

16 クラックの進展を考慮できる新しい離散化モデルの 構造非線形問題への応用

米子高専の川端康洋, 東大 近藤 夫, 東大 川井忠彦

現在有限要素法による構造非線形問題の解析は、原理的には確立され、あらゆる構造分野に於て有効な数値解析の手段として欠かせないものとなっている。しかし例えば、接触、圧壊、ひり、クラックの伝播等のような要素境界上での現象を含める構造非線形問題への応用には困難な点も少くない。本論では、構造非線形問題の主要なパラメータである非弾性、亀裂、安定性の3つを同時に考慮できる新しい離散化モデルを示し、この要素モデルの構造非線形問題への応用について、簡単な例題を用いて検討し結果を報告する。

1. 新しい離散化モデル (剛体スプリングモデル; 川井モデル)

このモデルは、Fig. 1 に示すような有限個の微小な大きさの剛体要素の集合体と、それらの接触境界面上に限らず分布したスプリングによって構成されている。スプリングは、仮りに要素が変形するとした場合にその内部に貯えられる変形の歪エネルギーを、その接触境界面上に集約的に表現するものであると考える。ここで用いられる要素は、その重心に於て剛体としての自由度に対応する3次元では6個、2次元では3個の変位成分で表わされる。従つて1要素当り、一般に 6×6 のサイズの剛性行列が3次元モデルを表現するのに用いられる。このモデルでは、構造要素の弾性、塑性、破壊 (圧壊、ひり、破断) 等の挙動を、その要素境界面上のスプリングの特性の変化によって表わそうとするものである。すなわち、スプリングには垂直応力に抵抗するものと、剪断応力に対するものの2種類があり、その特性には弾性、降伏 (塑性)、破断 (圧壊) の3つの場合が考慮されている。すなわち、基本的に要素と要素はその接触境界面で連結されるだけであるから、数個の要素が同時に結合されることが少なく、その支配方程式 (剛性方程式) の係数行列のバンド幅が縮小され、また計算時間も短縮される。以下の3次元、2次元、1次元 (梁-柱) の要素について具体的に述べる。

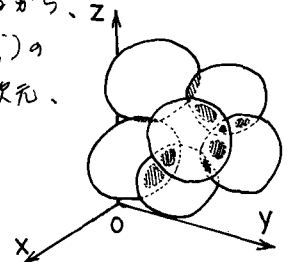


Fig. 1

1-1. 3次元解析のための四面体要素 本稿で用いられる要素は、その形状に関係なく6個の自由度を有しており、任意形状の要素について考えることは全く自由である。ここでは最も基本的な四面体要素について述べる。

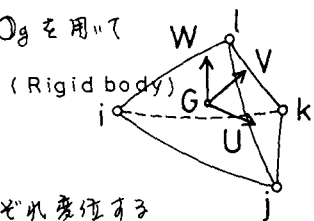
他の形状の要素についても同様の定式化が可能である。まず対象物は、Fig. 2 に示す四面体要素の集合体としてモデル化されているものとし、その内から Fig. 3 に示す代表的な互いに共通の接触境界面を有する2つの要素 (I, II) を取り出して考える。今剛体の力学から、要素の重心 G の平行移動ベクトルを U_g 、変形前後の座標変換行列を Π とすれば、要素内の任意点の変位ベクトル U は次式で与えられる。

$$U = U_g + (\Pi - I) \cdot (R - R_g) \quad (1)$$

ここで $(R - R_g)$ は、重心 G に関する任意点の位置ベクトルを表わし、 I は単位行列である。

(1) 式は、微小変形を仮定すれば、重心 \$G\$ 周りの微小回転ベクトル \$\mathbf{O}_g\$ を用いて次のように表えられる。

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_g + \mathbf{O}_g \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_g) \quad (1')$$



さて外力の作用により、接触している要素は、Fig. 4 のようにそれぞれ変位する
と考える。そこで接触境界面上の \$P\$ 要素の変位後の位置を、それぞれ \$P', P''\$ $[\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \theta, \phi, \chi]$
とすれば、\$P\$ 要素の相対変位ベクトルの各成分は次式で与えられる。

