

13 弾塑性骨組の非対称分岐挙動

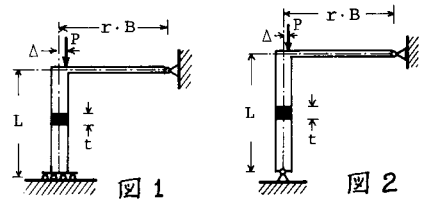
京都大学工学部 中村恒善, 上谷宏二, 澤木英二

[1]序

弾塑性体の座屈現象に関する, 一般的研究には, Hill 等による展開がある [3,4]。しかし, 弾塑性体では, 系のエネルギーは非保存であり, 一般的かつ総括的な座屈理論の展開が, 弾性的場合に比べて極めて困難であり, 十分に進んでいない。また数値解析手法の上でも数多くの問題点が残されている [9,10]。単一の弾塑性柱に代表される, いわゆる対称分岐現象については, shanley [5] 以来相当多くの研究が蓄積されている [6,7]。しかし, 弾性非対称分岐現象に対応するような弾塑性非対称分岐現象については, 本質的, 基礎的な研究は, まだ極めて少なく, わずかに, 非対称断面を有する単一柱部材についての研究が見られるにすぎない [8]。本研究の目的は, 弾塑性肘型骨組の座屈現象を解明し, これによって, 弾塑性非対称系に一般的に見られるであろう現象の本質的特徴を見出すことにある。この肘型骨組モデルが, 弾性理論の範囲において, 典型的な非対称分岐現象を呈することは, 既によく知られている [12]。本論文の前半では, 肘型骨組を梁理論に基づく有限要素法を用いて解析し, 得られた応答に対して考察を加える。後半では, 2自由度単純モデルを用いて, 弾塑性柱の非対称分岐挙動の, 本質的, 普遍的特徴を示していると思われる現象を解明する。これによって, 前半で提示された現象を端的に説明し得ることを示す。対称分岐挙動についての Duberg and Wilder [6] の詳細な成果との対比の便宜上, また現象の本質的特徴を把握するため, 二例以外は, bi-linear 応力-歪関係式を用いた。

[2]梁理論に基づく有限要素法による数値解析

(1) 解析モデル…図-1に示す, 柱脚で回転を拘束しローラー支持された鉛直弾塑性柱と弾性梁で構成される肘型骨組と, 図-2の柱脚単純支持の二種類のモデルを解析する。



(2) 解析手法…平面保持を仮定した, 有限変形梁理論に基づき有限要素法を用いる。歪は Green の歪を用い, 変位関数としては通常の線形斉次方程式の解を用いた。回転の大きな領域まで精度良く解析するために, (i)要素変形は要素と共に回転する移動局所座標に関して表わし, (ii)要素の剛体変位成分は, 局所座標の移動, 回転として(i)とは分離した。応力-歪関係は bi-linear 及び tri-linear を用いた。要素断面はせい方向に数層に分割し, 各要素各層の重心で応力, 歪を評価した。本解析法の座屈挙動の予測性能を検証するために, (a)弾性 Euler 座屈, (b)加藤秋山井上 [7] の報告による, 鋼極短柱の座屈問題を解析した。(付録図参照)

(3) 解析結果…(a) 図-1モデルで柱頭ピンに対する柱の接線係数荷重が降伏荷重よりやや低い, $\lambda=12.5$

$E_T/E = 1/50$ の場合の釣合曲線を図3,4に示す。図3,4は荷重-柱ねじり, 荷重-柱縮み関係をそれぞれ表わす。図3には, 記入した8個の荷重偏心値に対する応答曲線が示されている。図3の▽印は柱全域が塑性化した瞬間の状態を示し, △印は柱脚部右へり又は左へりに除荷域が生じた状態をそれぞれ示す。 $\Delta \leq 3.1\text{mm}$ の4個の場合は, 外側凸の方向(柱脚が左へ変位する方向)から, 内側凸

