

17 移動境界を持つ弾性接触問題の解析

東大生研 田中 尚○半谷裕彦、国田二郎
法政大学 本間正彰

1. 問題の定義

本論文で扱うテーマは、構造境界条件による非線形問題に属する。図-1に示すモデルを利用して、問題の概容を説明する^[1]。最初に、(a)で示す孔(A-A)のある床上に置かれた平板を考えてみる。無荷重状態では、床と平板とは(A-B)において接触している。この板に等分布荷重 P を作用すると下図のように変形し、C点に新しい境界が出現し、(A-C)間では、床と平板とは離れる。言い換えると、無荷重状態における接触領域(A-B)が、外力の作用によってA点および(B-C)に後退したことになる。次に、図-1(b)のモデルを考えてみる。このモデルに外力を作用させると、下図に示すように、接触領域(C-A-C)が発生する。この接触領域は外力の増加に伴って大きくなり、境界Cは外側に移動あるいは前進していく。

以上のモデルで示したように、外力の作用あるいは外力の増加過程において構造物相互の接触領域が変化しそれによって境界の位置および境界条件が外力の関数となる問題をここでは“移動境界を持つ弾性接触問題”と名付ける。この問題の主な特徴は、(1)変形前・後の形態(境界条件を含めて)が連続しない場合が生じ(a)のモデル)その時、通常の増分型の解法が使用できないこと(2)解析上では、接触領域が未知であることから、境界決定のための新たな条件の設定が必要となること、などである。図-2は、外力の増加過程に従い、接触領域が変化する状態に基づいて、“移動境界を持つ弾性接触問題”を分類したものである。^[2,3]

本論文は有限要素法を利用して、構造設計上頻繁に現われる(1)溝を持つ剛床上におかれた厚肉平板、(2)ボルト接合部、および(3)剛フレーム上におかれた平板、など上述した接触問題に属する具体的な問題の数値解析をおこなったものである。

なお、本論文では、すべて剛体と弾性体との接触問題を扱っており、接触面での摩擦の影響は無視している。従って、接触面での反力は、法線成分のみで表わされることになる。

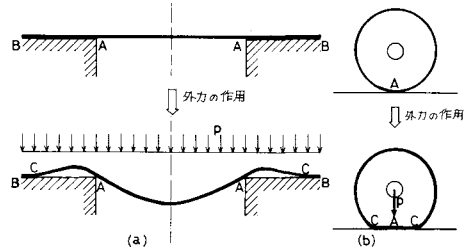


図-1 : モデル

分類名	接触領域	構造モデル	接触領域-外力曲線
進行型 (Advancing Contact)			
後退型 (Retceding Contact)			
混合型 (Mixed Contact)			
停留型 (Stationary Contact)			

図-2 : 分類図

2. 有限要素法による解法

前節で述べたように、本論文で扱う境界位置は、外力に依存することから、解析前は未知量となっている。本節では、境界線上の座標値を未知量に加えた有限要素法の定式化とその数値解法について述べる。今、ある構造物を有限要素分割し、節点を図-3(b)に示すように分類したと考える。各節点に作用する外力および変位を $\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3\}$ および $\{d_1\}, \{d_2\}, \{d_3\}$ で表わし、外力-変位関係式を求め、境界処理をおこなう前の釣合式を形式的に次式で表わすことにする。

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

移動境界を持たない通常の構造物の場合(図-3(a))には、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

上式において、境界処理をおこなうと未知変位 $\{d_1\}$ を求めるための基礎式として、 $\{f_1\} = [K_{11}]\{d_1\}$ および $\{d_3\} = \{f_3\} = \{0\}$ が求められる。得られた $\{d_1\}$ を(2)式に代入することによって、反力 $\{R_3\}$ が計算される。次に、移動境界を持つ場合を考える。このとき、 $\{x_2\}$ に属する節点およびその節点の座標値は未定である。この $\{x_2\}$ の決定方法として、(i)有限要素の分割は確定、つまり節点座標値を確定してあり、 $\{x_2\}$ に属する節点をさがす方法。(ii)移動境界に属する節点をあらかじめ決めてあり、その座標値を未知量とする方法の2つの方法を採用する。

(i),(ii)の概略を図-4のモデルで簡単に説明する。今、(a)に示す片持梁に等分布荷重を作用すると、ある荷重レベルで点線で示すように変形する^[1]。この梁を(b)のように N 個の要素に分割し、その節点の番号を、