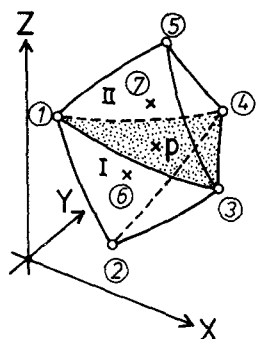
$$(\vec{P'P''})_x = X'' - X' = U_{II} - U_I \quad (2)$$

$$(\vec{P'P''})_y = Y'' - Y' = V_{II} - V_I \quad (3)$$

$$(\vec{P'P''})_z = Z'' - Z' = W_{II} - W_I \quad (4)$$

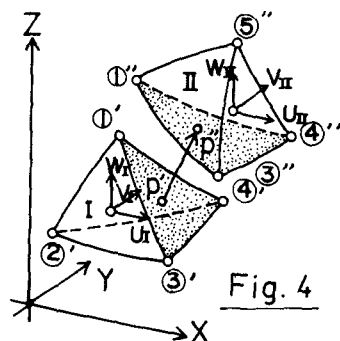
あるいはまた、Fig. 5 に示すように境界面上で局所座標系を考えると、
次式のように表えられる。

$$\left. \begin{aligned} d_d &= \bar{W}_{II} - \bar{W}_I \\ d_{sx} &= \bar{U}_{II} - \bar{U}_I \\ d_{sy} &= \bar{V}_{II} - \bar{V}_I \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



ここに \$d_d\$ および \$d_{sx}, d_{sy}\$ は、それぞれ相対変位ベクトル \$\vec{P'P''}\$ の接触境界面上の任意
要素の接平面における法線方向成分と接線方向成分である。そしてこの相対変位成
分 \$d_i\$ は、2つの要素の重心要素の変位ベクトル \$\mathbf{U}_i\$ を用いて次式で表えられる。

$$d_i = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}_i \quad (6)$$

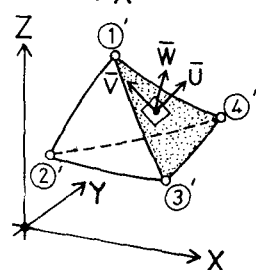


ここに、

$$d_i = \begin{Bmatrix} d_d \\ d_{sx} \\ d_{sy} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{U}_i = \begin{Bmatrix} U_{gI} \\ V_{gI} \\ W_{gI} \\ \theta_{gI} \\ \phi_{gI} \\ \chi_{gI} \\ U_{gII} \\ V_{gII} \\ W_{gII} \\ \theta_{gII} \\ \phi_{gII} \\ \chi_{gII} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{U}_I & \bar{V}_I & \bar{W}_I & \bar{U}_{II} & \bar{V}_{II} & \bar{W}_{II} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ U_I & V_I & W_I & U_{II} & V_{II} & W_{II} \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 & m_2 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} U_g & V_g & W_g & \theta_g & \phi_g & \chi_g \\ 1 & 0 & 0 & 0 & (z-z_g) & -(y-y_g) \\ 0 & 1 & 0 & -(z-z_g) & 0 & (x-x_g) \\ 0 & 0 & 1 & (y-y_g) & -(x-x_g) & 0 \end{bmatrix}$$



である。

ただし Q は、要素内の任意点 P と重心 G の間接を表わす Q をサブマトリックスとする 6×12 のマトリックスである。次にこれらの変位成分 d に対応する拘束バネを Fig. 6 のように設定すれば、2要素間の相対的な変形による歪エネルギーは、これらの分布バネに貯えられることになる。歪成分を次のように定義する。

