

(4) 周期係数を持つ線形同次微分方程式の解の安定性を検討する手法の提案

東京大学生産技術研究所 皆川 洋一

§1. 序 周期係数を持つ同次線形微分方程式の解に対して, Froquet の定理が成立する。この定理を適用すれば, この方程式の安定性は理論面から明らかにされる。すなわち, 周期係数を持つ同次線形方程式の基本解行列が求められれば, 時刻 T (T : 周期係数の周期) 後の基本解行列の変化を表わす正則な定数行列 (基礎行列) が定められる。この行列の固有値問題が系の特性方程式であり, これを解析して特性根 p が求められる。特性根, あるいは特性指数 $\ln p$ を利用すれば, 周期係数を持つ同次線形方程式の解の安定・不安定が判別できる。しかし, 周期係数を持つ同次線形方程式の基本解行列を一般に求める手法は存在しないので, この定理を直接適用して解の安定性を検討することは実際には不可能である。逆に, この定理を適用して, この系の解の安定性を検討するためには, この方程式の一周期分の解 ($t \in (t_0, t_0 + T)$; t_0 : 任意の時刻) を解析的に求めなければならぬ。

変係数を持つ線形微分方程式の解を近似的に求める手法として, Frazer, Duncan and Collar³⁾ は時刻を充分小さな領域に分割し, この区間において変係数の平均値を取り, この値を係数とする定係数の微分方程式と考へて解を求める手法を示した。数値解析結果は大きな変動を示す応答を持つ問題についても, 良い精度で解析できることを示している。

ここでは, 周期係数を持つ同次線形微分方程式へこの断片的定係数化の手法を適用して, 系の一周期分の解を解析的に求め, 特性方程式を導く。得られた特性方程式を解析して特性根を求め, 周期係数を持つ同次線形微分方程式の安定性を検討する手法を示す。¹⁾ さらに, この手法を周期係数を持つ自由度系の運動方程式へ適用して数値解析を行い, 手法を実証する。

§2. 周期係数を持つ同次線形微分方程式

2-1 周期係数を持つ同次線形微分方程式の一般性質

周期係数を持つ同次線形微分方程式は一般に次式で表わされる。

$$\dot{x} = [A(t)]x \quad (1)$$

ここに, $[A(t+T)] = [A(t)]$ 。

常微分方程式論から次の事柄が知られている。(1) 式の基本解行列を $[\Phi(t)]$ と表わす時,

$$[\dot{\Phi}(t+T)] = [A(t+T)][\Phi(t+T)] = [A(t)][\Phi(t+T)] \quad (2)$$

が成立するから, 行列 $[\Phi(t+T)]$ も基本解行列である。行列 $[\Phi(t)]$, 及び $[\Phi(t+T)]$ は基本解行列であるから正則行列である。この時, 次式を満たす正則な定数行列 (基礎行列) $[C]$ が存在する。

$$[\Phi(t+T)] = [\Phi(t)][C] \quad (3)$$

(3) 式から次式を得る。

$$[C] = [\Phi(t_0)]^{-1}[\Phi(t_0+T)] \quad (4)$$

ここに, t_0 は任意の時刻である。

一オ, 基本解行列 $[\Phi(t)]$ を用いると, (1) 式の解は次式で表わされる。

$$\{x(t)\} = [\Phi(t)][\Phi(t_0)]^{-1}\{x(t_0)\} \quad (5)$$

故に時刻 $t_0 + T$ の解は次式で表わされる。

$$\{x(t_0 + T)\} = [R]\{x(t_0)\} \quad (6)$$

ここに、 $[R] = [\Phi(t_0 + T)][\Phi(t_0)]^{-1}$ 。

行列 $[R]$ と基礎行列 $[C]$ の間に、次の相似変換が成立する。

$$[\Phi(t_0)]^{-1}[R][\Phi(t_0)] = [\Phi(t_0)]^{-1}[\Phi(t_0 + T)] = [C] \quad (7)$$

基礎行列 $[C]$ の固有値問題を考える。

$$\begin{aligned} \det[C - \lambda I] &= \det([\Phi(t_0)]^{-1}[R][\Phi(t_0)] - \lambda[I]) = \det([\Phi(t_0)]^{-1}[R - \lambda I][\Phi(t_0)]) \\ &= \det[\Phi(t_0)]^{-1} \det[R - \lambda I] \det[\Phi(t_0)] = \det[R - \lambda I] \end{aligned} \quad (8)$$

