18 Green演算子表示による変分不等式を用いた剛体の押し込み問題について

Texas大学 菊池 昇

1. はじめに

この小論では剛体の変形可能な物体への押し込み問題を、変分不等式による定式化，近似方法，及び解法について述べる。最初に地盤の一次元モデルであるPasternak地盤を用いて、理論の背景と構造を説明し、一般的な弾性地盤に理論を拡張する準備をする。ここに述べる定式化の大きな特徴は、従来困難であった押し込み問題の理論化を容易に可能にする点と、有限要素法や差分法などの汎用近似方法によって解かれる点にある。押し込み問題の変分不等式による定式化はDuvaut[1]，Kikuchi[2]によって行なわれているが、ここではGreen関数で表現されるGreen演算子（近似的には有限要素法による剛性マトリックスの逆）による定式化を考える。このため正定値演算子の逆が存在するという微分方程式論の基本的な事実を使う。この逆演算子は、Green演算子と一般に呼ばれ、一次問題や形状の単純な三次元問題の場合は、Green関数によって陽に表現される。第2節では、変分不等式による定式化が可能な形で、剛体と地盤の接触条件を述べ、第3節では、変分不等式による定式化を行い、解の存在，唯一性を、補助問題の比較定理，適切性を使って証明する。注意に値することは、証明の過程自体が変分不等式を解くAlgorithmになることである。第4節では$H^{-1}(-L,L)$空間における変分不等式の近似について議論し、第5節では数値解析例を示す。第6節では、第2〜第5節に述べた理論を、地盤が弾性連続体である場合について一般化する。

2. Pasternak地盤と接触条件

Pasternak地盤は剪断力にのみ抗する板要素と連続分布したバネ要素によって構成される地盤の単純モデルで、図1に示されるように、鉛直方向の圧力$p(x)$，剪断係数μ，バネ定数k，鉛直方向の変位$w(x)$に対して、支配方程式

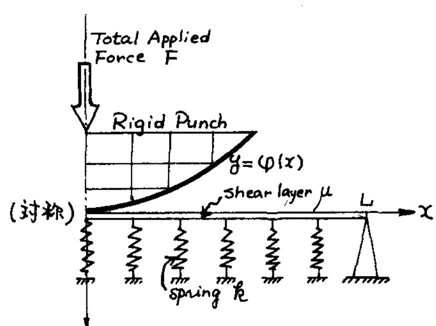


図1. Pasternak地盤

$$(1) \qquad p(x) = -(\mu w')' + k w$$

によって表現される。ここに，w'は$\frac{dw}{dx}$を意味する。地盤の長さを $2L$ とすると，図1に示される場合の境界条件は， $w(-L) = w(L) = 0$ である。もし，$\mu(x) \geq \mu_0$，$k(x) \geq k_0$ を満たす正の定数μ_0とk_0が存在すれば，任意の L に対して（$L = \infty$をも含む），

$$(2) \qquad \langle A(u), v \rangle = \int_{-L}^{L} (\mu u'v' + k u v)\, dx$$

で定義される演算子Aは，Sobolev空間 $H_0^1(-L,L)$ で正定値になる。実際，$\langle A(u), u \rangle \geq c\, \|u\|_1^2$，$c = \min(\mu_0, k_0) > 0$，$\|u\|_1^2 = \int_{-L}^{L} \{(u')^2 + u^2\}\, dx$ の評価式が満され，線型演算子Aは対称である。従って，演算子Aの逆 $G: H^{-1}(-L,L) \to H_0^1(-L,L)$ が存在して，$H^{-1}(-L,L)$ 空間上で連続となり，任意の $f \in H^{-1}(-L,L)$ に対して