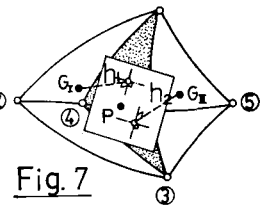
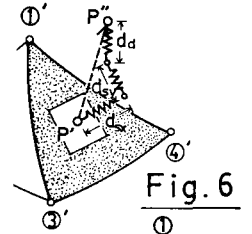
$$\epsilon = \frac{d(x, y, z)}{h(x, y, z)} = \frac{1}{h(x, y, z)} \underbrace{M \cdot R \cdot Q}_B \cdot U_i = B \cdot T \cdot U_i \quad (7)$$

$$\epsilon^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]$$

ここに、 $h(x, y, z)$ は Fig. 7 に示すように、接触境界面上の P 点の接平面に対して各々の重心点 G_I, G_{II} から下した垂線の和である。

以上から、接触境界面上に分布するバネ群に貯えられる歪エネルギーは次式で計算される。

$$U = \frac{1}{2} U_i^T \int_A (T^T B^T D B T) dA \cdot U_i \quad (8)$$



上式より、2つの要素の重心点の12個の変位成分で接触境界面上に貯えられる歪エネルギーが表わされた。ここに D は、材料の特性を表わすマトリックスであり、 A は接触境界面の面積である。

(8)式中の積分は、一般に数値積分によって求められるが、特に接触境界面が平面であって、更に回転の変位成分を無視できるときは、この積分値は接触境界面の面積となり、(8)式は簡に求められる。

また、以上の定式化はスーパーパラメトリック要素として、自然座標系を用いて展開できる。

以後は、通常の有限要素法の手順と同様に、仮想仕事の原理から、次のような増分形式の釣合方程式が得られる。

$$(K + K_0 + K_G) \cdot dI^* = F^* - F_r \quad (9)$$

ここに、 K_0 は初期歪マトリックス、 K_G は幾何剛性マトリックス、 F_r は不釣り合荷重ベクトル、 F^* , dI^* は荷重および変位増分である。微小変形を仮定して(1)式を用いると、 K_0, K_G, F_r は得られぬので、 $K \cdot dI^* = F^*$ となる。

1-2. 2次元解析のための三角形要素 基本的な考え方は四面体要素と全く同じである。ここでは自然座標系を用いて定式化をおこなう。接触境界線上の任意の点 P の変形後の相対変位 d と、両要素の重心点の変位 U_i との間接に、再び(6)式を用いる。ただしマトリックスの内容は若干異なり、次のようになる。要素形状および符号は Fig. 8 に示されている。

$$dI^T = L dI_d, dI_s, \quad U_i^T = [u_x, v_x, \theta_x, u_y, v_y, \theta_y]$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & m_1 \\ 0 & 0 & l_2 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{l}{2}(\eta+1) + (y_j - y_k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{2}(\eta+1) - (x_j - x_k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{l}{2}(\eta+1) + (y_j - y_k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{l}{2}(\eta+1) - (x_j - x_k) \end{bmatrix}, \quad l = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

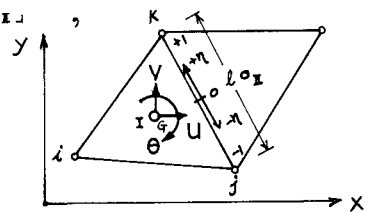


Fig. 8

また(8)式の積分は次のような数値積分となる。

$$\int_A (T^T B^T D B T) dA = \pi \int_{-1}^1 (T^T B^T D B T) \frac{\ell}{2} d\eta$$

ここに ℓ は要素の板厚である。回転変位成分 θ_x, θ_y を省略して得られる(9)式を陽に積分し、結果は、参考文献(1)に示されている。

1-3. 新しい梁柱要素 有限変形を考慮した(1)式から1次元梁要素と2次元の要素が得られる。

本要素は、変位の場としてすべて線形の場合を与え、2階以上の微分量は差分によってこれを評価する。要素形状と符号については、Fig.9に示されている。

大変形領域に於ける梁柱の変位場は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, z) &= U(z) - x \left\{ 1 - (1 + W'(z)) / \sqrt{(1 + W'(z))^2 + (U'(z))^2} \right\} \\ W(x, z) &= W(z) - x \cdot U'(z) / \sqrt{(1 + W'(z))^2 + (U'(z))^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Fig.9