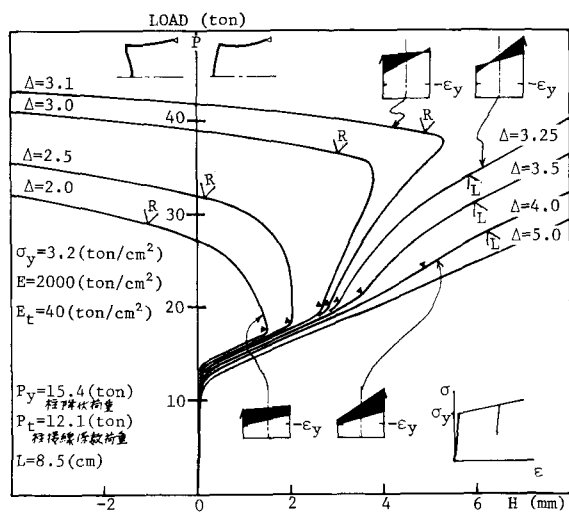


図-3 図-1モデル($E_t/E=1/50$) 荷重-柱たわみ関係

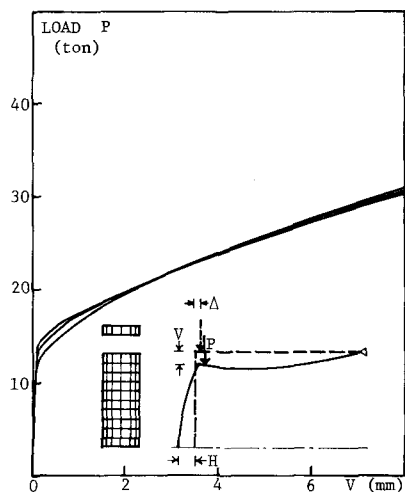


図-4 図-1モデル($E_t/E=1/50$) 荷重-柱縮み関係

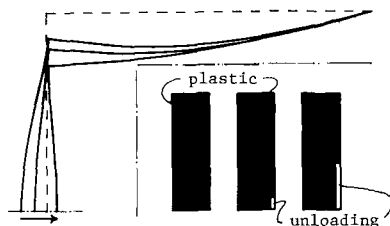
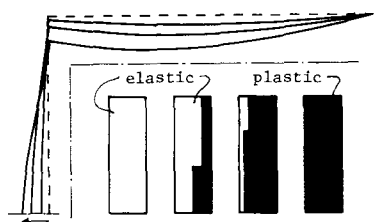