(3) $$A(u) = f \quad \text{if and only if} \quad u = G(f)$$

が成立する。ここに，空間 $H^{-1}(-L,L)$ は，Sobolev 空間 $H_0^1(-L,L)$ の双対空間である。演算子Aは，また，$H_0^1(-L,L)$ から $H^{-1}(-L,L)$ への連続写像であることから，逆演算子Gは，正定値であることがわかる。演算子Aは，領域$(-L,L)$において2回微分可能な関数 $w(x)$ に対しては，

$$A(w) = -(\mu w')' + k w$$

を意味するが，一般には，$(-L,L)$上で連続微分可能，かつ，両端で零になる関数族の完備化された集合，$H_0^1(-L,L)$ 上で意味をもつことができる。大まかに述べると $H_0^1(-L,L)$ は，区間的に連続微分可能な，両端で零となる関数の集りである。従って，その双対空間である $H^{-1}(-L,L)$ には，種々の分布力，集中力などの"関数"が含まれる。ここでは，地盤の変位を$H_0^1(-L,L)$上で，接触圧力（集中圧力の可能性をも含めて）を $H^{-1}(-L,L)$上で定義することになる。

さて，押し込まれる剛体と地盤の接触条件を，押し込み剛体の形状を $y=\varphi(x)$ として求めると，当初から接触している部分のどこか一点における地盤の変位を w_0 とおくと，

(4) $$w = w_0 + \varphi \;,\; p \geq 0 \;\text{on}\; \Gamma_c \;,\; w > w_0 + \varphi \;,\; p = 0 \;\text{on}\; \Gamma_N \;,\; \int_{-L}^{L} p\,dx = F$$ ，即ち

(5) $$p(w - w_0 - \varphi) = 0, \quad p \geq 0, \quad w - w_0 - \varphi \geq 0 \;\text{on}\; (-L,L) \;,\; \int_{-L}^{L} p\,dx = F$$

ここで，$p \geq 0$ の意味は，すべての $v \geq 0$ ，$v \in H_0^1(-L,L)$ に対して $\int_{-L}^{L} pv\,dx \geq 0$ が成立することであり，$\int_{-L}^{L} p\,dx = F$ は，十分に小さい固定された正の定数 ε について，区間$(-L+\varepsilon, L-\varepsilon)$で定数となり，$H_0^1(-L,L)$ に含まれる関数すべてに対して $\int_{-L+\varepsilon}^{L-\varepsilon} pv\,dx = F\int_{-L+\varepsilon}^{L-\varepsilon} v\,dx$ となることを意味する。関係式 (1) と (3) から，Green 演算子Gを用いて，接触条件式 (5)は，

(6) $$p(G(p) - w_0 - \varphi) = 0, \; p \geq 0, \; G(p) - w_0 - \varphi \geq 0 \;\text{on}\; (-L,L), \; \int_{-L}^{L} p\,dx = F$$

と書き改められる。式 (6) を，押し込み問題の接触条件と呼ぶ。

3. 変分不等式による定式化と解の存在証明及び唯一性

接触条件(6)から変分不等式を求めよう。qを，$q \geq 0$ ，$\int_{-L}^{L} q\,dx = F$ を満す任意の $H^{-1}(-L,L)$の要素とすると，条件(6)から

$$\int_{-L}^{L} (G(p) - w_0 - \varphi)(q - p)\,dx = \int_{-L}^{L} (G(p) - w_0 - \varphi)\, q\,dx \geq 0$$

が導びかれる。即ち

(7) （問題）任意の $q \in K$ に対して不等式 $\int_{-L}^{L} (G(p) - w_0 - \varphi)(q - p)\,dx \geq 0$
を満す $(p, w_0) \in K \times \mathbb{R}$ を求めよ。ここに，

(8) $$K = \left\{ q \in H^{-1}(-L,L) : \; q \geq 0 \;,\; \int_{-L}^{L} q\,dx = F \right\}$$