0, 1, ..., i , ..., N とする。(i)の場合は、節点座標値を確定するから、等分割すると、 $x_i = \frac{i}{N}l$ となる。荷重を作用すると x_0 が未知量であるから、

どの節点が移動境界になるかは、あらかじめわからない。(i)式および移動境界上の境界条件を用いて、移動境界となる節点(図-4(c)の場合は i 節点)を見つけるのが(i)の方法である^[4,5]。この場合、有限要素の

大きさは決まっているから $[K]$ および $\{f\}$ は解析前に確定した値となっている。次に、(ii)の方法を説明する。 N 点を移動境界上の節点と考えると、 i 点の節点座標値 x_i は、 N 点における未定の節点座標値 x_N を

用いて $x_i = \frac{i}{N}x_N$ と表わすことが出来る。この節点座標値を用いて $[K]$ および $\{f\}$ を作ると、これらは x_N の関数となる。 $[K(x_N)]$ および $\{f(x_N)\}$ で表わされた(i)式と移動境界上の境界条件を用いて、 $\{d_1\}$

および x_N を求めるのが(ii)の方法である。

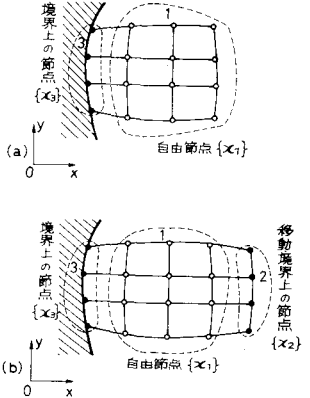
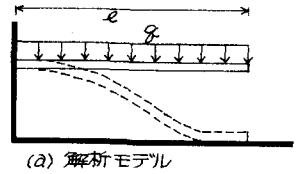
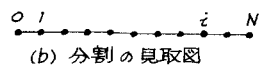


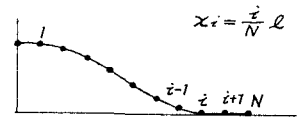
図-3: 有限要素分割と節点の種類



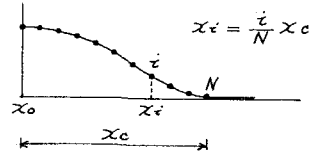
(a) 解析モデル



(b) 分割の見取図



(c) 要素分割を確定した場合



(d) $x_N = x_c$ を未知量とした場合の要素分割

図-4: 要素分割と2種類の節点座標値の決定法

3~5節で示す平面ひずみ問題は、(i)の方法で、6節で述べる板の曲げ問題は、(ii)の方法を利用

して解析している。(ii)における境界条件の導入と、それを利用した(1)式の変形は文献[1]で詳しく説明したので本論文では省略する。以下、数値解析結果を紹介する。

3. 溝を持つ剛床上におかれた厚肉平板の解析

貯蔵タンクの底板などにおける、スパン L の平行な溝を持つ剛床上に載せられた厚さ H の半無限平板を、平面ひずみ問題として解析する。構造モデル、デメーションおよび荷重を図-5のように設定し、弾性係数は $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$ とした。有限要素としては、定ひずみ三角形要素⁽⁶⁾を用い、図-5に示すように、100 節点 144 要素に分割した。板厚 H を $1\text{ cm} \sim 6\text{ cm}$ の間で、9 段階に変化させ、板厚・スパン比 ($\alpha = H/L$) による接触挙動の変化を調べている。数値解析法としては、2 節の(i)を利用しており、その場合の境界条件として次項を用いている。

(a)剛体と弾性体の接触面での摩擦の影響は無視する。従って、接触面での反力は法線方向成分のみで表わされる。

(b)剛床上にある節点は、上向きには自由に変位できるが下向きには変位できない(変位が拘束される)。従って接触領域での反力は全て圧縮力となる。

以上の条件より次の順序で解析を実行した。

- (1) 接触が予想される全ての節点 $\{x_2\}$ の垂直変位 $\{d_2\}$ を全て $\{0\}$ に拘束し、(1)式を解析して節点反力 $\{R_2\}$ を求める。
- (2) 圧縮反力節点では変位拘束を継続するために $\{x_2\}$ に残し、引張反力節点は変位拘束を解除し $\{x_1\}$ の節点に移行する。(逆の場合は、 $\{x_1\}$ から $\{x_2\}$ に移行する)
- (3) 以上を繰り返えし、引張反力節点がなくなった時点で解析を終了する。