図-5 滑組変形図 及び 弾塑性領域変化図

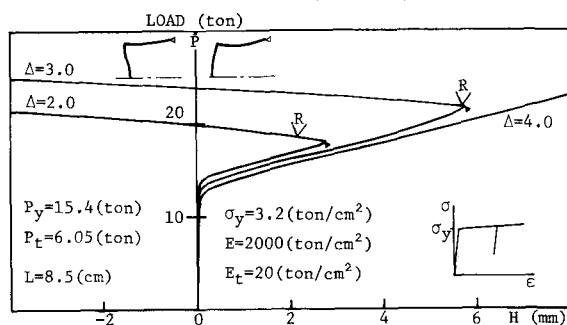


図-6 図-1モデル($E_t/E=1/100$) 荷重-柱たわみ関係

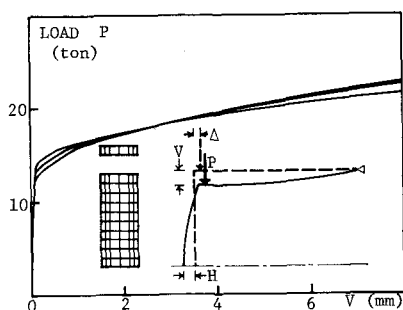


図-7 図-1モデル($E_t/E=1/100$) 荷重-柱縮み関係

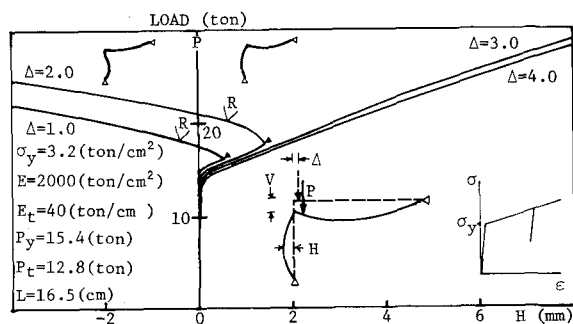


図-8 図-2モデル($E_t/E=1/50$) 荷重-柱たわみ関係

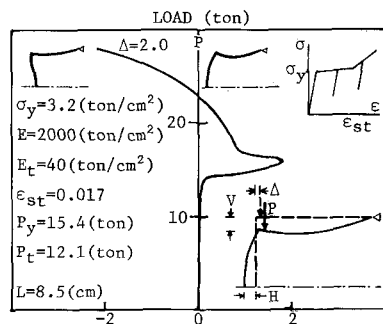


図-9 Tri-linear 応力-歪関係 図-1モデル

の方向(柱脚が右へ変位する方向)へと、たわみの反転現象が見られる。 $\Delta \geq 3.25\text{mm}$ の場合は、外側凸のたわみ変形が進行する。 Δ 点から ∇ 点までの区間の曲線すなわち釣合径路は、柱全域が塑性負荷することで特徴づけられる。 $\Delta=3.1\text{mm}$ の径路は、柱脚が 5.3mm 変位した点で、かなり急激なたわみの反転が見られ、逆方向に僅かに戻った状態で除荷域が現われる。 $\Delta=3.25, 3.5, 4.0\text{mm}$ の3径路はいずれも、全域塑性状態を経て、その後、柱脚部左へりに除荷域が発生する。しかし $\Delta=5\text{mm}$ の場合は、柱脚部左へりに弾性域が残存したまま、全域塑性状態に至らず、外側凸の方向に単調にたわむ。図-3の釣合径路図は左又は右にそれる2種類の径路群を分離するような、臨界径路及びはく離点が存在することを強く暗示する。このはく離点がどのような基本的性質を持つか、どのような条件式で特徴づけられるかを、解明すれば、この種の弾塑性非対称分岐問題の特徴を適確に把握し得る。図-5には $\Delta=2\text{mm}$ の場合のたわみ形状の推移と弾性域・塑性域の変化が、たわみの往きと戻りの過程に分離して示される。図-4の荷重-柱縮み平面図では、各釣合径路は殆んど重なる。図-6,7に、図-1のモデルについて、柱頭ピンの接線係数荷重が降伏荷重よりかなり低い場合の解析例が示されている。この場合も $\Delta=2, 3\text{mm}$ の径路において、たわみの逆戻り現象が見られるが、図-3の場合と様相が異なり、鋭い折曲がり角を持って反転する。この反転点では柱脚部左へりの繊維が最後に降伏点に達して、柱全域が塑性化すると同時に、柱脚部右へりから除荷要素の現われるのが観察される。この場合も、

$3\text{mm} < \Delta < 4\text{mm}$ の区間内に、臨界挙動を呈する Δ 値の存在が予想される。(b) 図-2の柱脚ピンの

モデルをbi-linear 応力-歪関係式によって解析した結果が、荷重-柱中央点水平変位関係図として図-8に示されている。この径路は、(a)の解析における図-6の場合に類似している。(c), tri-

linear 応力-歪関係を用いて、図-1モデルも解析した結果の一例が、図-9に示されている。

【3】単純モデルの解析及び考察

(1) 単純モデル及びその基礎式： 図-1,2に示された肘型骨組の挙動の本質的特性は、図-10に示された2自由度単純モデルによって、端的に解明、把握される。図-10(a)は、弾塑性柱部材のみをシャンレイモデルで置換したモデルである。更に、梁の弾性拘束と荷重偏心の効果を、柱頭に作用する鉛直荷重 N とモーメント M とで表現すれば、最終的に図-10(b)の新しいモデルを得る。これは次に示す意味においてシャンレイモデルとは異なっている。[11] M 及び N は一般化変位成分 U, θ の関数として次式で表わされる。

$$M = D\{\theta + \frac{1}{R}(U + \frac{1}{2}\theta^2)\} - PD \quad (1) \quad N = P - \frac{D}{R}\{\theta + \frac{1}{R}(U + \frac{1}{2}\theta^2)\} \quad (2)$$

ここで、 D は単純梁としての梁部材左端に、単位の回転角を生ぜしめるためのモーメントを表わす。

$L, U, \bar{e}_L, \bar{e}_R, \Delta$ はすべて B で割って無次元化し、それぞれ l, u, e_L, e_R, δ で表わす。 P, N, F_L, F_R は降伏荷重 P_y で無次元化し、 p, n, f_L, f_R で表わす。 M, D は $P_y \cdot B$ で無次元化し、 m, d とする。左右バネの縮みと一般化変位 u, θ の関係は次式に示す。

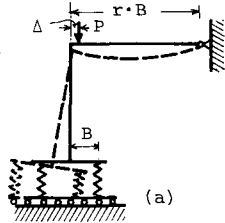
$$e_R = u + \theta, \quad e_L = u - \theta \quad (3)$$


図-10 単純モデル

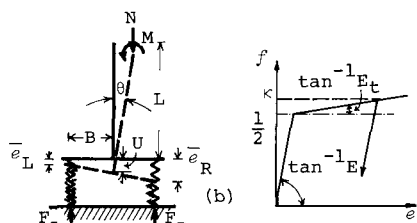


図-11 バネ荷重-縮み関係図

鉛直方向力及び回転モーメントの釣合条件は (1), (2) 式を用い, $O(\theta^2)$ の精度で次のように書ける。

$$p - \frac{d}{x} \left\{ \theta + \frac{1}{x} \left(u + \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right\} = f_R + f_L \quad (4)$$

$$(\delta + 2\theta)p - d \left(1 + \frac{2}{x} \theta \right) \left\{ \theta + \frac{1}{x} \left(u + \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right\} = f_R - f_L \quad (5)$$