という変分不等式の問題が設定される。Kを決定する拘束条件の意味は，第2節で述べた通りであ

る。 集合Kは，簡単な計算により $H^{-1}(-L,L)$ の閉凸集合である。 さて，$(p, w_0) \in K \times \mathbb{R}$ を (7)(8) の解とすると，$p=0$ の区間では，$q \geqq 0$ で任意であるので，$G(p)-w_0-\varphi \geqq 0$ が結論づけられる。また，$p>0$ の区間では，$q=p \pm \lambda \geqq 0$，$\lambda>0$，λ は任意，のように選ぶことができるので不等式 (7) より，$G(p)-w_0-\varphi=0$ が結論づけられる。 これは，(7)(8) の解が，関係式 (4) を満すことを示している。 従って，変分不等式 (7)(8) は，剛体の押し込み問題を表現する。

次に問題 (7)(8) が解を持つことを，

(9) (補助問題) 任意の $q \in \hat{K}$ に対して不等式 $\int_{-L}^{L}(G(p)-\beta-\varphi)(q-p)\,dx \geqq 0$ を満す $p \in \hat{K}$ を，与えられた $\beta \in \mathbb{R}$ について求めよ。ここに

(10) $$\hat{K}=\{q \in H^{-1}(-L,L): \ q \geqq 0\}$$

という，別の変分不等式の比較定理と適切性を用いて証明しよう。 前述したように演算子 G は，正定値であるので，与えられた $\beta \in \mathbb{R}$，$\varphi \in H^{-1}(-L,L)$ について，唯一解を持つ。 更に，比較定理

(11) $$\beta \geqq \hat{\beta} \ \Rightarrow \ p \geqq \hat{p}$$

を満す。 p は β に対する，$\hat{p}$ は $\hat{\beta}$ に対する補助問題 (9)(10) の解である。 実際に，$\sup(p,\hat{p}) \geqq 0$，$\inf(p,\hat{p}) \geqq 0$ であるから

$$\int_{-L}^{L}(G(p)-\beta-\varphi)(\sup(p,\hat{p})-p)\,dx \geqq 0, \quad \int_{-L}^{L}(G(\hat{p})-\hat{\beta}-\varphi)(\inf(p,\hat{p})-\hat{p})\,dx \geqq 0$$

この2つの不等式を加え，関係 $\sup(p,\hat{p})=p+(\hat{p}-p)^+$，$\inf(p,\hat{p})=\hat{p}-(\hat{p}-p)^+$，$\phi^+=\sup(\phi,0)$ を用いて，

$$\int_{-L}^{L}(G(\hat{p})-G(p))(\hat{p}-p)^+\,dx \leqq \int_{-L}^{L}(\hat{\beta}-\beta)(\hat{p}-p)^+\,dx \leqq 0$$

関係 $(G(\hat{p})-G(p))(\hat{p}-p)^+ = G((\hat{p}-p)^+)(\hat{p}-p)^+ - G((\hat{p}-p)^-)(\hat{p}-p)^+$，$\phi^-=\sup(-\phi,0)$ を用いて

$$\int_{-L}^{L}G((\hat{p}-p)^+)(\hat{p}-p)^+\,dx \leqq 0 \ \Rightarrow \ (\hat{p}-p)^+=0 \ \Rightarrow \ \hat{p} \leqq p$$

が導びかれる。 ここで，Gの正定値性が使用された。 一方，補助問題 (9)(10) は適切で，即ち，関数 $\beta \longrightarrow p(\beta): \mathbb{R} \rightarrow H^{-1}(-L,L)$ は連続である。 $p(\beta)$ は，β に対する (9)(10) の解である。実際，p と $\hat{p}$ を β と $\hat{\beta}$ に対する解とすると

$$\int_{-L}^{L}(G(p)-\beta-\varphi)(\hat{p}-p)\,dx \geqq 0, \quad \int_{-L}^{L}(G(\hat{p})-\hat{\beta}-\varphi)(p-\hat{p})\,dx \geqq 0$$ ，即ち

$$\int_{-L}^{L}(G(p-\hat{p})(p-\hat{p}))\,dx \leqq \int_{-L}^{L}(\beta-\hat{\beta})(p-\hat{p})\,dx$$

