点等のトポロジーは理定されているので、実際には節点座標Xの初期値 $X^{(0)}$ を与える）

Step 2　この形状のもとで構造解析を行ない、部材力Fを計算する。

Step 3　求められたFおよび部材長Lを用いて、最適な断面積Aを決定する。

Step 4　節点座標Xの改善方向 $S^{(i)}$ を計算し、一次元探索法を用い進むべき距離 $\alpha^{(i)}$ を求める。

Step 5　この時、新しい節点位置 $X^{(i)}$ は　$X^{(i)} = X^{(i-1)} + \alpha^{(i)} S^{(i)}$

Step 6　もし $X^{(i)}$ の値が変化しなければ計算を打ち切る。収束条件を満足していなければ Step 2 ～ Step 5 の操作を繰り返す。

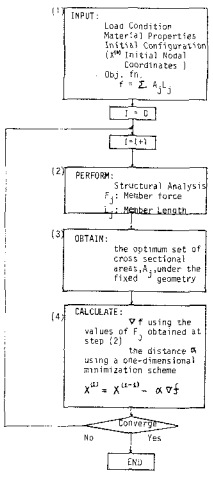


Fig.3 Flow Chart of Design Procedure

ここで、断面積Aは最適規準あるいは sub-optimization を利用することにより、以下のように節点座標Xの関数として表わすことができる。（Fig. 4(a),(b)に Pipe Section に対する Sub-optimization の結果を示す）

(i)許容応力の制限のみを考慮する場合

全応力設計（fully-stressed）の条件より

$$A_i = \sigma_a^{-1} F_i(X) \qquad (1)$$

σ_a：許容応力

添字 i；部材 i を示す

(ii)変位制限が加わった場合[7]

$$A_i = \frac{1}{(\delta^k - \delta_0)} \sum_{k=m+1}^{n} L_k(X) \sqrt{\left(\frac{F_k^P F_k^Q \rho_i}{E_k}\right)} \sqrt{\left(\frac{F_i^P F_i^Q}{E_i \rho_i}\right)} \qquad (2)$$

ここで δ^k：許容変位，δ_0：運動要素における変位　ρ：密度　E：ヤング率　n：全部材数

m：運動要素（部材）の数．添字 P, Q はそれぞれ外部荷重系，仮想荷重系を示す

(iii)細棒の違い、座屈条件を考慮する場合

sub-optimization を行なうことにより、A と F との関係を近似的に求める。Fig. 4 (a) より SS41 を使用する場合の圧縮部材の断面積 A_i は次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} A_i &= a\sqrt{F_i(X)} + b && 99 < R \\ A_i &= F_i(X)/1568 + C && 20 < R < 99 \\ A_i &= F_i(X)/1400 \quad (cm^2) && R < 20 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

この式は鋼道路橋示方書に基づいて求めにものであり、R は細長比を示し、定数 a, b, C は各部材長に対して求められる。

この時、目的関数 P（細棒の違いを考慮するため総鋼材費をとる）は (4)式のように表わされ、設計問題は無制約の最適化問題となる。

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \min_j (C_j A_j(F_i)) \right\}_i L_i(X) \longrightarrow Minimize \qquad (4)$$

ここで、i, j はそれぞれ部材、鋼種に関する添字であり、C_j は単位の鋼材費である。鋼種の影響は $\min_j (C_j A_j(F_i))$ の項で考慮される。（Fig. 4 (b) 参照）

いま $a_i = \{\min_j (C_j A_j(F_i(X)))\}_i$ と表わすと (4)式は次のようになり、節点座標 X のみの関数となる。

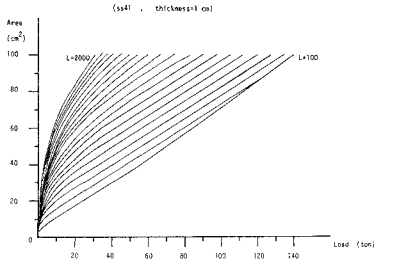
$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i(F_i(X), L_i(X)) \cdot L_i(X) \longrightarrow Minimize \qquad (5)$$

