

(2) 曲線薄肉ばりの有限変位問題における非線形偏微分方程式の解法

秋田大学 ○ 菊 本 征 三

秋田大学 教 農 和 徳

1 まえがき

薄肉ばりの曲がり，ねじれおよび横倒れ座屈，そして座屈後の有限変位問題と数理解弾性学的に説明する基礎となるのは三次元弾性体における非線形のひずみ-変位関係式と応力のつり合い式に弾理論の仮定，すなわち横断面形不変とせん断ひずみに関するイイラー・ベルヌーイの仮定と適用して得られる変位場である。この時，ひずみ-変位関係式のすべての非線形項を考慮してこれらの仮定と適用すると，断面内の任意点の変位に関する一連の非線形連立偏微分方程式が得られ，これが解かれると断面内の任意点の変位は，任意に選んだ部材軸線の変位と断面のねじれ角などと表され，変位場が定まる。しかしながら今までこの軸力と軸まわりの曲げと受ける直線材の場合 (Elastica の問題) に厳密な変位場が得られているに過ぎない¹⁾。

座屈現象は，ある荷重状態に達した時，はり断面の断面内で急激に変位，回転することを特徴的であるから，ひずみ-変位関係式の非線形項ではり断面に直交方向，つまり部材軸方向の変位の微係数の二次項を無視して得られる変位場を用いて，古典的な固有値問題と含む一般の座屈支配方程式が得られる²⁾。

有限変位問題ではひずみ-変位関係式のすべての非線形項が考慮されねばならないが，上述のように厳密な変位場が得られる場合は限られている。そこで薄肉断面内の任意点の有限な運動と弾理論の仮定に基づいて幾何学的に考察し，ベクトル・テンソル解析を用いて変位場を定めることを行われている³⁾。ところがこれらの変位場と逆にひずみ-変位関係式に代入すると弾理論の仮定と厳密に満たすことができない。これは有限変位のひずみ-変位関係式の複雑に起因すると考えられる。

ここでは弾理論の仮定から得られる変位に関する非線形連立偏微分方程式が，非線形項に仮定の微小なパラメータを乗ずることにより摂動法が適用可能となることを示し，摂動法による線形解と第1近似解と第2近似解を順次求め，有限変位解析の基礎としての変位場と応力場を示す。

2. 座標と記号

Fig. 1 に示すような円筒座標系を用いる。P は任意点 $P(x, y, z)$ と通心母線の曲率半径，R は断面に固定された直交座標系 (x, y, z) の原点 O の曲率半径である。任意点 P の x, y, z 軸方向の変位をそれぞれ u, v, w とする。ひずみ-変位関係式は

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (1. a)$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right\} \quad (1. b)$$

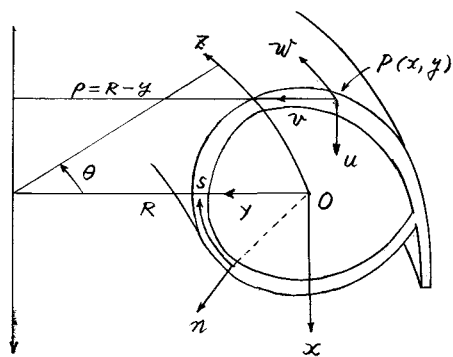


Fig. 1

$$\varepsilon_\theta = \frac{R}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{w}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right)^2 \right\} \quad (1.c)$$

$$\gamma_{\rho s} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \quad (1.d)$$

$$\gamma_{\theta \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{w}{\rho} \right) + \frac{R}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{w}{R} \right) + \frac{\partial w}{\partial \rho} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) \right\} \quad (1.e)$$

$$\gamma_{\theta s} = \frac{R}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{w}{R} \right) + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) \right\} \quad (1.f)$$

ここで $\partial z = R \partial \theta$ である。後の便宜のために断面内の薄肉中心線に沿う S 座標とこれに直交する n 座標を導入する。Fig. 2 において座標 S の方向余弦と

$$\ell = \cos(S, x) = \sin \beta, \quad m = \cos(S, y) = -\cos \beta \quad (2)$$

と定義すると、点 $P(x, y)$ の S, n 軸方向の変位 ξ, η は

$$\xi = \ell u + m v, \quad \eta = m u - \ell v \quad (3)$$

である。薄肉中心線上の点の座標と (x^*, y^*) とし、この点を通る母線の曲率半径 ρ^* とすると (x, y) における ρ との関係は

$$x = x^* + m \cdot n, \quad y = y^* - \ell \cdot n, \quad \rho = (r_2 + n) \ell = R - y, \quad \rho^* = r_2 \ell = R - y^* \quad (4)$$