演算子 G の正定値性から，評価式

(12) $$\|p-\hat{p}\|_{-1} \leqq C\,|\beta-\hat{\beta}|$$

が導びかれる。 $\|\cdot\|_{-1}$ は $H^{-1}(-L,L)$ のノルムである。 (12) は，問題 (9)(10) の適切性を示す。 従っ

て、比較定理(11)，適切性(12) から，関数 $\beta \to \int_{-L}^{L} p(\beta)\,dx$ は，単調に増大する連続関数であることがわかる。 これは，与えられた正の値 F に対して，$\int_{-L}^{L} p(\beta)\,dx = F$ となる実数 β が存在することを示し，この β についての補助問題の解 p が，剛体の押し込み問題の解となる。 更に，評価式(12)と，解の唯一性（補助問題(9)(10)）から，(7)(8)の解の唯一性が結論づけられる。

4．変分不等式の近似解法

最初に Green 演算子 G が Green 関数により陽に表現されている場合について議論しよう。 $H^{-1}(-L,L)$ 空間の要素 g は，積分 $\int_{-L}^{L} g\,v\,dx$，$v \in H_0^1(-L,L)$ を通じてのみ意味を持つので，空間 $H^{-1}(-L,L)$ の近似空間 S_h の基底 $\{\delta_i\}$ は，すべての $v \in H_0^1(-L,L)$ に対して，$\delta_i(v) = \int_{e_i^h} v\,dx / \mathrm{mes}\, e_i^h$ のように定義される。 ここに，区間$(-L,L)$は，有限要素 e_i^h の和集合で覆われ，i は要素番号，h は有限要素の長さを示す。 問題が一次元の場合，δ_i の代りに，$\hat{\delta}_i(v) = v(x_i)$，$x_i$ は i 要素の中央座標，を取ってもさしつかえない。 Sobolev の埋蔵定理によれば，すべての $H_0^1(-L,L)$ の要素は連続であるからである。 有限要素に付随する基底 δ_i が多項式表示できないのは，考えている空間が $H^{-1}(-L,L)$ という，変位が定義される $H_0^1(-L,L)$ の双対空間であることに因る。 基底 δ_i，もしくは，$\hat{\delta}_i$ を使い，集合 K，$\hat{K}$ は，$Q_i \in \mathbb{R}$ として，

$$(13)\qquad K_h = \{ g_h :\ g_h = \sum Q^i \delta_i\,,\ Q^i \geq 0,\ \sum Q^i = F \}$$

$$(14)\qquad \hat{K}_h = \{ g_h :\ g_h = \sum Q^i \delta_i\,,\ Q^i \geq 0 \}$$

のように離散化される。 Green 関数を $g(x;y)$ とすると，Green 演算子 G は，$G_h(p_h)(x) = \sum P_i \delta_i(y) g(x;y)$ と近似され，離散 Green 関数 $g_{ij}^h = \delta_i(x)\delta_j(y)\,g(x;y)$ を使用して，不等式 (7) は

$$(15)\qquad \sum_i \Big(\sum_j g_{ij}^h P^j - w_0 - \varphi_i \Big)(Q^i - P^i) \geq 0\ ,\quad \forall\, Q^i \geq 0$$

のように離散化される。 不等式(13)(15) の解法は，前節の解の存在証明に用いられた方法から導びかれる。 即ち，$P(\beta)$ を

$$(16)\qquad (\text{離散化補助問題})\quad \sum_i \Big(\sum_j g_{ij}^h P^j - \beta - \varphi_i \Big)(Q^i - P^i) \geq 0 \quad \forall\, Q \in \hat{K}_h$$