ここに $U(x, z), W(x, z)$ は任意点の変位であり、 $U(z), W(z)$ は回転上の変位である。

次に歪は、次式で与えられる。

$$\epsilon_z = \sqrt{(1 + W')^2 + (U')^2} - 1 = \epsilon_D - x \cdot K \quad (11)$$

ここに、 $\epsilon_D = \sqrt{(1 + W')^2 + (U')^2} - 1$ (回転上の歪)、 $K = \frac{\{(1 + W')U'' - W''U'\}}{\{(1 + W')^2 + (U')^2\}}$ (曲率)である。線形の変位場として次式を用いる。これは自由度としては、先の一連のモデルと同じであるが、重心まわりの回転変位を、両端部で平行変位をかつける英が若干異なる。

$$\left. \begin{aligned} U_A &= (1 - z/\ell_A) U_0 + z/\ell_A \cdot U_2 \\ W_A &= (1 - z/\ell_A) W_0 + z/\ell_A \cdot W_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12)式を用いて(11)式を表わすと、次のように非常に簡単な、物理的に極めて把握し易い形になる。

$$\left. \begin{aligned} \text{トラス的変形; } \epsilon_{D(A)} &= \frac{1}{\ell_A} \sqrt{(\ell_A + W_2 - W_0)^2 + (U_2 - U_0)^2} \\ \text{折れ曲がり角; } K_{(w)} &= \frac{2}{\ell_A + \ell_B} (\varphi_A + \varphi_B) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

この式を用いて、歪エネルギーを計算し、仮想仕事の原理により次の増分形の剛性方程式を得る。

$$(K^D + K^K + K^{DK} + K_G^D + K_G^K) \cdot \Delta U = \Delta Q + \epsilon^D + \epsilon^K \quad (14)$$

ここに上添字Dは ϵ_D に、KはK(曲率)に関するものの意であり、下添字Gは幾何剛性(初期応力)マトリックスを意味し、 ϵ は不釣り合を表し、 $\Delta U, \Delta Q$ はそれぞれ変位増分、荷重増分である。

得られた(14)式は、(9)式と同一である。また(14)式によつて、通常求められていない、曲率に関連する初期応力のマトリックスが求められている。

1-4. 破断(圧壊)およびしりを考慮した弾塑性解析法 亀裂の伝播とか接触問題をとり扱うとき、従来の有限要素法では要素間のしりや破断を考慮することが難しく、異種の要素(例えばフィルム・エレメントとか)、新しい境界節点を設けなければならない。これらの問題に対処するため、本法では、物理的に要素間の相対変形による歪エネルギーを計算してしりのひびき、要素境界での現象(破断、圧壊、しり)を一貫して弾性、塑性の延長に置くことができる。即ち本法に於ては、弾性、塑性(降伏)、破断、しり等の現象が2種類のバネの特性に集約されることとなる。ではまず弾性バネの定数の決定から始める。

(1). 弾性 弾性状態にあるバネの特性マトリックス D_e は次式で与えられる。

$$D_e = E \quad , \quad D_e = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu) \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}$$

1次元(梁柱要素) 3次元と2次元平面歪

$$D_e = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 2G \end{bmatrix} \quad \text{2次元平面応力}$$

この特性マトリックスは、要素内の特性が異なると、境界面でのバネに *lump* されたものを解くことができる。現在、Consistent な特性マトリックスを求めることを検討中である。

(2). 塑性 塑性状態にあるバネの特性マトリックスは次式で与えられる。

(仮定) 降伏関数は応力成分の同次関数とする。歪硬化率は零とする。

降伏関数(塑性ポテンシャル)を $f(\sigma_i) = 1$ とする。塑性歪増分は次式のように仮定する。

$$\{d\epsilon^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \cdot d\sigma$$

塑性変形時の応力増分と歪増分の関係は、次式のように与えられる。

$$D_p = D_e - \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}_j [D_e]}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}_i [D_e] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}_j} \quad (15)$$