図-6 に板厚の変化による接触点の位置の関係を示す。 $\alpha \leq 0.125$ では、上図の $e-C_2$ の部分で浮き上がり、 C_2 点に移動境界が現われる。このときの位置は、下図 α_2 のグラフとなり、板厚が厚くなるにつれて、 e 点に接近する。

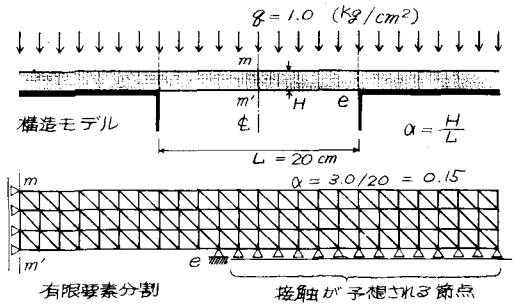


図-5：構造モデルと有限要素分割

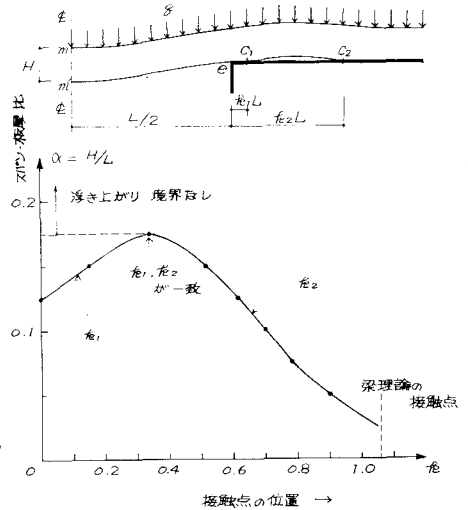


図-6：スパン・板厚比と接触領域

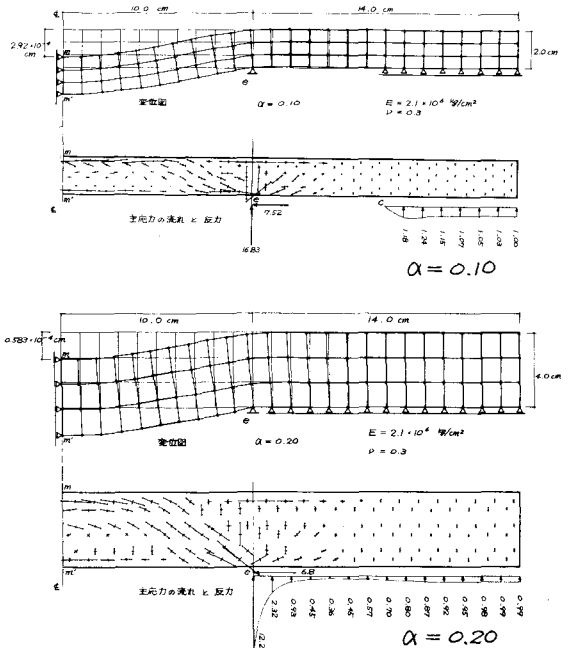


図-7：変位モードと主応力の流れ、反力分布

$0.125 < \alpha < 0.175$ では $C_1 - C_2$ の部分で浮き上がり
 $e - C_1$ 部分は接触している。 α が 0.175 に近づくに従
 がって C_1 と C_2 とは接近し、 $\alpha = 0.175$ で一致する。
 $\alpha \geq 0.175$ では浮き上がり部分は発生せず全面で接触
 する。 $\alpha = 0.1$ と $\alpha = 0.2$ の場合の変位、主応力の
 流れ、および反力分布を図-7 に示す。 $\alpha = 0.1$ の場合
 は、浮き上がり部分が生じており、主応力の観察から
 板は曲げ変形が主体になっていることがわかる。