この時、S を求めるのに必要な $\partial P/\partial x_k$ は次式により求めることができる。

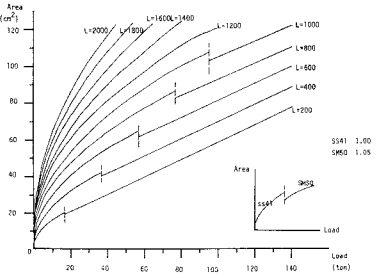
$$\frac{\partial P}{\partial x_k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} L_i + a_i \frac{\partial L_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_i}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} L_i + \frac{\partial a_i}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x_k} L_i + a_i \frac{\partial L_i}{\partial x_k} \qquad (6)$$

また、Fig. 4 のグラフ中で計算されている L_i 以外の部材長のものに関しては補間法を用いて求める。

Fig.4 Suboptimization of Members



a) ss 41 steel



b) SS 41 & SM 50

6. 数値計算例

1)最適化過程におけるトポロジー、ジオメトリーの変化

簡単なモデルを用い最適化過程におけるトポロジー、ジオメトリーの変化について考察する。トポロジーに関してはLPを、ジオメトリーに関してはSLPを用いて求めた結果をそれぞれ Fig. 5, Fig. 6 に示す。LP演算が進むに従いトポロジーは数回大きく変化している。必要部材あるいは不要部材は

それぞれLPにおける基底解、非基底解に対応しており、演算が進むにつれ各結合状態がシステマティックに比較され最適解が求められている。ジオメトリーはトポロジーとは違い連続的な変化をするが結果をみるとトポロジーのみを考慮した時と同じような形状が解として得られている。LP演算のように明確に部材の必要性は区別できないが、節点と節点がほぼ同じ位置に移動するあるいは部材断面積が0に近づくことにより、ある程度不要な節点、部材が推定できる。つまり、部材配置をあらかじめ少し自由度をもたせて設定しておけば節点座標を設計変数に導入することによりトポロジーの影響も完全ではないが最適化過程で考慮できると思われる。

2)スパン長の影響

5節で示した手法を用いスパン長による影響について考察する。パネル数は16と固定し、トラス高を変化させて形状の変化および鋼材費の変化を調べる。Fig.7に用いたモデルおよび荷重条件と、Fig.8に鋼材費とスパン長の関係を示す。スパン長が増加するに従い、死荷重の影響で単位長さ当りの鋼材費（SS41の単位費用を1としている）は当然増加するが、その割合は140mを越えるあたりから急激に大きくなっている。主に座屈条件の影響からModel 1の鉛直材を有するワーレン型が常に最も有利な結果を示した。ワーレン（Model 2）、プラット（Model 3）には顕著な差はないが、140mを越えるところからプラットの方が小さな値を示している。また鋼種は圧縮材、引張材に対してそれぞれSS41、SM50が選ばれている。演算時間は設計変数（非線形計画法で用いられる）が少ない影響もあって京都大学大型計算機センターのFACOM M-190で1ケースにつき約70秒である。トラス高とスパン長の比は各モデルにより若干異なるが、1/11.5 ～ 1/25の間にある。一般に100m以下の単純支持直弦トラスでは1/10 ～ 1/16[8]といわれているが、今回の計算では若干小さめの値が出た。これは格間割の問題もあるが、鋼種の違いを考慮したことおよび荷重条件の影響によるものであろう。Model 1とModel 3はほぼ同じ値を示すが、Model 2はこれより少し大きめの値が最適となっている。いずれの場合も100m以下ではスパン長に無関係であるが、それ以上になると値が変化する傾向がみられる。