(3). しり しり状態にあるバネの特性は、剪断力が摩擦抵抗力を超過したとき、その剪断抵抗バネの定数を増分量に対して零値とする。

(4). 破断(圧壊) 破壊状態に至ったバネは、削除される。そしてその位置に負担している応力は解放される。解放すべき力は、次式で計算される。

$$F_i = \int_A T_i \cdot N^T \cdot \sigma_n \cdot dA \quad (16)$$

ここに σ_n は負担応力であり、 D, T は(7)式で示されている。1断面で全バネが破壊した場合、計算上特異行列になるため、数値計算上では若干の剛性を残しておく必要がある。

破断(圧壊)したバネが存在するとき、荷重増分は次の英を考慮して決定されなければならない。

- ④ 応力解放中に1増分荷重ステップ内、他のスプリングが破断しないこと。
- ⑤ 変位増分が過大にならないこと。(降伏曲面を移動させるために)
- ⑥ 降伏するスプリングがある場合に、その荷重倍率を考慮すること。

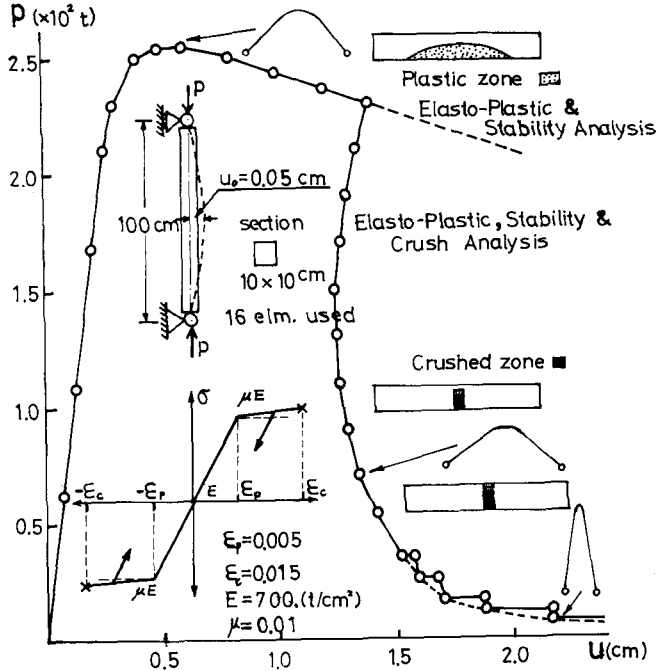
2. 解析例

本要素を用いて、弾塑性、破壊、大変形を考慮した解析を試みた。比較的簡単な例題であるが、良い結果が得られている。この手法をより一般的な問題に拡張することは可能であろう。

2-1. 梁-柱の弾塑性、破壊、大変形解析

右図に示す軸方向力の作用する棒の弾塑性、圧壊、大変形を考慮した解析を試みた。図中には、圧壊が生じてから、降荷が始まり、終局状態に達するまでの釣合曲線が求められている。圧壊の判定は、 σ の大きさにより図中の様子を応力-変位関係を設定して決定した。