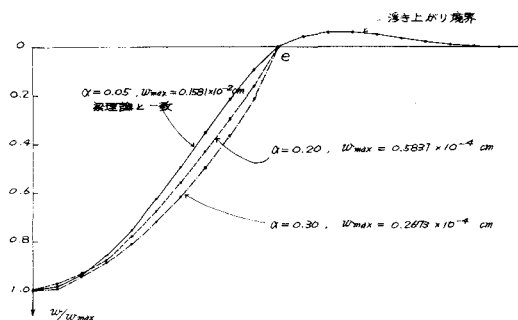


図-8：板厚の変化による底面の垂直変位モード(中央変位を基準)

一方、 $\alpha = 0.2$ の場合は、底面の全ての節点が剛床上有
 あり、浮き上がり部分は存在しない。また、主応力の流
 れから溝上では剪断変形が主体となりつつあることがう
 かがわれる。 α が大きくなるに従って剪断変形が主体
 になってゆく様子を図-8 に示す。 $\alpha = 0.05$ の場合は、
 ほぼ 梁理論と一致している。図-9 に α を変化さ
 せた場合の反力分布を示す。溝の端(e点)において反
 力が集中しているのは全て共通であるが、板厚が大き
 なるにつれ、反力分布が平均的になってゆく傾向が観察
 される。 $\alpha = 0.3$ から逆に観てゆくと、 $\alpha = 0.3$ では接
 触が全面で起きているが、 α が減少するにつれて、溝の
 端の付近での反力の減少が現われ、 $\alpha = 0.175$ で反力が
 0 となる点が発生する。この点を中心に、しだいに浮き
 上がり部分を生じ、 α の減少とともに拡大する。 $\alpha \leq 0.1$
 となると C_2 付近での反力集中傾向が見られ、しだいに梁理論解に近づいてゆく。

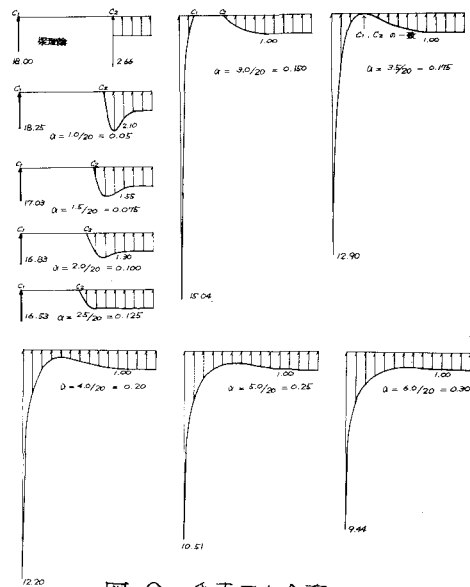


図-9：垂直反力分布

4. 溝を持つ剛床におかれた平板の弾塑性解析

前節と同じ構造物の $\alpha = 0.1$ の場合について増分型の解法を利用して弾塑性解析をおこなった。
 降伏条件としては、平面ひずみ場の von Mises の条件を用い、要素剛性行列は文献[6]を参照した。
 図-10 に要素分割と、中央点(m)の荷重-変位
 曲線を示す。また、図-11 に荷重増加にともな
 う塑性領域の拡大の様子を示す。この図より、
 塑性化が端部と中心部でほぼ交互に進行してい
 るのが観察され、このことは、この構造物の
 支持条件が、両端固定と、両端単純支持の中間
 の支持条件であることに由来していると理解で
 きる。