故に、基礎行列 $[C]$ と行列 $[R]$ とは同一の特性方程式を持ち、同一の特性根を持つ。

2-2 行列 $[R]$ を作成する近似解法

行列 $[R]$ 、または $[C]$ を作成するためには、(1) 式の解を少なくとも 2 区間 $(t_0, t_0 + T)$ で解析しなければならぬ。しかしながら、(1) 式は一般に解析できないので、次のような近似法を導入する。区間 $(t_0, t_0 + T)$ を $t_0, t_1, \dots, t_m$ のように m 個の区間に分割する。分割された小さな区間 (t_{l-1}, t_l) ($l = 1, 2, \dots, m$) において行列 $[A(t)]$ を定数行列 $[\hat{A}_l]$ ($l = 1, 2, \dots, m$) と考える。行列 $[\hat{A}_l]$ の取り方には、さまざまな方法がある。区間 (t_{l-1}, t_l) における行列 $[A(t)]$ の平均値を取れば、

$$[\hat{A}_l] = \frac{1}{t_l - t_{l-1}} \int_{t_{l-1}}^{t_l} [A(\tau)] d\tau \quad (9)$$

区間 (t_{l-1}, t_l) において行列 $[A(t)]$ を 2 次関数で近似すれば、シンプソン則から次式を得る。

$$[\hat{A}_l] = \frac{1}{6} [A(t_{l-1}) + 4((t_{l-1} + t_l)/2) + A(t_l)] \quad (10)$$

充分大きな整数 m を採用すれば、区間 (t_{l-1}, t_l) ($l = 1, 2, \dots, m$) で連続関数 $[A(t)]$ を次式で近似することも可能である。

$$[\hat{A}_l] = \frac{1}{2} [A(t_{l-1}) + A(t_l)] \quad (11)$$

$$[\hat{A}_l] = [A((t_{l-1} + t_l)/2)] \quad (12)$$

このような仮定を (1) 式へ導入すると、(1) 式は次式で近似される。

$$\{\dot{x}\} = [\hat{A}_l]\{x\} \quad (t \in (t_{l-1}, t_l) : l = 1, 2, \dots, m) \quad (13)$$

定係数を持つ同次線形微分方程式 (13) 式は解析でき、解は次式で表わされる。

$$\{x(t)\} = \exp((t_l - t_{l-1})[\hat{A}_l])\{x(t_{l-1})\} \quad (l = 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

ここに、 $\exp((t_l - t_{l-1})[\hat{A}_l]) = e^{(t_l - t_{l-1})[\hat{A}_l]}$ 。

(14) 式から次式を得る。

$$\{x(t)\} = \exp((t - t_{l-1})[\hat{A}_l]) \cdot \exp((t_{l-1} - t_{l-2})[\hat{A}_{l-1}]) \cdots \exp((t_1 - t_0)[\hat{A}_1])\{x(t_0)\} \quad (15)$$

(15)式から、(6)式の行列[R]に対応した次式を得る。

$$\{\chi(t_m)\} = \{\chi(t_0 + T)\} = [R_m] \{\chi(t_0)\} \quad (16)$$

$$\text{ここに、} [R_m] = \exp((t_m - t_{m-1})[\hat{A}_m]) \cdots \exp((t_1 - t_0)[\hat{A}_1]) = \prod_{k=1}^m \exp((t_k - t_{k-1})[\hat{A}_k]).$$

充分大きな整数 m を取れば、行列 $[R_m]$ は (6) 式の行列 $[R]$ に一様収束するものと考えられる。故に、充分大きな整数 m に対する行列 $[R_m]$ の固有値 (特性根) を用いて、(1) 式の解の安定性を検討する。

2-3 特性根と解の安定性

(8) 式で表わされる特性方程式の根、特性根を $p_1, \dots, p_n$ とする。また、行列 $[C]$ または $[R]$ は対角化可能であると仮定する。この時、次式を満たす正則行列 $[T]$ が存在する。

$$[T]^{-1}[R][T] = [J] \quad \text{ここに } [J] = \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & \ddots \\ & & & p_n \end{bmatrix} : \text{対角行列} \quad (17)$$