要素数は16要素分割とし、断面内で2層の層分割を行っている。

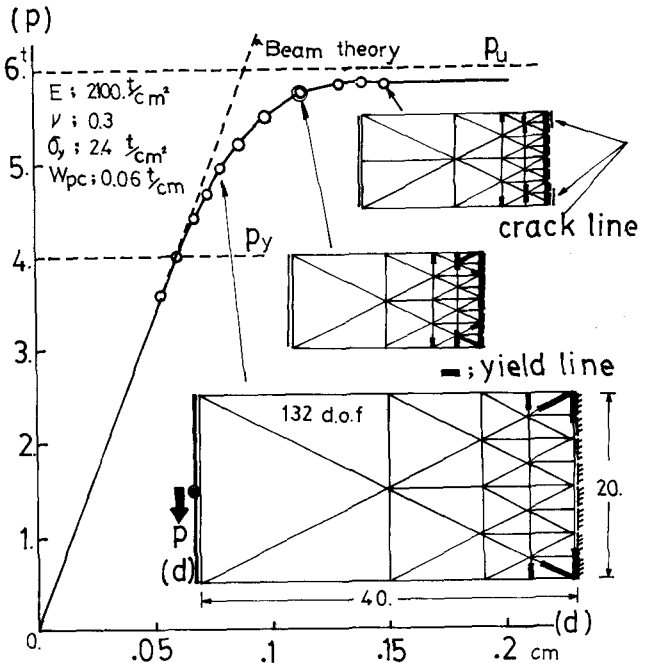


2-2. 片持梁の弾塑性、破壊解析

右図に示す片持梁の2次元弾塑性及び破壊を考慮した解析を試みた。

破壊の基準は、塑性比率によって定める。限界塑性比率を0.06 t/cm^2 として解析した。この解析では、破壊が生じてからの釣合曲線は求められていないので、荷重は減小している。すなわち最大耐力が求められたことになる。使用した要素は2次元解析のための三角形要素で重心角の自由度は、(U, V, R)の3成分である。

図中の◎印が破壊の始まる点である。破壊は断面の隅々から起きている。

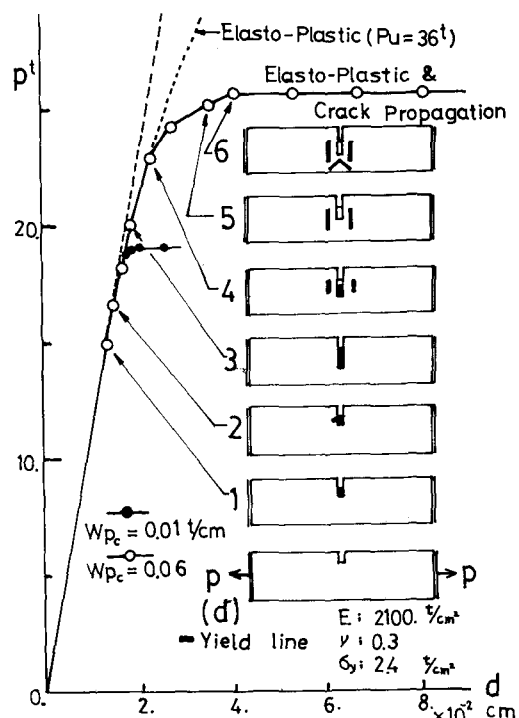


2-3. スリットノッチ付帯板の弾塑性、クラック伝播解析.

右図に示す、スリットノック付帯板の破断を考慮に弾塑性解析を試みる。破断の判定は、先の例と同じ塑性化率である。図中に2種類の限界塑性化率の大小を示す結果を示している。●印は非常にむろい材料の場合を示している。図中1~6までの各ステージで、塑性域の広がり、クラックの進展の具合が示されている。ステージ3までは弾塑性解析である。ステージ4に於て破断が始まっている。急速に剛性が低下し26%程度で破断する。破断を考慮した解析では最高荷重36%程度まで耐え上げ上昇する。