の解として，$\sum P_i(\beta) = F$ であるような適当な β が解 w_0 になり，$P(\beta)$ が解 P になる。 このために，任意の2点 (β_1^1, β_2^1) を採り，(16)を β_1^1 と β_2^1 について解き，$\sum P_i(\beta_1^1)$ と $\sum P_i(\beta_2^1)$ を計算し関数 $(\beta_1^1, \beta_2^1) \to (\sum P_i(\beta_1^1), \sum P_i(\beta_2^1))$ を線型内挿して，$\sum P_i(\beta^1) = F$ となる β^1 を求める。 次に2点 (β_1^2, β_2^2)，$\beta_1^2 = \beta^1$，$\beta_2^2 = \beta^1 + \varepsilon$，$\varepsilon > 0$ について (16)を解き，同じことを繰り返し，β^2を求めて，差 $|\beta^2 - \beta^1|$ が許容できる程小さい時，β_1^2 と $P(\beta_1^2)$ が，問題 (15)の解として採用する。 もし差が大きいときは，再びて点 (β_1^3, β_2^3)，$\beta_1^3 = \beta^2$，$\beta_2^3 = \beta^2 + \varepsilon$ について計算を繰り返す。 この方法，即ち，2点探索法によって，変分不等式 (7)(8)の近似問題は，解かれる。

これまでの議論は，Green 演算子が Green 関数によって陽に表現されている場合であった。一般に Green 関数を求める作業は困難である。 これを解決する便宜的な方法は，有限要素法なり差分法なりによって、地盤の剛性マトリックスをつくり，変位拘束の条件を考えて，その逆を取ることである。 逆マトリックスが，外挿近似的な Green 演算子になる。

(19) $$\langle A(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{v}\rangle = \int_\Omega \sigma_{ij}(\underset{\sim}{u})\,\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{v})\,d\underset{\sim}{x}, \quad \langle A(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{v}\rangle \leq M\,\|\underset{\sim}{u}\|_1\,\|\underset{\sim}{v}\|_1$$

は，空間 $(H^1(\Omega))^3$ 上で正定値となる。即ち，$\langle A(\underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{u}\rangle \geq C(m, mes(\Gamma_D))\|\underset{\sim}{u}\|_1^2$ となる正の定数Cが存在する。従って，演算子Aは，空間 $V=\{\underset{\sim}{v}\in (H^1(\Omega))^3 : \underset{\sim}{v}=0 \text{ on } \Gamma_D\}$ 上で，連続でしかも，正定値である逆演算子（Green 演算子）を持つ。即ち，$G: V' \to V$ は，任意の V' の要素 $\underset{\sim}{f}$ に対して，

(20) $$A(\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{f} \quad \text{if and only if} \quad \underset{\sim}{u} = G(\underset{\sim}{f})$$

(21) $$\langle G(\underset{\sim}{f}), \underset{\sim}{g}\rangle \leq \overline{M}\,\|\underset{\sim}{f}\|_{-1}\,\|\underset{\sim}{g}\|_{-1}, \quad \langle G(\underset{\sim}{f}), \underset{\sim}{f}\rangle \geq \overline{C}\,\|\underset{\sim}{f}\|_{-1}^2$$

である。ここで $\|\cdot\|_1$ は $(H^1(\Omega))^3$ のノルムを示し，$\|\cdot\|_{-1}$ は，$(H^1(\Omega))^3$ の双対空間のノルムを示す。演算子Aは，$\underset{\sim}{w}\in (H^2(\Omega))^3$ に対しては，$A(\underset{\sim}{w})_i = -(\sigma_{ij}(\underset{\sim}{w}))_{,j}$ を意味する。$\underset{\sim}{f}\in V'$ の要素としては，積分 $\int_\Omega b_i v_i d\underset{\sim}{x}$, $\int_{\Gamma_F} t_i v_i ds$, $\int_{\Gamma_c} P_n v_n ds$ がルベッグ積分の意味で定義されるならば，物体力 $\underset{\sim}{b}$，表面力 $\underset{\sim}{t}$，接触圧力 P_n などが考えられる。ここで $\underset{\sim}{v}$ は V の要素で，$v_n = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}$，$\underset{\sim}{n}$ は境界 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_c$ 上の外法線方向の単位ベクトル，Ω は地盤である。接触表面で，表面摩擦を無視すると，即ち，境界の接線方向に抗力がないと仮定すると，剛体 $z=\varphi(x,y)$ or $x^3=\varphi(x^1, x^2)$ の押し込み問題は，第2節で述べたように