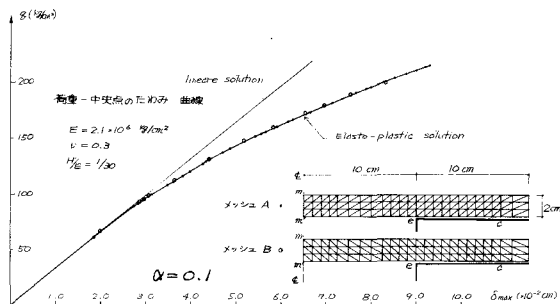


図-10：要素分割と、荷重-変位曲線

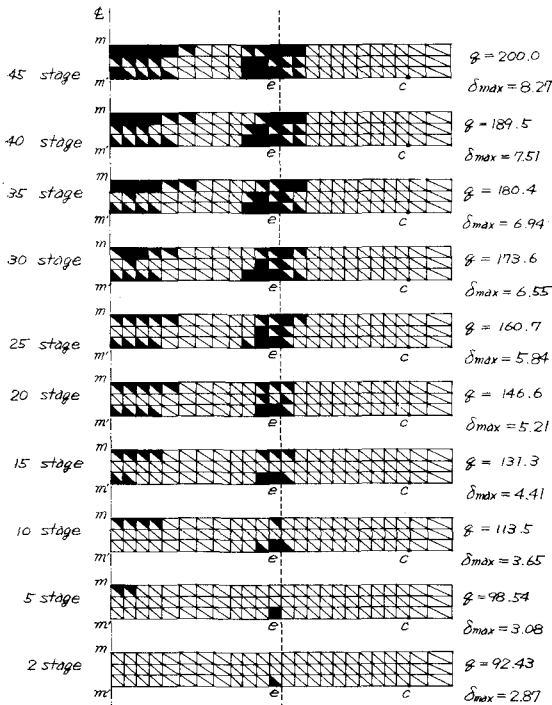


図-11：荷重増加に伴う 塑性領域の拡大
荷重 q (kg/cm^2)， $\delta_{\max}$ ； m' 点のたわみ ($\times 10^{-2} \text{cm}$)

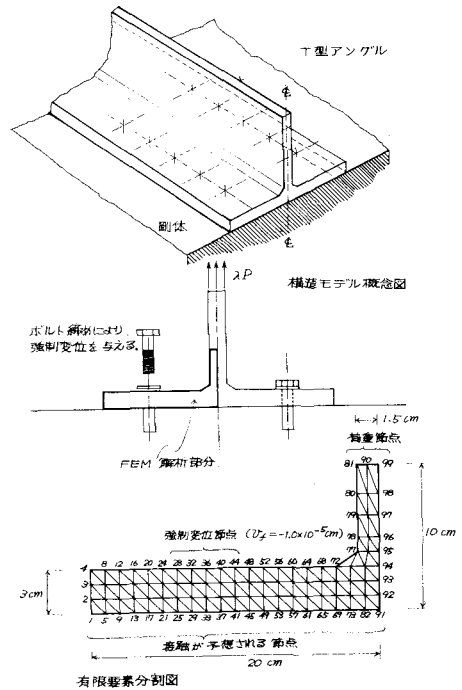


図-12：構造モデルと有限要素分割

5. T型アングルのボルト接合の解析

剛体にT型アングルのボルト締めし、その後、頭部に引張荷重を作用させる場合を考える(図-12)。ボルト締めは、強制変位 ($-1.0 \times 10^{-5} \text{cm}$) を与えることでモデル化し、頭部引張力に対しては、ボルトは剛体として解析した。頭部引張荷重を $P = \lambda A \sigma_y$ ($\sigma_y = 1.0 \text{ kg/cm}^2$) とし、 λ を $0 \sim 10$ まで 11段階変化させ、その場合の接触挙動の変化を観た。図-13 は強制変位を与えた時の変位図で、中央部と端部で浮き上がっているのが観察される。図-14 は、 $\lambda = 1.0$ の引張り荷重を作用させたときの変位図で、図-13と比較すると、接触領域が移動し、中央部の浮き上がりが顕著となる。図-15に頭部の荷重の増加と接触領域の位置の変化を示し、図-16に荷重の増加と頭部の垂直変位の関係を示す。接触境界の移動に起因する非線形性が観察される。なお、図-15において、黒い部分が接触領域を、白い部分が浮き上がり部分を表わしており、接触領域が荷重の増加とともに、外側に移ってゆく傾向がみられる。