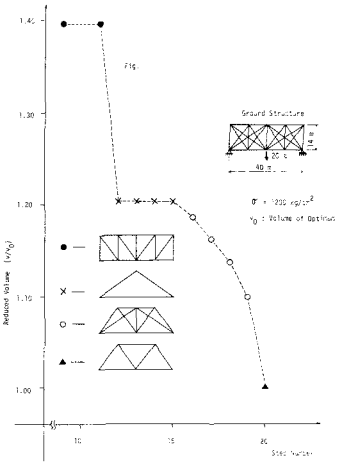


Fig.5 Change of Topology in Optimization

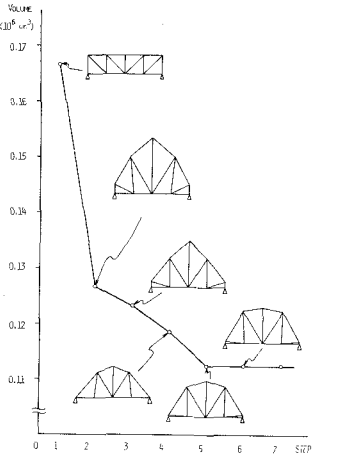
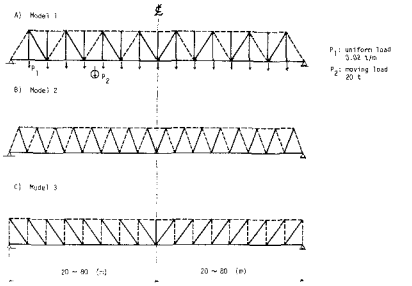


Fig.6 Change of Geometry in Optimization

Fig.7 Truss Models & Loading Condition



3)連続トラス橋の設計（天草一号橋モデル）

Fig.9に示す長さ500m、節点数80、部材数が157の3径間連続トラスに本方法を適用した。上弦材は水平、中央部200mにわたり42mのクリアランスを設けるという条件を付加している。設計変数は対称性を考慮して節点座標に関して20個、部材断面積に関して77個とっている。第4ステップの結果を

みると、計算途中で下弦の節点はなめらかな曲線を呈していないが、水平方向に移動しワーレン型に移ろうとしている傾向がみられる。この時、鋼材費は初期値（形状は現実の天草一号橋を簡素化している）に比べ約2%減少している。Fig.10にプラット形式でトラス高を下げた結果およびさらに第4スラップの結果に基づきワーレンタイプにした結果を示す。トラス高を下げることにより鋼材費は4%以上減少し、ワーレンとすることにより約16%の減少がみられる。

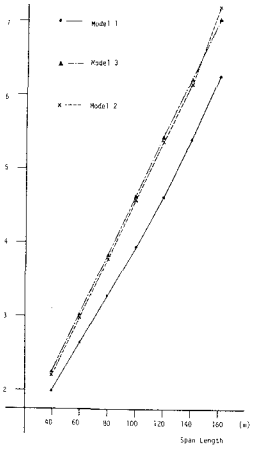


Fig.8 Material Cost vs Span-length

7. 結論および今後の課題

トポロジー、ジオメトリーに注目し、橋トラスの形状決定に対し2.3の考察を行ない、種々の力学的条件を考慮できる近似設計手法を提案した。以下得られた結論を簡単に記す。

1) 橋トラスの形状決定において支持点の影響は大であるが、部材の結合状態は節点位置というジオメトリーに支配される。ジオメトリーの影響を設計に導入することによりかなりの重量あるいは費用の節減が期待できる。