薄肉中心線に沿うせん断ひずみと $\gamma_{s\theta}$ 、肉厚方向のせん断ひずみと $\gamma_{n\theta}$ とすると

$$\gamma_{s\theta} = \ell \gamma_{\theta s} + m \gamma_{\theta \rho}, \quad \gamma_{n\theta} = m \gamma_{\theta s} - \ell \gamma_{\theta \rho} \quad (5)$$

式 (1.e), (1.f) と式 (5) に代入し、座標変換

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\ell}{1+n/r_1} \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{m}{1+n/r_1} \frac{\partial}{\partial s} - \ell \frac{\partial}{\partial n} \quad (6)$$

を用いると

$$\gamma_{n\theta} = \frac{R}{\rho} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{w}{R} \ell \right) + \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{w}{R} m \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{w}{R} \ell \right) + \frac{\partial w}{\partial n} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) \right\} \quad (7.a)$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{R}{\rho} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{w}{R} m \right) + \frac{1}{1+n/r_1} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{1+n/r_1} \frac{R}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\eta}{r_1} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{w}{R} m \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\xi}{r_1} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{w}{R} \ell \right) + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) \right\} \quad (7.b)$$

これは薄肉回転シェルのせん断ひずみ-変位関係式と同一のものである。

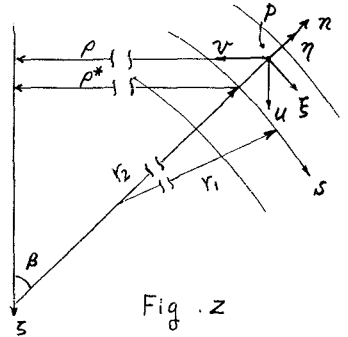
3. 弾理論の仮定に基づく非線形偏微分方程式の摂動法による解

(1) 摂動法

弾理論の仮定は (i) 横断面形は不変である。ひずみで表わすと

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_s = \gamma_{\rho s} = 0 \quad (8)$$

(ii) 薄肉であるから肉厚方向のせん断ひずみ $\gamma_{n\theta}$ は無視できる。 (iii) 薄肉中心面に平行な断面のせん断ひずみ $\gamma_{s\theta}$ のうち、直応力や荷重と釣り合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみ



は小さく無視できる。これをひずみで表わすと t を板厚として

$$Y_{n0} = 0, \quad \rho^{*2} \tau_{s0}^* t = \text{一定} \equiv R^2 g \quad (9.a, b)$$

ただしせん断応力 $\tau_{s0} = G Y_{s0}$ の板厚方向の変化と直線と近似した場合であり、 $*$ は薄肉中央面の量であることを示す。 $\tau_{s0}^* = G Y_{s0}^*$ と式 (9. b) より

$$Y_{s0}^* = \frac{R^2}{G \rho^{*2} t} g \quad (10)$$

ひずみは 1 にくらべて十分小さいものとする、ひずみ-変位関係式 (1) と (7) の右辺の 2 次項は、線形変位のオーダーより 2 次程度オーダーの高い微小量であるから、これら 2 次項に板厚のパラメータ μ を乗じると、式 (8)、式 (9. a) より $\partial \rho = \partial y$, $\partial z = \partial x$ と考慮して

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (11. a \sim c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{R}{\rho} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{w}{R} l \right) + \mu \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial n} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{w}{R} m \right) + \frac{\partial \eta}{\partial n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{w}{R} l \right) + \frac{\partial w}{\partial n} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) \right\} = 0 \quad (11. d)$$

となる。 μ は 0 (線形) から 1 (非線形) であるが、 $0 \leq \mu \leq 1$ の範囲で連続的に変化する微小なパラメータと板厚とするのである。すると擾動法によれば断面内の任意点の変位は μ の Taylor 級数展開

$$\left. \begin{aligned} u &= u^{(0)} + \mu u^{(1)} + \mu^2 u^{(2)} + \dots \\ v &= v^{(0)} + \mu v^{(1)} + \mu^2 v^{(2)} + \dots \\ w &= w^{(0)} + \mu w^{(1)} + \mu^2 w^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

の形で表わされる。ここで $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $w^{(i)}$ は x, y, z の関数である。変位 ζ , η も同様に

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta^{(0)} + \mu \zeta^{(1)} + \mu^2 \zeta^{(2)} + \dots \\ \eta &= \eta^{(0)} + \mu \eta^{(1)} + \mu^2 \eta^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

薄肉中央面の変位は、式 (12), (13) の両辺の各項に指標 $*$ を付けて表わす。例えば

$$w^* = w^{*(0)} + \mu w^{*(1)} + \mu^2 w^{*(2)} + \dots \quad (14)$$

などである。

薄肉中央面のせん断ひずみ Y_{s0}^* は、 Y_{s0} の定義式 (7. b) で $n=0$ とし、右辺の ζ , η , v および w をそれぞれ ζ^* , η^* , v^* および w^* とおいたものである。したがって、式 (14) から式 (10) の Y_{s0}^* を μ の Taylor 級数展開

$$Y_{s0}^* = \frac{R^2}{G \rho^{*2} t} (g^{(0)} + \mu g^{(1)} + \mu^2 g^{(2)} + \dots) \quad (15)$$