(22) $$P_n(G_n(P_n)+\hat{w}_n - w_0 - \varphi) = 0,\; G_n(P_n)+\hat{w}_n - w_0 - \varphi \leq 0,\; P_n \leq 0,\; \int_{\Gamma_c} P_n\,dx = -F$$

と可能な接触表面 Γ_c 上で書かれる。$\hat{w}_n = G(\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{t})\cdot\underset{\sim}{n}$ は外力 $\underset{\sim}{b}$ と $\underset{\sim}{t}$ による Γ_c 上の法線方向の変位，$G_n(P_n) = G(P_n)\cdot\underset{\sim}{n}$ は接触圧力 P_n による Γ_c 上の法線方向の変位，w_0 は変形前に接触している一点における法線方向の変位，φ は剛体と地盤の法線方向のギャップである。従って，第3節に示したように，弾性体地盤への押し込み問題は，$\hat{\varphi} = \varphi - \hat{w}_n$ として，

(23) （問題） すべての $g\in K$ に対して不等式 $\int_{\Gamma_c}(G_n(P_n)-w_0-\hat{\varphi})(g-P_n)ds \geq 0$
を満す $(P_n, w_0)\in K\times R$ を求めよ。ここで

(24) $$K = \{g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c) : g\leq 0,\ \int_{\Gamma_c} g\,ds = -F\}$$

という変分問題によって書かれる。$g\leq 0$ は，任意の $\underset{\sim}{v}\in (H^1(\Omega))^3$，$v_n \geq 0$ on Γ_c に対して，$\int_{\Gamma_c} g v_n ds \leq 0$ を満すことを意味し，$\int_{\Gamma_c} g\,ds = -F$ は，$\hat{\Gamma}_c \subset \Gamma_c$，$dis(\hat{\Gamma}_c, \Gamma_c) = \varepsilon$，$\varepsilon > 0$ として $\int_{\hat{\Gamma}_c} g v_n ds = -F\int_{\hat{\Gamma}_c} v_n ds$ を，すべての，$\hat{\Gamma}_c$ 上で定数となる $v_n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ に対して満すことである。この定式化の特徴は，押し込み問題を可能な接触表面 Γ_c 上で表現する点である。変分不等式(23)(24)を解くことによって，接触面における接触圧力 P_n を求めたのち，Green 演算子 G によって地盤内部の変形を求めることができる。

2，3次元地盤への押し込み問題を実際に数値解析するにあたって，考慮しなければならない点は，地盤が鉛直方向のみならず水平方向にも変形することである。変形を微小と仮定すれば条件(22)は，接触条件を正しく反映する。水平方向の変位を考慮しなければならなかった例を，図6に示す。変形前に剛体の右端 x_p と一致している地盤の点は変形後に剛体の下に位置し，変形後に

5. 数値解析例

図2に示される剛体の押し込み問題を考えよう。この場合，Pasternak地盤のGreen関数 $g(x;y)$ は $e^{-L\sqrt{k/\mu}}=e^{-10}$ のオーダーの誤差で，

$$g(x;y)=\begin{cases} Be^{-\alpha y}(e^{-\alpha x}+e^{\alpha x}) & 0\leq x\leq y \\ Be^{-\alpha x}(e^{-\alpha y}+e^{\alpha y}) & x\geq y \end{cases}$$