一対、(6) 式から次式を得る。

$$[\Phi(t+T)] = [R][\Phi(t)] \quad (18)$$

(17) 式と (18) 式から次式を得る。

$$[\psi(t+T)] = [J][\psi(t)] \quad \text{ここに、} [\psi(t)] = [T][\Phi(t)] \quad (19)$$

故に、次式を得る。

$$\psi_k(t+T) = p_k \psi_k(t) \quad \psi_k(t) \text{ は行列 } [\psi(t)] \text{ の } k \text{ 番目の列ベクトル} \quad (20)$$

(20) 式から、 $\psi_k(t)$ は次式で表わされる。

$$\psi_k(t) = e^{t/T \ln p_k} \chi_k(t) = e^{(t/T) \ln |p_k|} e^{i t \arg p_k} \chi_k(t) \quad (k=1, \dots, n) \quad (21)$$

ここに、 $\chi_k(t)$ は周期 T の列ベクトル。

行列 $[C]$ 、または $[R]$ が対角化可能でない時も、(21) 式と同様の形で基本解行列の成分 $\psi_k(t)$ が表わされる¹⁾。故に、次の事柄が言える。もしすべて $\arg p_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) が負の実部を持つれば、(1) 式の一般解は時刻と共に減衰する。しかし、正の実部を持つ特性指数が一つでも出現すれば、時刻と共に無限に増大する解が含まれる。これを、特性根 p_k ($k=1, 2, \dots, n$) を用いて表現しよう。もしすべて $\arg p_k$ ($k=1, \dots, n$) の絶対値が 1 より小さいならば、系の一般解は時刻と共に減衰し、解は安定である。しかし、絶対値が 1 を越える特性根が一つでも存在すれば、時刻と共に発散する解があるので、解は不安定である。もし絶対値が 1 に等しい特性根がある時、(1) 式の安定・不安定を定められない。¹⁾

3.3 数値解析

3-1 2 自由度系の運動方程式

前節で示した方法を適用する数値解析モデルとして、次式で表わされる 2 自由度系の運動方程式を採用する。

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + z_{E1} \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 - \nu y_2 \sin \omega t = 0 \\ \ddot{y}_2 + z_{E2} \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 - \nu y_1 \sin \omega t = 0 \end{cases} \quad (22)$$

(22)式を正規形の微分方程式で表現すると、次式を得る。

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}(t)]\mathbf{x} \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{x} = \{y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2\}$

$$[\mathbf{A}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\varepsilon_1 & \nu \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu \sin \omega t & 0 & -\omega_2^2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

前節で示したように時刻 $(0, T)$ ($T = 2\pi/\omega$) を m 分割して、小区間 (t_{l-1}, t_l) で $[\mathbf{A}(t)]$ を定数行列と考えると、(23)式は(13)式に対応して次式となる。

$$\dot{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{A}}_l]\mathbf{x} \quad (t \in (t_{l-1}, t_l) : l=1, 2, \dots, m) \quad (24)$$

ここに、
$$[\hat{\mathbf{A}}_l] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\varepsilon_1 & \tilde{\nu}_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{\nu}_l & 0 & -\omega_2^2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

分割を等分割 (m 等分) とすると、(9)、(11)、及び (12) 式に対応して $\hat{\nu}_l$ ((24)式) とし、次式を得る。

$$\tilde{\nu}_l = \frac{1}{t_l - t_{l-1}} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \nu \sin \omega \tau d\tau = \nu \left(\frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{2l-1}{m} \pi \right) \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (25)$$

$$\tilde{\nu}_l = \frac{1}{2} (\nu \sin \omega t_{l-1} + \nu \sin \omega t_l) = \nu \left(\cos \frac{\pi}{m} \sin \frac{2l-1}{m} \pi \right) \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (26)$$

$$\tilde{\nu}_l = \nu \sin(\omega(t_{l-1} + t_l)/2) = \nu \sin \frac{2l-1}{m} \pi \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (27)$$