の形で表わされるべきであらう。ここで $g^{(m)}$ は定数である。式 (7. b) で $n=0$ とおき、右辺の変位に指標 $*$ を付与、2 次項にパラメータ μ を乗じ式に等置すると

$$\frac{\partial w^*}{\partial s} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial z} + \frac{w^*}{R} m \right) + \mu \frac{R}{\rho^*} \left\{ \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial s} + \frac{\eta^*}{r} \right) \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial z} + \frac{w^*}{R} m \right) + \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial s} - \frac{\zeta^*}{r} \right) \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial z} - \frac{w^*}{R} l \right) \right\}$$

$$+\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} - \frac{\bar{v}^*}{R} \right) \Big\} = \frac{R^2}{G \rho^* z t} (g^{(0)} + \mu g^{(1)} + \mu^2 g^{(2)} + \dots) \quad (16)$$

(x, y) 座標の原点 O での u, v, w の値をそれぞれ u_0, v_0, w_0 とすると、微分方程式 (11), (16) と境界条件

$$x = y = 0 \quad \text{で} \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0 \quad (17)$$

のあとに解くとよい。原点 O が薄肉円心線上にない場合は、S 座標の原点を O と Fig. 1 に示すように板厚 $t=0$ の仮想の薄板に結ぶ³⁾。式 (12), (13), (14) を式 (11), (16) に代入し、 μ の各項と比較すれば μ^0 の係数から

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad (18.a \sim c)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} - \frac{\bar{w}_0}{R} \ell \right) = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0^*}{R} m \right) = \frac{R^2}{G \rho^* z t} g^{(0)} \quad (18.d, e)$$

μ^1 の係数から

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (19.a \sim c)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} - \frac{\bar{w}_1}{R} \ell \right) + \frac{R}{\rho^*} \left\{ \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0}{R} m \right) + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} - \frac{\bar{w}_0}{R} \ell \right) + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} - \frac{\bar{v}_0}{R} \right) \right\} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial z} + \frac{\bar{w}_1^*}{R} m \right) + \frac{R}{\rho^*} \left\{ \frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} + \frac{\bar{w}_0^*}{R} \right\} \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0^*}{R} m \right) + \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} - \frac{\bar{w}_0^*}{R} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} - \frac{\bar{w}_0^*}{R} \ell \right) + \frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} - \frac{\bar{v}_0^*}{R} \right) \Big\} = \frac{R^2}{G \rho^* z t} g^{(1)} \quad (19.d, e)$$

μ^2 の係数から

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} = 0 \quad (20.a, b)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (20.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z} - \frac{\bar{w}_2}{R} \ell \right) + \frac{R}{\rho^*} \left\{ \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0}{R} m \right) + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0}{R} m \right) + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} - \frac{\bar{w}_1}{R} \ell \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} - \frac{\bar{w}_0}{R} \ell \right) + \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z} - \frac{\bar{v}_1}{R} \right) + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial z} - \frac{\bar{v}_0}{R} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20.d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_2^*}{\partial s} + \frac{R}{\rho^*} \left(\frac{\partial \bar{w}_2^*}{\partial z} + \frac{\bar{w}_2^*}{R} m \right) + \frac{R}{\rho^*} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} + \frac{\bar{w}_0^*}{R} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0^*}{R} m \right) + \left(\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} + \frac{\bar{w}_1^*}{R} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} + \frac{\bar{w}_0^*}{R} m \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} - \frac{\bar{w}_0^*}{R} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial z} - \frac{\bar{w}_1^*}{R} \ell \right) + \left(\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} - \frac{\bar{w}_1^*}{R} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} - \frac{\bar{w}_0^*}{R} \ell \right) + \frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial z} - \frac{\bar{v}_1^*}{R} \right) + \frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{w}_0^*}{\partial z} - \frac{\bar{v}_0^*}{R} \right) \right\} \\ = \frac{R^2}{G \rho^* z t} g^{(2)} \end{aligned} \quad (20.e)$$

式(18)は線形理論であるから既知であり、これを式(19)に代入して $u_0, v_0, \dots$ について解く。次にこれら既知の $u_0, v_0, \dots, u_1, v_1, \dots$ を式(20)に代入して $u_2, v_2, \dots$ について解く。以下順次高次の解が得られる。擾動方程式(19), (20)は定数係数の1階連立線形微分方程式であり、何ら特異点と含まないから、べき級数(12), (13)は正解に収束することが期待される。