と書かれる。$B=1/2\sqrt{k\mu}$，$\alpha=\sqrt{k/\mu}$。従って，図2の問題の解は，e^{-10} のオーダーの誤差で

$$w_0=\frac{1}{3}\ ,\quad w(x)=\frac{1}{3}e^{2-x}\ ,\ x>2$$

であり，$x=2$ の点で集中反力 $p_c=\frac{1}{3}$ が生じる。Green関数を前節で述べたように21要素を取って離散化した結果を，図3に示す。図4には，w_0 の値に対しての近似の収束の度合を，Green関数を離散化した場合と便宜的に剛性マトリックスの逆を取った場合について示す。これによれば，Green関数の離散化の場合，外側から厳密解に収束し，有限要素法による剛性マトリックスの逆による場合は，内側から収束する。いずれの場合においても，収束の速度は h^2 である。ここで h は要素の長さで，有限要素法としては線型のものを使用した。上記の例は，あらかじめ接触領域が定っている問題であった。図5には，接触領域があらかじめ未知である場合，即ち，押し込み剛体の形状が $y=-0.1x^2$ で表わされている場合の数値例を示している。この場合も $k=\mu=1.0$，$F=1.0$ を使用した。

6. 弾性地盤への押し込み問題

これまでの議論は，地盤がもっと一般的な弾性連続体地盤にも，そのまま適用できる。弾性体地盤のGreen演算子表示から始めよう。弾性体の応力・歪関係を

$$(17)\quad \sigma_{ij}(\underset{\sim}{v})=E_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(\underset{\sim}{v}),\quad \varepsilon_{kh}(\underset{\sim}{v})=\frac{1}{2}(v_{k,h}+v_{h,k})$$

$$(18)\quad \begin{aligned} &E_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}\,\varepsilon_{ij}\geq m\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij},\ m>0 \\ &E_{ijkh}=E_{khij}=E_{jikh} \end{aligned}$$

と仮定すると，変位拘束が与えられる境界 Γ_D の測度が正の値を持つならば，線型演算子 A，

図2．剛体とPasternak地盤

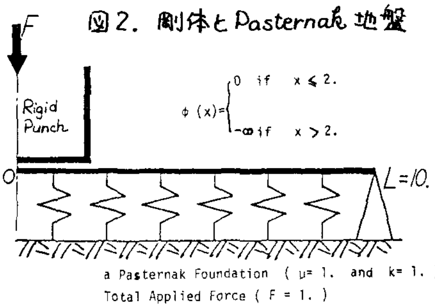


図3．数値解析例(1)

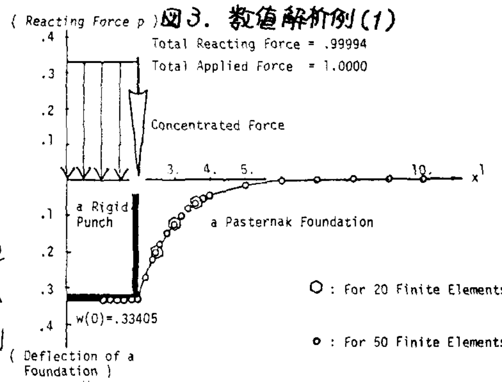


図4．収束性の議論

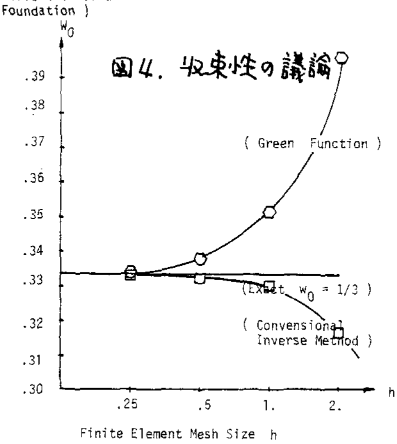
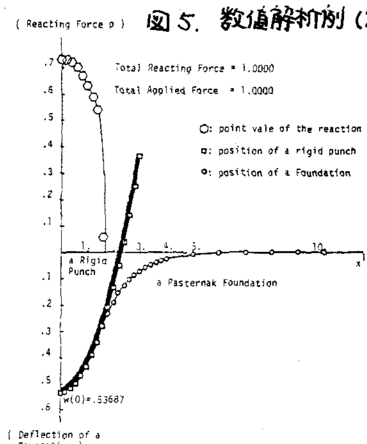