Fig.9 Results of Amakusa 1-Go Bridge Model Configuration at the 4-th Step

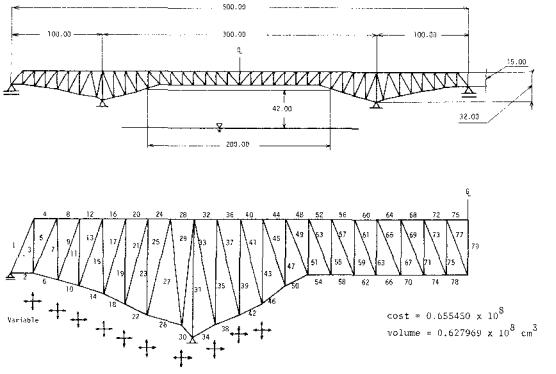
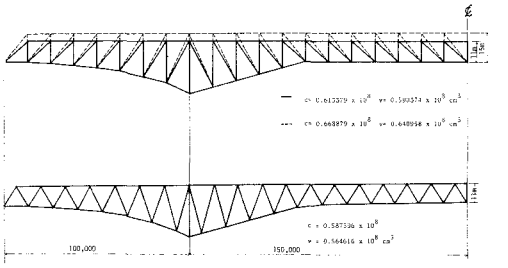


Fig.10 Obtained Configuration for Amakusa 1-Go Bridge Model

2) この時、本研究で提案した近似手法を用い、節点座標、部材断面積を異なるプロセスで決定することにより、収束性、容量、計算時間の改善が図れる。本手法は中径間トラス橋等に対しては十分実用に供するものと思われる。

3) しかし、天草一号橋のような大規模なトラスに対しては未だ計算時間で問題が残っている。このような問題に対しては形状特性を十分把握し、重要なパラメーターについて最適化を行なうことにより有効な設計が得られると思われる。計算時間についてもそのほとんどが構造解析に費されていることより、Band Matrix法等を用い最適化過程（今回は共役傾斜法を使用）の改善を図ることによりかなりの短縮は可能であると思われる。



4) その他、実際の形状決定では2次応力、美観等の問題、あるいは建築限界、対風構等とのバランスも考慮する必要があり、より有効な設計を得るにはさらに形状の特性について研究することが必要であると思われる。

*参考文献 1) A. Templeman, IABSE 10th Congr. Inductory Rep., 1975 2) 例えば W. Spillers, Proc. ASCE, ST7, 1975
3) 例えば W Dorn 他, Jour. de Mech. Vol.3, 1964 4) G. Vanderplaats & F. Moses, Proc. ASCE, ST3, 1972
5) U. kirsch, Proc. ASCE, ST3, 1972 6) 大久保禎二, 土木学会論文報告集 No 177号, 1970
7) R. Gallagher 他, "Optimum Structural Design", John Wiley, 1977 8) 小西一郎編, "鋼橋 設計編 I", 丸善, 1975

On Geometrical Configuration of Truss Systems Used for Bridges

Naruhito Shiraishi* and Hitoshi Furuta*

Structural design forms a hierarchy. According to A.Templeman, it is classified as four categories : 1) Topology of the structure 2) Geometry of the structure 3) Overall sizes of structure members 4) Detailed design of elements. It is very difficult to find rational decisions with respect to categories 1) and 2), because of their complexity and a great deal of factors to be considered.

This study aims to investigate the characteristics of truss configuration and to present an effective scheme for obtaining its optimal configuration. Geometrical configuration can be specified by topology and geometry. Previous investigations have shown that it is possible to achieve economy by taking them into account in the optimization. Some numerical examples employed here indicate that, for truss systems used for bridges, geometry is more important than topology to obtain effective configurations.

In order to determine the effective geometry, it is necessary that two different kinds of parameters, cross sectional areas and nodal coordinates, are introduced into the optimization. The treatment of nodal coordinates apparently results in the increase of the number of design variables, which often induces some difficulties in the application of mathematical programming. Large-scale problems, generally, have poor convergency and require excessive computation time or memory capacity. In this paper, an approximate design method is presented, in which the cross sectional areas are expressed as functions of nodal coordinates by using the suboptimization of members or the optimality criterion. Some numerical examples are presented to illustrate the efficiency and the applicability of the proposed method.

---

* Civil Engineering Department, Kyoto University