(2) 第1近似解

式(18)は上述のように線形問題であり、境界条件(17)のもとでその解は

$$u_0 = u_0 - y \varphi, \quad v_0 = v_0 + x \varphi, \quad w_0 = w_0 - x \phi_x - y \phi_x - \omega \varphi_z \quad (21)$$

ここで φ は Fig.1 で時計まわりと正とする断面のねじれ角, ϕ_x, ϕ_y はそれぞれ x, y 軸まわりの捻ね回転角であり, φ_z は z 軸まわりのねじれ率であって材料軸線の歪変で表わすと

$$\phi_x = \frac{dw_0}{dz} + \frac{w_0}{R}, \quad \phi_y = \frac{du_0}{dz}, \quad \varphi_z = \frac{d\varphi}{dz} - \frac{1}{R} \frac{du_0}{dz} \quad (22)$$

ω はより関数であって

$$\omega(s, n) = \frac{\rho}{R} \left(\int_0^s \frac{R^2}{\rho^{*2}} r_s ds - \tilde{g}_0 \int_0^s \frac{R^3}{\rho^{*3} t} ds - \int_0^s \frac{R^2}{\rho^{*2}} r_s^* ds \right) + \frac{R}{\rho^*} r_n \cdot n \quad (23)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} r_s &= m x - l y, \quad r_s^* = m x^* - l y, \quad r_n = -l x - m y \\ \tilde{g}_0 &= \frac{\oint \frac{R^2}{\rho^{*2}} r_s^* ds}{\oint \frac{R^3}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds}, \quad g_0 = G \cdot \tilde{g}_0 \cdot \varphi_z \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$*$ は断面中心線に関する量であり式(4)より $r_s = r_s^* + n$, $r_n = r_n^*$ である。また式(21)のカッコ内の第3項の S_0 は原点 O の s 座標の値である。同じ断面または同じ区間で $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_{00} = 0$ である。したがって原点 O では

$$\omega(s, n) = \omega(s_0, 0) = 0 \quad (25)$$

となっている。

(3) 第2近似解

式(21)の w_0 でねじれによる断面の歪りを表わす項 $(-\omega \varphi_z)$ は, w_0 を原点 O のまわりで Taylor 級数展開したときの高次項に相当する。それ故擾動式(19)の2次項においては

$$w_0 \approx w_0 - x \phi_x - y \phi_x \quad (26)$$

と近似できる。式(21.a), (21.b)と上式と式(19.a), (19.b)に代入して u_1, v_1 について解くと

$$u_1 = -\frac{1}{2}(\varphi^2 + \phi_x^2)x + C_1, \quad v_1 = -\frac{1}{2}(\varphi^2 + \phi_x^2)y + C_2 \quad (27)$$

と得る。 C_1, C_2 は積分定数であってそれぞれ y, x および x, y の関数である。これを式(19.c)に代入すると

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} = -\phi_x \phi_y \quad (28)$$

C_1, C_2 を定めるための方程式はこの式だけである。しかし右辺は φ の関数である x と y の関数である。これと式(19.c)に代入すると

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{\partial C_1}{\partial y} = -\frac{1}{2} \phi_x \phi_y \quad (29)$$

とすることが妥当であろう。式 (29) により得られる変位場は適当な場合には幾何学的考察により確かめる必要がある。このことは、第一近似解つまり線形解では式 (28) に相当する方程式は $\partial C_2 / \partial x + \partial C_1 / \partial y = 0$ となり、これより α を定数として $C_2 = \alpha \cdot x$, $C_1 = -\alpha \cdot y$ (積分定数は除く) が得られ、この α が断面のねじれ角 φ であることは幾何学的に説明されることと類似している。式 (29) より

$$C_1 = -\frac{1}{2} \phi_x \phi_y \cdot y, \quad C_2 = -\frac{1}{2} \phi_x \phi_y \cdot x \quad (30)$$

これを式 (29) に代入すると u_0 , v_0 はそれぞれ

$$u_0 = -\frac{1}{2} (\varphi^2 + \phi_y^2) \cdot x - \frac{1}{2} \phi_x \phi_y \cdot y, \quad v_0 = -\frac{1}{2} (\varphi^2 + \phi_x^2) \cdot y - \frac{1}{2} \phi_x \phi_y \cdot x \quad (31)$$

なお式 (30) では積分定数は 0 である。これは境界条件 (17) より

$$u(x=0, y=0) = (u_0 + \mu u_0) \Big|_{y=0} = u_0, \quad v(x=0, y=0) = (v_0 + \mu v_0) \Big|_{y=0} = v_0 \quad (32)$$