破断の基準は仮りに定めたもので、今後この課題を以て最適なる基準を定める必要がある。

使用に要素分割下、先の片持梁の例と同一である。
中央で対称条件を考慮して左を解析している。



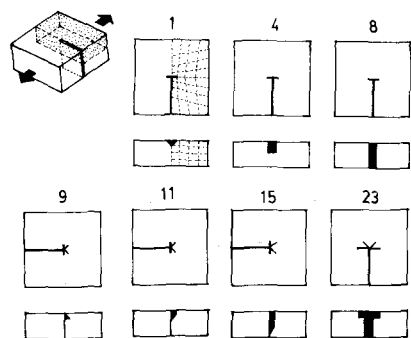
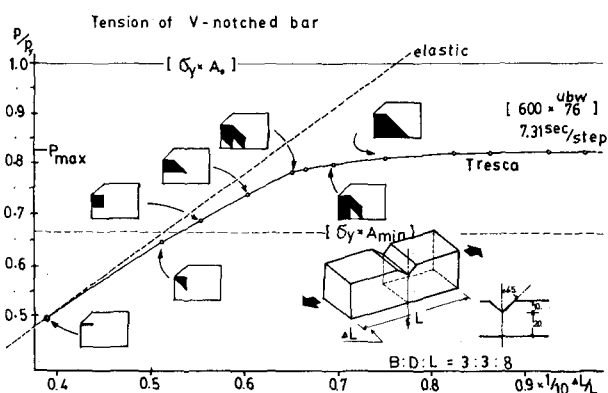
2-4. V-17 予付角棒の 3 次元弾塑性解析

右図に示す、V字の平行角棒の弾塑性解析を試みる。使用に必要は、四角体要素で回転変位成分を省略して3自由度である。

图中、黒く塗つてある部分は円部の塑性化
 した面を側面に投影したものである。

結果を2次元解析の結果と比較してみると、
良い一致を示している。計算時間も東大大型
計算機センタ-HITAC 8800/8700 で1step当り

7.31秒は経済的である。自由度×バネ幅は、
600×76である。



2-5. スリット入付厚板の3次元弾塑性解析.

四面拘束要素を用いて、右図に示す厚板の引張解析を試みる。

要素数は1300で自由度3200である。HITAC 8700 (800KB) を使用して435秒/点であった。連立方程式の解法は、Gauss

参考文献 川井忠孝: 新, の要素モデルによる固体力学諸問題の解析 生研セミナーテキスト 52-7-1~2

APPLICATION OF NEW DISCRETE MODELS TO STRUCTURAL NON-LINER PROBLEMS

- Elasto-Plastic Stress and Crack Propagation Analysis -

Y. KAWABATA,* K. KONDOU,** T.KAWAI**

SUMMARY

Recently, finite element analysis of structural non-linear problems whose theory has been almost established is now indispensable as a useful tool for quite a variety of numerical analysis of engineering structures.

Unfortunately, however, even this procedure encounters serious difficulties in terating structural non-linear problems including effects of contact, stability, slip and crack propagation.

In this paper, a family of new discrete models is proposed by which principal parameters of structural non-linear problems such as inelasticity, crack growth and stability can be considered at the same time, and also its application to structural non-linear problems will be illustrated with several numerical examples.

I. NEW DISCRETE MODEL (RIGID BODY-SPRING MODEL; KAWAI MODEL)

These models consist of finite number of small rigid bodies and springs distributed over the contact area of two neighboring bodies as shown in Fig. 1.

Strain energy to be stored in these models can be represented by that of spring system connecting individual elements.

Since the element is assumed to be rigid, its displacement can be completely expressed by 6 components of the centroidal displacement. Therefore, the size of stiffness matrix per element is always (6 x 6).

In this model, various behaviour of structural element such as elasto-plastic stress and fracture (crush, break) is represented by the change of spring properties on the boundary surfaces. That is to say there are two kind of springs, one is resisting normal stress and the other is shearing stress, and for those spring constants pertinent constitutive equation can be employed depending upon the materials considered. There are three features considered, that is, elasticity, yield (plasticity) and break (cruck).

Fundamentally two elements are connected with each other only on their boundary surface, therefore, more than two elements can not be connected at the same time.

Accordingly the band width of coefficient matrix of governing equation (stiffness equation) will be reduced so that considerable reduction of computing time can be expected.

One, two and three dimensional elements will be described in detail in the present paper.

II. EXAMPLE ANALYSIS

Several numerical examples such as a three dimensional block with a through crack under tensile loading, a block with a single v notch under tensile loading, a two dimensional crack analysis of notched rectangular plates under tensile loading and a one dimensional elasto-plastic, stability and crush analysis of Beam-Column are briefly illustrated in the present paper.

* Lecturer, Yonago Technical College.

** Graduate Student, University of Tokyo.

*** Dept. of Mechanical Engineering and Naval Architecture,
Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Japan.