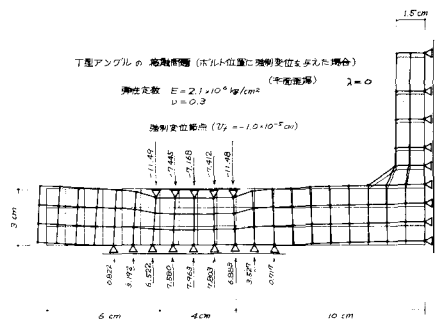


図-13： $\lambda = 0$ の場合の変位図

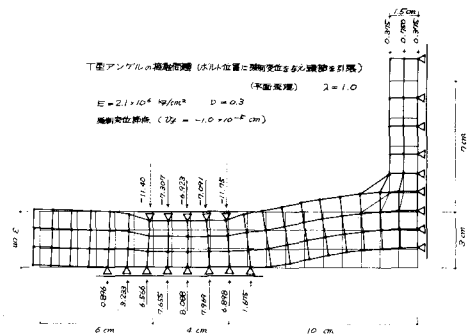


図-14： $\lambda = 1.0$ の場合の変位図

6. 方形の剛フレーム上に置かれた弾性平板

方形の剛フレーム上に置かれた平板に等分布荷重を作用させると、隅部で浮上りを生ずる(図-17)。この場合のフレームと板との接触領域の大きさと隅部での板の浮上り量を2節の(ii)の方法によって解析した。解析法は文献[1]に詳述してあるが、解析の基本的な扱いを説明すると、(1)構造物を有限要素分割する。(2)接触領域の境界位置 $\{x_2\}$ をパラメーターとする荷重-変位関係式 $[K(x_2)]\{d\}=\{f(x)\}$ を作成する。(3) $\{x_2\}$ の位置を決定する条件として、その点のモーメント $\{M\}_{x_2}=\{0\}$ と置く。(4)非線形連立方程式(2),(3)をNewton-Raphson法で解き、変位 $\{d\}$ と境界位置 $\{x_2\}$ を求める。数値解析結果として、辺長 a のフレーム上に辺長 L ($L \leq a$)、曲げ剛性 D 、ポアソン比 0.3 の板を置き等分布荷重 q を与えた場合のたわみ形を示す。有限要素は3次の多項式の変位関数を用いたもので図-17に、分割の1例を示す。まず、有限要素の精度と、以下の結果との比較のために、周辺単純支持の平板を解析した(図-18)。中央点のたわみ w^* を $w = \frac{w^* 8L^4}{100D}$ で無次元化した値は解析解 $w = 0.0041$ に対して約8%大きかったが、全体の挙動を調べるには十分と考えられる。図-19(a)~(e)は L/a の値を1.0から1.4まで変化したときのたわみ形、および接触領域(図中、太い黒線)の大きさ c/a を求めた結果である。図中、 w/a は無次元化した中央点のたわみと a との比を示したものである。なお、