だからである。すなわち原点 $x=y=0$ では u_0 , v_0 は 0 でなければならぬ。 w_0 についても同様であり、撓動解に対する境界条件は以上まとめると

$$x=y=0 \quad \text{で} \quad u_{(m)} = v_{(m)} = w_{(m)} = 0 \quad (33)$$

ただし $m \geq 1$ である。

次に式 (12), (13) と式 (3) に代入して μ のべきの係数を比較すると μ^0 からは

$$\left. \begin{aligned} \xi_{(0)} &= l \cdot u_0 + m \cdot v_0 = l \cdot u_0 + m \cdot v_0 + r_s \cdot \varphi \\ \eta_{(0)} &= m \cdot u_0 - l \cdot v_0 = m \cdot u_0 - l \cdot v_0 + r_n \cdot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

μ^1 の係数からは

$$\left. \begin{aligned} \xi_{(1)} &= l u_0 + m v_0 = \frac{1}{2} (\varphi^2 r_n - \phi_x^2 m y - \phi_y^2 l x) - \frac{1}{2} \phi_x \phi_y (m x + l y) \\ \eta_{(1)} &= m u_0 - l v_0 = \frac{1}{2} (-\varphi^2 r_s + \phi_x^2 l y - \phi_y^2 m x) + \frac{1}{2} \phi_x \phi_y (l x - m y) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

を得る。式 (21), (34), (35) と式 (19. d) に代入し、式 (21), (34), (35) で x, y, r_n, r_s をそれぞれ薄肉円中心線上の量 x^*, y^*, r_n^*, r_s^* と置き換えたものを式 (19. e) に代入する。結果だけを示すと式 (19. d), (19. e) はそれぞれ

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} - \frac{l}{\rho} w_0 + \frac{R}{\rho} \left\{ \varepsilon_x (l \phi_x - m \phi_y) - \frac{1}{2} (\phi_x' \phi_y - \phi_x \phi_y') r_n + \varphi \phi_y l + \varphi \phi_x (m + \frac{r_n}{R}) \right\} = 0 \quad (36. a)$$

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial s} + \frac{m}{\rho^*} w_0^* + \frac{R}{\rho^*} \left\{ -\varepsilon_x (l \phi_y + m \phi_x) - \frac{1}{2} (\phi_x' \phi_y - \phi_x \phi_y') r_s^* - \varphi \phi_y m + \varphi \phi_x (l + \frac{r_s^*}{R}) \right\} = \frac{R^2}{G \rho^* t} g_m \quad (36. b)$$

となる。ここで

$$\varepsilon_x = \frac{dw_0}{dx} - \frac{v_0}{R} \quad (37)$$

である。方向余弦 l, m は式 (2) と ρ, ρ^* および x, y, x^*, y^* との関係式 (4) を用いて

$$m = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\rho^2}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{x}{\rho} \right) - \frac{r_n}{R}, \quad l = -\frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\rho^2}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{y}{\rho} \right) \quad (38)$$

又は

$$m = \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\rho^{*2}}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y^*}{\rho^*} \right), \quad l = \frac{\partial x^*}{\partial s} = \frac{\rho^{*2}}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^*}{\rho^*} \right) - \frac{r_s^*}{R} \quad (39)$$

と力書かれる。また

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial n} - \frac{\ell}{\rho} \omega_0 = \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\omega_0}{\rho} \right), \quad \frac{\partial \omega_0^*}{\partial s} + \frac{\pi}{\rho^*} \omega_0^* = \rho^* \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\omega_0^*}{\rho^*} \right) \quad (40. a, b)$$

式 (38), (40. a) と式 (36. a) に, 式 (39), (40. b) と式 (36. b) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\omega_0}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{x}{\rho} \right) \phi_3^{(0)} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{y}{\rho} \right) \phi_z^{(0)} + \frac{R r_0}{\rho^2} \psi_z^{(0)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\omega_0^*}{\rho^*} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x^*}{\rho^*} \right) \phi_3^{(0)} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y^*}{\rho^*} \right) \phi_z^{(0)} + \frac{R r_0^*}{\rho^{*2}} \psi_z^{(0)} &= \frac{R^2}{G \rho^{*3} t} g^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (41. a, b)$$

そこで簡単のために次のようにおいた。

$$\left. \begin{aligned} \phi_z^{(0)} &= -\mathcal{G} \phi_3 - \mathcal{E}_z \phi_x, \quad \phi_3^{(0)} = \mathcal{G} \phi_x - \mathcal{E}_z \phi_3 \\ \psi_z^{(0)} &= \frac{1}{2} (\phi_x \phi_3' - \phi_z \phi_3) + \frac{1}{R} \mathcal{E}_z \phi_3 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式 (41) は第1近似解を求める際に現われるより ω_0 , ω_0^* に関する方程式と全く同型であり
定数 $g^{(0)}$ はより ω_0^* の連続の条件

$$\oint \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\omega_0^*}{\rho^*} \right) ds = 0 \quad (43)$$