図5．数値解析例(2)



x_pと一致する地盤の点は変形前にはx_pより右側に位置する。 従って変形後に接触条件を満すには便宜的な反復計算を要する。 即ち、変形前にx_pと一致する点で接触条件を考え、問題を解いたのち、変形後にx_pにあたる地盤の点を適当な内挿法によって求め、次にこの点で接触条件を考えて問題を解く。 この点が変形後、x_pと小さな誤差内で一致すれば、解は求まったことになり、差が大きければ上述の過程を繰り返す。

7. 結論

剛体の変形可能な地盤への押し込み問題は、Green演算子を用いて、可能な接触表面上Γ_cで変分不等式によって定式化され、数学的に解の唯一性と存在が証明された。 また証明の過程から変分不等式の解法である2点探索法から導びかれることが示された。 更に、この変分不等式を、特殊な基底ϕ_iを使って離散化し、簡単な例題から収束性を議論した。 この小論では剛体と地盤の間に生ずる摩擦を無視した。この問題は将来の課題の一つである。

他の接触問題; Signoriniの問題、2体接触問題などはKikuchi[2]によって数多く解かれている。

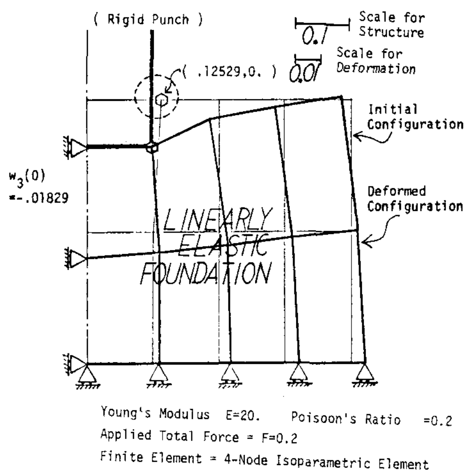


図6. 弾性体地盤（2次元）への押し込み

〈謝辞〉 筆者はこの研究をするにあたって、NSF ENG 76-15105 の Support を受けました。National Science Foundation に深く感謝の意をささげます。Prof. J. Tinsley Oden に、研究の機会を与えてくれたことに対して感謝します。

〈参考文献〉

(1) Duvaut, G., Problèmes de Contact entre Corps Solides Deformables, Ed. P. Germain and B. Nayroles, Lecture Notes in Math. #503, Springer-Verlag, (1976), 317~327

(2) Kikuchi, N., Contact Problems using Variational Inequalities, TICOM Report 78-2, T.I.C.O.M., The University of Texas at Austin

Rigid Punch Problems Using Variational Inequalities Represented by Green's Operator

Noboru Kikuchi*

This study is concerned with the theory and application of variational inequalities represented by Green's operator to rigid punch problems which involve the deformation of a foundation indented by a rigid punch, including approximations and solution methods. We first introduce the Pasternak foundation which consists of a shear layer and continuous spring elements. This case provides a simple case for studying the mathematical structure of rigid punch problems by variational inequalities. Using the fact of existence of Green's operator for the Pasternak foundation, the contact conditions are represented within a system of inequalities which precisely implies the formulation by a variational inequality. Existence and uniqueness of solutions are proven by comparison theorem and well-posedness of the auxiliary problem. It should be noted that the procedure of the proof implies a solution method. Then, an approximation of the problem is introduced together with several numerical examples. Since the problem is defined in the dual space of the space which includes admissible displacements, special considerations are necessary to approximate the problem. Then all above discussions are extended to the case of linearly elastic foundations. It is worthwhile to note that the problem can be formulated only on the possible contact surface. This fact leads a considerable effectiveness for computations. Thus, this study shows not only a mathematical theory of rigid punch problems but also precise approximations and effective solution methods.

* Texas Institute for Computational Mechanics
The University of Texas at Austin