行列 $[\hat{\mathbf{A}}_l]$ を対角形可能と仮定して、固有値 λ_i^l ($i=1, 2, 3, 4$) に対応する固有ベクトル ψ_i^l を陽に表わすと次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nu}_l \\ \tilde{\nu}_l \lambda_i^l \\ \omega_1^2 + (2\varepsilon_1 + \lambda_i^l) \lambda_i^l \\ \lambda_i^l \omega_1^2 + (2\varepsilon_1 + \lambda_i^l) \lambda_i^l \end{array} \right\} \quad \text{or} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2^2 + (2\varepsilon_2 + \lambda_i^l) \lambda_i^l \\ \lambda_i^l \omega_2^2 + (2\varepsilon_2 + \lambda_i^l) \lambda_i^l \\ \tilde{\nu}_l \\ \tilde{\nu}_l \lambda_i^l \end{array} \right\} \quad (28)$$

行列 $[\hat{\mathbf{A}}_l]$ の固有値 λ_i^l ($i=1, \dots, 4$) と固有ベクトル ψ_i^l とを用い、(14)~(16)式は容易に解ける。

3-2 数値解析

a) 分割数 m による不安定性の検討

(27)式で定義される $\tilde{\nu}_l$ (or $[\hat{\mathbf{A}}_l]$) を用いて、(24)式の代表的な不安定領域を解析する。(22)あるいは(23)式において、 $\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=4$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, $\nu/\omega_1\omega_2=0.6$ としたモデルの $\omega=3$ 及び $\omega=2$ の近傍にある不安定領域の幅を $m=6, 10, 14, 18, 22, 42, 102$, 及び 202 とし、解析した結果をそれぞれ表1及び表2に示す。 $\omega=3$ の近傍にある不安定領域は Combination Resonance による不安定領域であり、 $\omega=2$ の近傍にあるのは単純10ラマトリックスによる不安定領域である。

Table 1 The Width of Instability Region
(Combination Resonance)

m	The Width of Instability Region	
6	2.591 <	< 3.389
10	2.579 <	< 3.400
14	2.575 <	< 3.403
18	2.574 <	< 3.404
22	2.573 <	< 3.405
42	2.572 <	< 3.406
102	2.572 <	< 3.406
202	2.572 <	< 3.406

Table 2 The Width of Instability Region
(Simple Parametric Excitation)

m	The Width of Instability Region	
6	1.836 <	< 2.006
10	1.825 <	< 2.006
14	1.822 <	< 2.006
18	1.821 <	< 2.006
22	1.820 <	< 2.006
42	1.820 <	< 2.006
102	1.819 <	< 2.006
202	1.819 <	< 2.006

b) 無減衰の場合の不安定領域

(22)式において $\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=4$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ としたモデルの不安定領域を, $m=22$ とし求める。外カ振動数 $\omega \geq 0.5$ の領域に存在する不安定領域を図1に示す。2重斜線を施した領域は Combination Resonance による不安定領域である。この不安定領域は $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/k$ ($k=1, 3, 5, \dots$) の近傍に出現している。斜線を施した領域は良く知られた単共振パラメトリックによる不安定領域である。

図1において, 安定・不安定の境界を縮くのに用いた線の太さは, 振動数 0.004 に対応する。a) で扱った不安定領域を見る限り, $\nu/\omega_1\omega_2=0.6$ の位置で $m=14$ 以上の場合の不安定領域において, 図の上での相違はない。

ここで示した方法は安定・不安定を検討する解析的な方法であるため, $\omega < 0.5$ の領域に存在する数多くの(理論的には無数の)不安定領域を定めることが出来る。しかし,

幅が 0.004 (安定・不安定の境界を表わす線の太さに相当する振動数) に満たない不安定領域が大部分なので, ここで省略した。

c) 有減衰の場合の不安定領域

(22)式において $\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=4$ としたモデルに減衰を入れ2解析する。3種類の減衰を考える。オ1番目のモデルはb)と同様 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ とする。オ2番目及びオ3番目のモデルは, それぞれ $\varepsilon_1=0.01$, $\varepsilon_2=0.02$ 及び $\varepsilon_1=0.001$, $\varepsilon_2=0.2$ とする。なお, $m=22$ を採用する。

これらのモデルの安定・不安定の境界を求め2図2に示した。オ1番目のモデルは実線で表わした。このモデルはb)と同一のモデルであり, 図1に対応した部分が不安定領域となる。オ2番目及びオ3番目のモデルの安定・不安定の境界は図2において, それぞれ破線及び一点鎖線で示されている。これらの結果のうち, $\omega=3$ の近傍にある不安定領域がオ3番目のモデルの場合, オ1番目のモデルより広くみられることは注目すべき事実である。