に式 (41. b) を代入して,

$$g^{(0)} = G \tilde{g}^{(0)} \psi_z^{(0)}, \quad \tilde{g}^{(0)} = \frac{\oint \frac{R^2}{\rho^{*2}} r_0^* ds}{\oint \frac{R^2}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds} = \tilde{g}_0 \quad (44)$$

となる。 ω_0^* は ω_0 の $n=0$ での値であるから式 (41) の境界条件は式 (33) から

$$\rho^* = R, \quad x^* = y^* = 0, \quad \omega_0^* = 0 \quad (45)$$

よって式 (41) の解は

$$\omega_0 = -x \phi_3^{(0)} - y \phi_z^{(0)} - \omega \psi_z^{(0)} \quad (46)$$

ω は式 (23) で定義されているより関数である。第1近似解と式 (31), (46) で得られた
 u_0 , v_0 , ω_0 と式 (12) に代入して $\mu=1$ とおくと第2近似解は,

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \left(\mathcal{G} + \frac{1}{2} \phi_x \phi_3 \right) - \frac{1}{2} x (\mathcal{G}^2 + \phi_3^2), \quad v = v_0 + x \left(\mathcal{G} - \frac{1}{2} \phi_x \phi_3 \right) - \frac{1}{2} y (\mathcal{G}^2 + \phi_x^2) \\ \omega &= \omega_0 - x (\phi_3 + \mathcal{G} \phi_x - \mathcal{E}_z \phi_3) - y (\phi_z - \mathcal{G} \phi_3 - \mathcal{E}_z \phi_x) - \omega \left(\psi_z + \frac{1}{2} \phi_x \phi_3' - \frac{1}{2} \phi_x' \phi_3 + \frac{1}{R} \mathcal{E}_z \phi_3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

薄肉中心線に沿うせん断ひずみ γ_{s0} は, 式 (7. b) に上式を代入するか, または式 (12), (13)
で μ' の項で採用したものを式 (7. b) に代入して $\mu=1$ とおくことにより得られる。結果
だけを示すと

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{s0} &= (H) (\psi_z + \psi_z^{(0)}) \\ (H) &= \frac{1}{1+n/r_1} \cdot \frac{R}{\rho \rho^*} \left\{ 2n + n^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\rho^2}{\rho^{*2}} \cdot \frac{\tilde{g}_0}{t} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ここで薄肉であるから $n/r_1 \ll 1$, $n/r_2 \ll 1$ として n の2次項は無視できる。式 (47)
と $\mathcal{E}_0$ の定義式 (1. C) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \frac{R}{\rho} \left\{ \varepsilon_z - \chi(K_y + \varphi K_x + \frac{1}{2R} \phi_x \phi_y) - \eta(K_x - \varphi \phi_y' - \frac{1}{2R} \phi_y^2 - \frac{1}{2R} \varphi^2) \right. \\ \left. - \omega(\mathcal{U}_\omega + \frac{1}{2} \phi_x \phi_y'' - \frac{1}{2} \phi_x'' \phi_y) + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right\} \\ + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \left\{ \chi^2(K_y^2 + \mathcal{U}_z^2) + \eta^2(K_x^2 + \mathcal{U}_z^2) + 2\chi\eta K_x K_y \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

ここで ε_z を含む 2 次項は微小項として無視した。また上式で次のようにおいた。

$$K_y = \phi_y' + \frac{\varphi}{R}, \quad K_x = \phi_x', \quad \mathcal{U}_\omega = \mathcal{U}_z' \quad (50)$$

(4) 第 3 近似解

第 2 近似解の場合と同様に進行する。式 (20. a), (20. b) の解として

$$U_{(2)} = \phi_y(\varepsilon_z \phi_y - \frac{1}{2} \varphi \phi_x) \chi + C_3, \quad V_{(2)} = \phi_x(\varepsilon_z \phi_x + \frac{1}{2} \varphi \phi_y) \eta + C_4 \quad (51)$$

C_3, C_4 はそれぞれ η, χ および χ, ε の関数。式 (20. c) に代入すると式 (28) に相当する式は

$$\frac{\partial C_4}{\partial \chi} + \frac{\partial C_3}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \varphi (\phi_y^2 - \phi_x^2) + 2\varepsilon_z \phi_x \phi_y \quad (52)$$

χ 軸と η 軸を取り換え、 ε 軸の向きを逆 ($\varphi \rightarrow -\varphi$) にしても右辺は変わらないから式 (29) と同じ

$$\frac{\partial C_4}{\partial \chi} = \frac{\partial C_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \varphi (\phi_y^2 - \phi_x^2) + \varepsilon_z \phi_x \phi_y \quad (53)$$