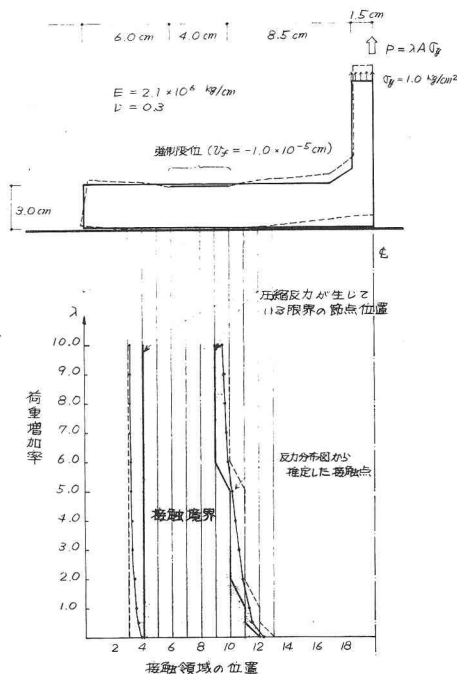


図-15: 接触領域の変化

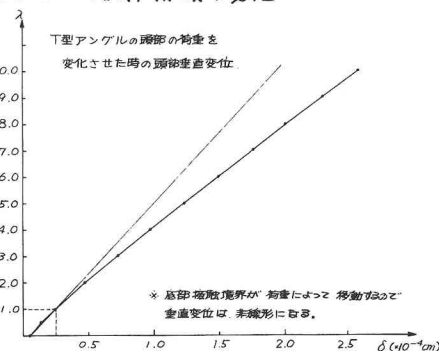


図-16: 頭部における荷重-変位曲線

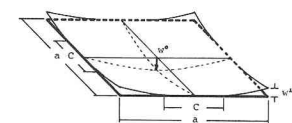


図-17: 解析モデルと有限要素分割の例

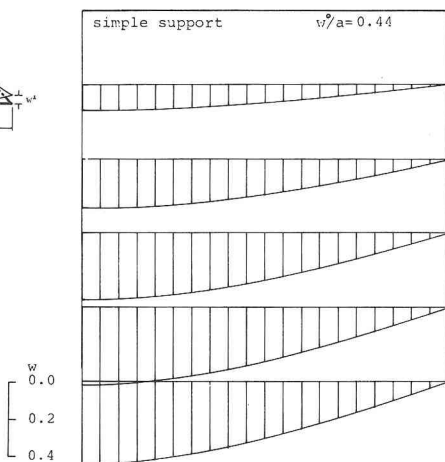


図-18: 単純支持平板のたわみ

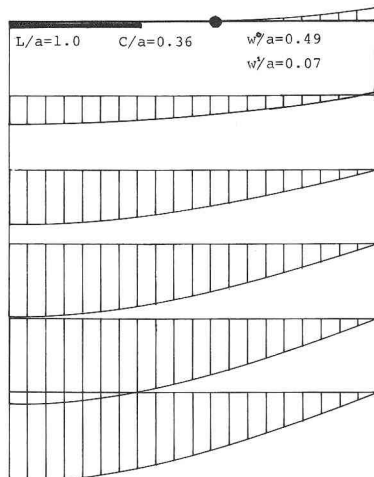
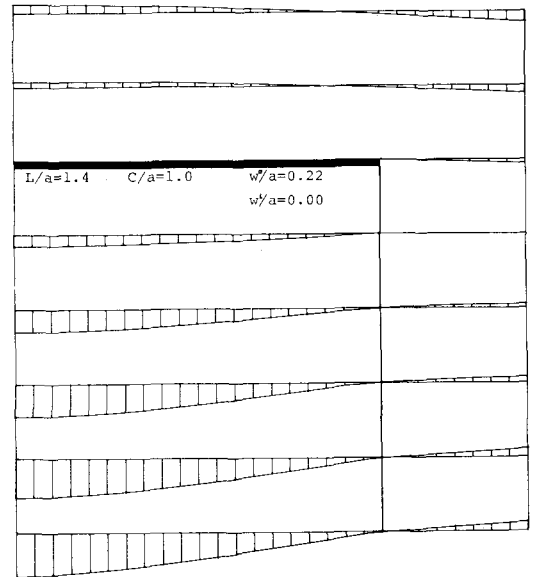
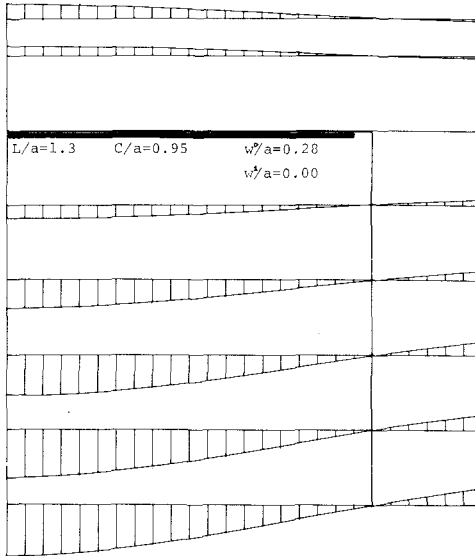
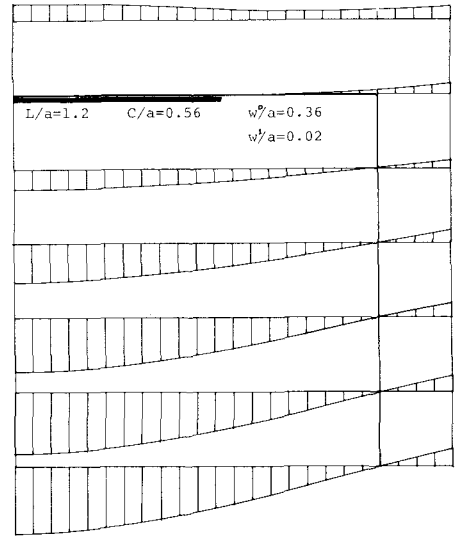
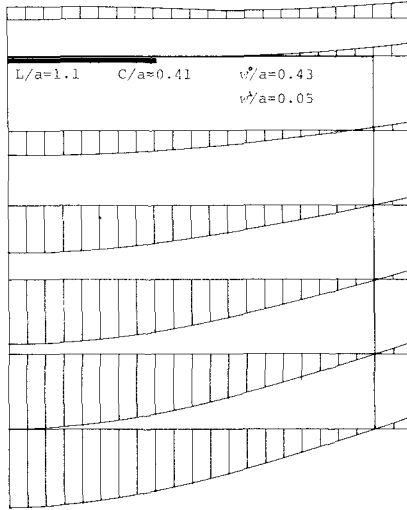