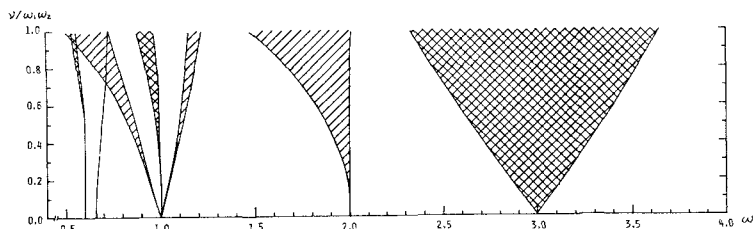


Fig.1 Instability Regions without Damping

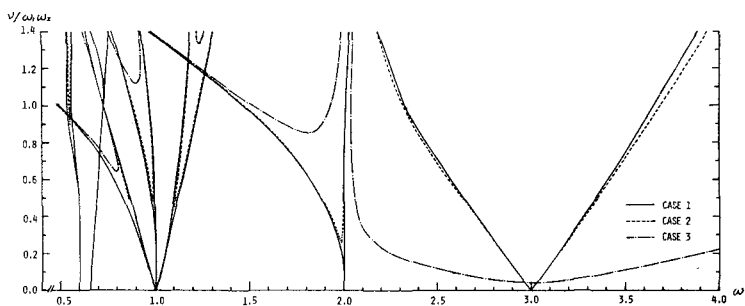


Fig.2 Boundary Lines with Damping

d) 行列 $[\hat{A}_2]$ の選び方

a)~c)で示した解析は、(13)式の行列 $[\hat{A}_2]$ として(12)式を採用した。ここでは、他の方法を用いて行列 $[\hat{A}_2]$ を定める場合の相違を検討する。ここでは(13)式の代りに、(9)式及び(11)式を採用した場合の相違を扱う。

(22)式、あるいは(23)式で示したモデルの場合、行列 $[\hat{A}_2]$ の選び方による差は(24)式の $\hat{V}_2$ に現れる数値解析で採用した $\hat{V}_2$ は(27)式で表わされる。一方、(9)式及び(11)式を採用した場合の $\hat{V}_2$ はそれぞれ(25)式及び(26)式で表わされる。(27)式で表わされる $\hat{V}_2$ を単位とした場合の(25)式及び(26)式の $\hat{V}_2$ はそれぞれ $\frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}$ 及び $\cos \frac{\pi}{m}$ で表わされる。 $m \rightarrow \infty$ の時これらの係数は1に収束するので、 $m \rightarrow \infty$ ならこれらの通りの方による差はない。しかし、有限の値を採用した場合のこれらの係数を表すに示す。

Table 3 Coefficients Comparison

m	$\frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}$	$\cos \frac{\pi}{m}$
6	0.9549	0.8660
10	0.9836	0.9511
14	0.9916	0.9749
18	0.9949	0.9848
22	0.9966	0.9898
42	0.9991	0.9972
102	0.9998	0.9995
202	1.0000	0.9999

表3の $m=22$ の欄を見ると、(25)式で定義される $\hat{V}_2$ は(27)式で定義される $\hat{V}_2$ の0.9966倍であることが分かる。故に、(9)式で定義される行列 $[\hat{A}_2]$ を用いて、 $m=22$ とした解析結果は図2の縦軸の目盛りを0.9966倍した図となる。縦軸の目盛りに用いた直線の幅は縦軸の目盛り0.04に相当する。

故に $V/\omega_1\omega_2=1.0$ において、 $m=22$ として(9)式及び(13)

式を採用した場合の相違は縦軸の目盛りの幅の85% $((1.0-0.9966)/0.04)$ に過ぎない。

また、(26)式で定義される $\hat{V}_2$ を $m=22$ として採用した場合の不安定領域は、図2の縦軸の目盛りを0.9898倍した図となることが分かる。

§4 結 論

周期係数を持つ同次線形微分方程式の解の安定性をFroquetの定理を直接適用して一般的に検討することは従来不可能であった。本報は(1)式で表わされるこの方程式を近似的に(13)式のように区分的に定係数を持つ系へ置き換え、解を解析的に求め、特性方程式を誘導し特性根を求め、(13)式の安定性を検討する方法を示した。