積分定数は 0 であるからこの解を式 (51) に代入して、

$$\left. \begin{aligned} U_{(2)} &= \phi_y(\varepsilon_z \phi_y - \frac{1}{2} \varphi \phi_x) \chi + \left\{ \frac{1}{4} \varphi (\phi_y^2 - \phi_x^2) + \varepsilon_z \phi_x \phi_y \right\} \eta \\ V_{(2)} &= \phi_x(\varepsilon_z \phi_x + \frac{1}{2} \varphi \phi_y) \eta + \left\{ \frac{1}{4} \varphi (\phi_y^2 - \phi_x^2) + \varepsilon_z \phi_x \phi_y \right\} \chi \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$W_{(2)}, W_{(2)}^*$ を求める手順が式 (34) から式 (46) まで同様であり、結果は

$$W_{(2)} = -\chi \phi_y^{(2)} - \eta \phi_x^{(2)} - \omega \mathcal{U}_z^{(2)} \quad (55)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \phi_y^{(2)} &= -\varepsilon_z(\varphi \phi_x - \varepsilon_z \phi_y) - \frac{1}{2} \phi_y(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \varphi^2) \\ \phi_x^{(2)} &= \varepsilon_z(\varphi \phi_y + \varepsilon_z \phi_x) - \frac{1}{2} \phi_x(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \varphi^2) \\ \mathcal{U}_z^{(2)} &= \frac{1}{2} \mathcal{U}_z \varphi^2 + \frac{1}{4} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \varphi' + \frac{1}{2} (\phi_x \phi_x' + \phi_y \phi_y') \varphi \\ &\quad + \varepsilon_z \left(-\phi_x \phi_y' + \phi_x' \phi_y - \frac{1}{R} \varepsilon_z \phi_y \right) + \frac{1}{2R} \phi_y(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \varphi^2) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

第 3 近似解は式 (12) で μ^2 の項の和であり、 $\mu = 1$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} U &= U_{(0)} + U_{(1)} + U_{(2)}, \quad V = V_{(0)} + V_{(1)} + V_{(2)} \\ W &= W_0 - \chi(\phi_x + \phi_x^{(1)} + \phi_x^{(2)}) - \eta(\phi_y + \phi_y^{(1)} + \phi_y^{(2)}) - \omega(\mathcal{U}_z + \mathcal{U}_z^{(1)} + \mathcal{U}_z^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

を代入すると $\mathcal{H}_{so}$ は

$$\mathcal{H}_{so} = \mathcal{H} \cdot (\mathcal{U}_z + \mathcal{U}_z^{(1)} + \mathcal{U}_z^{(2)}) \quad (58)$$

4 既往の研究との比較および結論

Fig. 3 において, 変位前に C の状態の断面が, 断面は平面と保持したまま C' の状態になったとし, 断面に固定された座標系 (x_1, x_2, x_3) は (x'_1, x'_2, x'_3) へ移動したとする。原点 O の変位ベクトルを $u_0 = u_0 \cdot i_1 + v_0 \cdot i_2 + w_0 \cdot i_3$ とすると両座標の関係は

$$\begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \right) \quad (59)$$

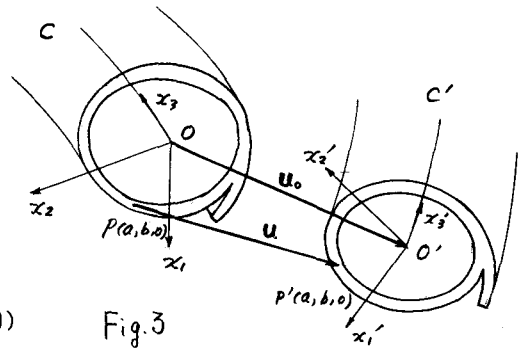


Fig. 3

r_{ij} は x'_i 軸と x_j 軸とのなす角の余弦, つまり方向余弦である。変位前の断面上の任意点 $P(a, b, 0)$ が変位 $u = u_0 i_1 + v_0 i_2 + w_0 i_3$ によって点 P' へ移動したとすると断面形不変の仮定から変位後の座標系における座標を $(a, b, 0)$ である。よって式 (59) で

$$\{x_1, x_2, x_3\}^T = \{a, b, 0\}^T + \{u, v, w\}^T \quad \text{および} \quad \{x'_1, x'_2, x'_3\}^T = \{a, b, 0\}^T \quad (60)$$

とおき $\{u, v, w\}^T$ について解き, 座標 $(a, b, 0)$ を改めて $(x, y, 0)$ とかくと

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11}-1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22}-1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11}-1 & r_{12} \\ r_{12} & r_{22}-1 \\ r_{13} & r_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (61)$$