図-19(a) たわみと接触領域

図-19

(b) (c)
(d) (e)



本問題の場合、接触領域の大きさは、荷重の大きさに依存しない、いわゆる停留型（図-2）であった。図-9(d)の●印は、差分法で解いた結果⁽⁷⁾を比較のため図示したものである。

参考文献

- (1) 半谷、国田、本間「移動境界を持つ弾性接触問題の有限要素解析」、JSSC マトリックス解析法研究発表論文集、1977
- (2) Dundurs, J. "Properties of Elastic Bodies in Contact". The mechanics of the contact between deformable bodies, Delft University Press, 1975
- (3) 半谷、国田「移動境界をもつ弾性平板の有限要素解析」生産研究 29巻 5号 1977.
- (4) 藤、山地「接触問題の有限要素解析法に関する研究」日本機械学会誌、76巻、1973
- (5) 大寺、「有限要素法による弾性接触応力解析」日本機械学会論文集、38巻 313号、19、1972.
- (6) 山田、「マトリックス法材料力学」弾性・粘弾性、コンヒューターによる構造工学講座、虎風館、1970.
- (7) 坪井、「平面構造論」丸善、1955.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONTACT PROBLEMS WITH UNKNOWN BOUNDARY REGIONS

Hisashi TANAKA*, Yasuhiko HANGAI*, Jiro KUNITA*
and Masaaki HOMMA**

In the contact problem, the contact region in the deformed state generally depends on both the nature of applied loads and the level of loading. In other words, the geometry of boundary regions is unknown when we start the analysis.

This paper deals with the above problems by the finite element method, from the view-point of contact between elastic bodies and rigid foundations or flames. The paper consists of six sections and three illustrative examples.

After the definition and outline of the normal contact problems are viewed in section 1, the finite element method for determining the unknown coordinates on the boundary lines of contact zone is introduced in section 2. The nodal points are arranged in three classes such as usual free points, fixed boundary points and moving boundary points of contact regions(Fig.1). Since the last nodal points have unknown coordinates before the analysis is done, the stiffness matrices and loading vectors are represented as functions of these unknown coordinates, and then the derived governing equations are nonlinear. By adding new boundary conditions on the boundary lines of contact zone, nodal displacements of free points and the unknown coordinates of moving points are numerically obtained by Newton-Raphson method.

Section 3 deals with the numerical example of thick plate on the rigid foundation with a groove in the plane strain problem(Fig.2-a). The effect of variation of thickness of plates on both the contact region and deformation behaviours is examined in detail. In section 4, elastic-plastic behaviours of the same structures are pursued by the incremental solution procedures and development of the plastic zone is observed. In the same manner, Tee connections with bolts in tension(Fig.2-b) are analyzed in section 5. The last section has an example that plate on the square rigid flame(Fig.2-c) is under uniform loading and the result gives us displacement at the four corners when we dissolve concentrated loads.

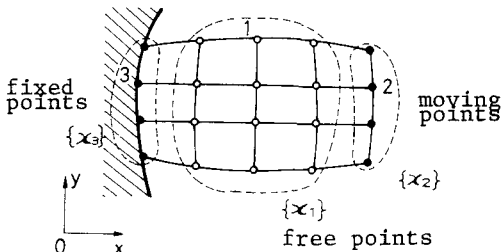


Fig.1

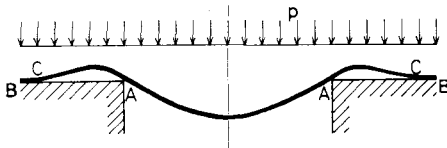


Fig.2-a

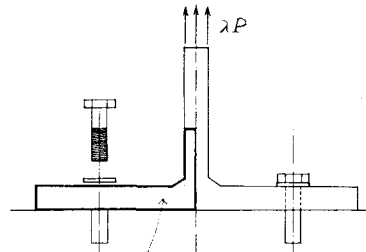


Fig.2-b

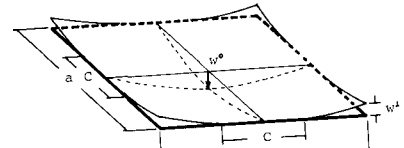


Fig.2-c

* The Institute of Industrial Science, University of Tokyo

**College of Engineering, Hosei University