数値解析結果は(1)式充分大きな整数 m に対して(13)式で置き換えた近似解法で収束していることを示している。

(1)式の安定性を検討する既往の代表的な手法である調和バランス法を適用すると、多くの不安定領域を検討しようとするれば際限なく大きな複素固有値問題を扱うわけになる⁶⁾。これに対して、ここで示した方法は(1)式の未知数の数の大きな固有値問題あるいは特性方程式((8)式)を扱えば良く、固有値問題の解析は容易となる。しかも、この固有値問題を解析すれば、(1)式の不安定領域を理論的にはすべて説明することが出来る。

また、調和バランス法を適用すると(1)式の解の安定性を検討する場合、単純にノーマトリックによる不安定領域とCombination Resonanceによる不安定領域を統一して解析することは不可能である。これに対し、ここで示した手法は両者の不安定領域を統一して解析する。

謝 辞

本研究を遂行する上、便宜を計、これにたいして東京大学半谷裕彦助教授に感謝いたします。

付録: $\exp(t[A])$ の定義

(14), (15), (16) 式において, $\exp(t[A])$ ($[A]$: 定数行列) を使用し, この行列 $\exp(t[A])$ の定義を与える。^{8) 9)}

1) 行列 $[A]$ が対角化可能のとき.

行列 $[A]$ の固有方程式は次式で与えられる.

$$F(\lambda) = \det[A - \lambda I] \quad (A.1)$$

(A.1) 式の根を λ_k , これに対応する固有ベクトルを U_k ($k=1, 2, \dots, n$) とするとき,

$$\exp(t[A]) = [V][D(t)][V]^{-1} \quad (A.2)$$

$$\text{ここに } [V] = [U_1 U_2 \dots U_n], [D(t)] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} : \text{対角行列}$$

または, Lagrange の補間公式 P_i を用いて,

$$\exp(t[A]) = P_1([A])e^{\lambda_1 t} + P_2([A])e^{\lambda_2 t} + \dots + P_n([A])e^{\lambda_n t} \quad (A.3)$$

$$\text{ここに } P_i([A]) = \frac{[A - \lambda_1 I] \dots [A - \lambda_{i-1} I][A - \lambda_{i+1} I] \dots [A - \lambda_n I]}{(\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)} \quad (\lambda_i \neq \lambda_r: s \neq r)$$

2) 行列 $[A]$ が対角化不可能のとき.

(A.1) 式は次のように因数分解する

$$F(\lambda) = \det[A - \lambda I] = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_p = n) \quad (A.4)$$

$1/F(\lambda)$ を部分分数に次のように分解する

$$\frac{1}{F(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1}} + \dots + \frac{f_p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_p)^{m_p}} \quad (\deg f_k(\lambda) < m_k: k=1, \dots, p) \quad (A.5)$$

この時,

$$\exp(t[A]) = [Q_1(t)]e^{\lambda_1 t} + [Q_2(t)]e^{\lambda_2 t} + \dots + [Q_p(t)]e^{\lambda_p t} \quad (A.6)$$

ここに,

$$[Q_k(t)] = \left[I + \frac{t}{1!} (A - \lambda_k I) + \dots + \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!} (A - \lambda_k I)^{m_k-1} \right] [P_k]$$

$$[P_k] = \frac{f_k([A]) F([A])}{[A - \lambda_k I]^{m_k}}$$

References

- 1) V.V. Bolotin "The Dynamic Stability of Elastic Systems" Holden-Day, Inc. 1964
- 2) Hayashi "Nonlinear Oscillations in Physical Systems" McGraw-Hill 1964
- 3) R.A. Frazer, W.J. Duncan and A.R. Collar "Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations" Cambridge Press 1950
- 4) C.S. Hsu "On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom" Applied Mech. p.367 1963
- 5) T. Yamamoto and A. Saito "On the Vibrations of 'Summed and Differential Types' under Parametric Excitation" Memoirs of the Faculty of Eng., Nagoya Univ. vol.22 1970
- 6) Y. Minakawa "On a New Procedure to Analyse the Dynamic Buckling of Shallow Structure under Step Load" Trans. of A.I.J. No.268 June 1978
- 7) 斎藤和弥 "常微分方程式" 岩波講座 基礎数学 岩波書店
- 8) 笠原昭司 "新微分方程式対話" 現代数研社
- 9) ヴィルミール "マトリクス理論と応用" フレイシヨウ
- 10) 皆川洋一 "Combination Resonance による非自治定常系の共振" 日本建築学会関東支部 1978
- 11) 皆川洋一 "周期係数を持つ線形同次運動方程式の解の安定性を検討する非線形的手法について" オート計算機シンポジウム 1979年3月
- 12) Y. Minakawa "The Periodic Solution Problems of Nonlinear Equations of Motion under Periodic Force" Proc. of 27th Japan National Congress for Applied Mechanics 1977