行列 $[r_{ij}]$ は前田・林⁴⁾による回転行列であり, 軸線の変位の2次項まで考慮して上式に代入して

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\varphi^2 + \phi_g^2)/2 & -\varphi - \phi_z \phi_g/2 \\ \varphi - \phi_z \phi_g/2 & -(\varphi^2 + \phi_z^2)/2 \\ -\phi_g - \varphi \phi_z/2 & -\phi_z + \varphi \phi_g/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (62)$$

と示した (過程は若干異なる)。これを式 (47) と比較すると u, v については一致しているが軸方向変位 w については上式の $-\varphi \phi_z/2$ と $\varphi \phi_g/2$ は式 (47) ではそれぞれ $-\varphi \phi_z + \varepsilon_x \phi_g$ と $\varphi \phi_g + \varepsilon_x \phi_z$ となっている。また式ではより関数の項は当然のことでは現われていない。

式 (62) の変位場は断面の剛体変位と取られているが, 変位 w を (剛体変位) + (そり) と考えて, 仮定 (ii), (iii) と適用した場合が事からいって与えられ, ねじれ率の2次項を $(\phi_z \phi'_g - \phi'_z \phi_g)$ としているが, 式 (47) では $(\phi_z \phi'_g - \phi'_z \phi_g)/2 + \varepsilon_x \phi_g/R$ となっている。

式 (47), (57) と見ると分かるように, 摂動法による変位場は第2, 第3近似, ……と進むにつれ, 微小変位の場合の軸線の回転成分 φ, ϕ_z, ϕ_g および $\varphi', \phi'_z, \phi'_g$ の高次項が次々に現われる。したがって Taylor 展開式 (12) はパラメータ μ についての展開であると同時に, これら回転成分についての級数展開でもあるから, 式 (12) の収束範囲は

$$\varphi, \phi_z, \phi_g < 1, \quad \varphi', \phi'_z, \phi'_g < \frac{1}{R} \quad (63)$$

である。

1) 西野ほか:「軸曲げ」と軸力を受ける棒の有限変位理論, 工学会論文報告集, 1975, Vol. 237 2) 西野ほか: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 同報告集, 1974, Vol. 225 3) F.H. Schroeder; Allgemeine Stabilitheorie, Ingenieur-Archiv, 1970, Band 39. 4) 前田・林: 柱体骨組構造の有限変位解析, 工学会論文報告集, 1976, Vol. 253

Displacement Distribution over a Cross Section as a Basis of Finite Deformation Analysis of a Thin Walled Curved Member

Seizo Usuki* and Tomonori Kano**

The basis for explaining various types of buckling phenomena and post buckling behavior or large elastic deformations of a thin walled beam is a displacement and stress distribution over the cross section which will be obtained by applying the hypotheses of thin walled beam theory- no distortion of cross section and Euler-Bernoulli hypotheses on shear strains- to three dimensional nonlinear strain-displacement relations.

Let x, y, z be an orthogonal curvilinear coordinate in which x and y axis are fixed on the plane of cross section, and also s, n, z in which s is directed tangent to the center line of the thin wall and n is normal to s . Then the hypotheses of a thin walled curved member are expressed as

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{sz}^* = R^2 q / G \rho^* z^2 t$$

where R and ρ^* denote the radius of curvature at the origin of x, y coordinate and that at a point on the center line respectively, q and t an arbitrary constant and wall thickness respectively and G the shear modulus. In the case of an open section q equals to zero. If we apply above hypotheses to the three dimensional nonlinear strain-displacement relations in orthogonal curvilinear coordinates, we would obtain nonlinear partial differential equations with respect to unknown displacement distributions u, v, w and w^* describing displacement at a point on the center line of the thin wall. These equations system, however, could not be solved analytically except for such a simple case as the elastica.

The basic idea to overcome this difficulty is in the following: Assuming a small strain compared to unity, the orders of nonlinear terms in strain-displacement relations are much higher than those of linear terms. Then multiply all the nonlinear terms by a fictitious small parameter μ ($0 \leq \mu \leq 1$) and let the sum of linear terms and nonlinear terms multiplied by parameter μ be new strain-displacement relations. Then we can use the perturbation method for solving the nonlinear partial differential equations system described above.

As a result, The displacement distributions over the cross section are expressed in first, second or much higher order terms of displacements at the origin in x, y coordinate and of rotations about x, y and curved z axis. The nonzero strain components ϵ_x and γ_{sz} are also expressed by nonlinear curvatures about x and y axis and nonlinear rate of twist about z axis.

The displacement and strain distributions obtained in this paper will converge to exact solutions in the limit that the angles of rotations are smaller than unity, since they are expressed by Taylor expansions on the rotations about three axes x, y and z in the case of linear problem.

* Associate Professor, Department of Civil Engineering, Akita University.

** Professor, Department of Civil Engineering, Akita University.