New Procedure to Examine the Stability of the Linear Homogeneous Differential Equation with Periodic Coefficients

Youichi Minakawa*

For the linear homogeneous differential equation with periodic coefficients, there exists the Froquet theorem. When we apply the theorem to the system, we may make clear whether the solutions of the system are stable or not. In other words, if the fundamental matrix of the linear homogeneous equation is obtained, we can construct the characteristic equation of the system. Solving the equation, we have the characteristic roots ρ or the characteristic exponents $\ln \rho$. Then we examine the stability of the solutions of the system. But generally it is impossible to get the fundamental matrix because we cannot solve the system theoretically. So the stability of the system is not able to be concluded by applying the Froquet theorem, directly.

In order to examine the stability with the theorem, it is required to solve the system at least in a time interval (t_0, t_0+T) (T : periode of coefficients). Frazer, Duncan and Collar presented a procedure to analyse linear differential equation with time depending coefficients. In this procedure the time interval (t_0, t) is divided into m steps as $t_0, t_1, \dots, t_m$. Supposing the time depending coefficients were constant in a small interval (t_{l-1}, t_l) ($l=1, \dots, m$), they continuously analysed the system and obtained the solutions at $t=t$.

Here, we apply the procedure to the linear homogeneous differential equation with periodic coefficients and derive the characteristic equation of the system to analyse the characteristic roots. Then, we can conclude whether the solutions of the system are stable or not. This is a new procedure to examine the stability of the system.

The linear homogeneous differential equation with periodic coefficients is given by Eq.(1). When we express the fundamental matrix $[\Phi(t)]$, there exists a nonsingular matrix with constant coefficients $[C]$ in Eq.(3). The solution of Eq.(1) is given by Eq.(15). From Eq.(5) we have the matrix with constant coefficients $[R]$. The matrix $[R]$ is connected to matrix $[C]$ with the similarity transformation in Eq.(7).

In order to construct the matrix $[R]$, the solutions of Eq.(1) is required over the interval at least in one period (t_0, t_0+T) . However, Eq.(1) is not generally solved in the interval. Then, we suppose that the interval (t_0, t_0+T) is divided into m steps and the matrix $[A(t)]$ with periodic coefficients, which is continuous in an interval (t_{l-1}, t_l) ($l=1, 2, \dots, m$), is considered as the matrix with constant coefficients $[\tilde{A}_l]$. There are many ways to define the matrix $[\tilde{A}_l]$ as given by Eq.(9), (10), (11), (12) or etc.

Applying the approximate procedure to Eq.(1), we have Eq.(13) which is able to be solved, analytically. we can consider that for a sufficiently large integer m Eq.(13) converges to Eq.(1) and the matrix $[R_m]$ given by Eq.(16) converges to the matrix $[R]$, uniformly. Then, setting such a large integer m in Eq.(13), we examine the stability of the solutions of Eq.(1).

Solving the eigenvalue problem of the matrix $[R_m]$, we obtain characteristic roots. If all the roots have absolute values smaller than unity, the system will be stable. But if there appears even one root that has absolute value greater than unity, the system will be unstable.

We apply the procedure to a model given by Eq.(22). Setting $m=6, 10, 14, 18, 42, 102$ and 202 , we analyse the width of typical instability regions of Eq.(22) where $\omega_1^2=1$ and $\omega_2^2=4$. The results are depicted in Table 1. Adopting $m=22$ for the model, we define the instability regions existing in $\omega \leq 0.5$ and represent them in Fig.1. Then, we examine the effect of damping on the instability regions. Setting $m=22$, we analyse three models $\xi_1 = \xi_2 = 0$; $\xi_1 = 0.01, \xi_2 = 0.02$; and $\xi_1 = 0.001, \xi_2 = 0.2$. The instability regions of them are depicted in Fig.2.

* Free Student Dr.Eng.