弾塑性バネの荷重-縮み関係は図-11に示す bi-linear 関係を用いる。バネの各変形域における荷重-縮み関係は次式で与えられる。

(i) 弾性域 $F = \bar{E}\bar{e}$, $f = Ee$, $E = \bar{E}B/P_y$
(ii) 塑性負荷域 $F = \bar{E}_t\bar{e} + F_0$, $f = E_t e + f_0$, $f_0 = 1/2 + \bar{E}_t/\bar{E}$, $E_t = \bar{E}_t B/P_y$
(iii) 除荷域 $F = \bar{E}\bar{e} + F_1$, $f = Ee + f_1$, $f_1 = 1 + E/2E_t + (1 - E/E_t)\kappa$ (6)

釣合経路は、左右のバネの状態変化の組合せによって、幾つかの部分に区切られる。それぞれの部分に適合する材料則を (6) 式より選び、これを (3, 4, 5) 式と連立させて得た解を継ぎ合せて、全体の釣合経路が求まる。

(2) バネの状態領域図：前で述べたように、各釣合経路は左右バネの状態の組合せによって、幾つかの部分に区切られる。この区切り点は左右いずれかのバネが除荷若しくは除荷する状態を表わす。ここで、他のすべてのパラメータを固定して、荷重偏心だけを連続的に変化させると、一組の釣合経路群が得られ、これは状態空間 $(p-u-\theta)$ 内で曲面を構成する。これに伴い前述の経路の区切り点も曲線を描く。これらの曲線が区切られた面分をバネの状態領域と呼ぶ。この状態領域の形態を正確に認識することによって、パラメータの変化に伴う弾塑性釣合経路の変化の様子を、比較的容易にかつ正確に把握することができる [6]。この問題では、8種類の領域を考えれば十分である。これらの領域内での左右バネの状態が表-1にまとめられている。状態領域を区切る境界線を与える条件式及びそれによって隔てられる状態領域が表-2に示される。 c_R 線は左右両方のバネが塑性域にある状態から、左バネの歪速度がゼロとなり、その後除荷が始まる状態を、 c_L 線は右のバネが歪速度ゼロを経て除荷を始める状態をそれぞれ表わす。故に c_R 線と c_L 線との交点は接線係数型分岐点となると思われる。実際、弾塑性安定一般論 [3] に従って、解の唯一性が失われる条件より導かれる接線係数型分岐点条件式は次のようになる。

$$xE_t(\delta + 2\theta) + d\left(\frac{\delta}{x} - 1\right) = 0 \quad (7)$$

$$p = \frac{2E_t}{x} + d\left\{\left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{2f_0}{x^2 E_t}\right) + \frac{1}{x}(4 + 3\frac{2}{x}\theta)\theta\right\} \quad (8)$$

(7, 8) 式を満足する釣合状態は、 c_R 線と c_L 線との交点となっていることがわかる。

(3) 梁剛性の変化に伴う領域図の変動：柱頭ピンの柱の接線係数荷重と降伏荷重との比 $p_T=1.2, 1.0, 0.8$ の3ケースについて、梁の拘束係数 d の値の変化に伴う状態領域図の変動の様子が、図-12, 13, 14にそれぞれ示されている。図-12, $p_T=1.2$ の場合は、 $d \geq 0$ に対して接線係数分岐点 C は常に b_L, b_R 線より上の領域にあり、 $C-BR-A-BL$ の菱形の $[P-P]$ 領域がある。 d がゼロに近づくにつれて、菱形領域は縮小し、 C が $p=1.2, \theta=0$ となり、領域図は対称形となる。 $p_T=1$ の場合も C 点は常に存在する。そして $d \rightarrow 0$ の極限で C, BR, A, BL 点は $p=1, \theta=0$ の一点に収束する。図-14 の $p_T=0.8$ の場合 d が十分大きな値の時は C 点が存在する。しかし d の値が次第に減少すると、やがて C 点が BR 点に一致する。それ以上に小さい d の値に対しては C 点が BR 線より下の領域に来るので C 点は現実

的に意味のない点となる。c 点の存在する場合としない場合とでは、釣合経路の様相が異なるが、これについては以下で、詳しく説明する。

(4) 領域図において c 点が存在する場合の釣合経路： 接線係数分岐点 c が、 b_R 、 b_L 線より上側の領域内にあり、菱形の [P-P] 領域図が描かれる場合における、釣合経路群の一例が、図15に示されている。これらの釣合経路は、その進行につれて左右のバネが沁る降伏・除荷履歴の種類によって、数値のグループに分類される。図15には、各グループの代表的経路が記入され、これらが沁る状態の推

状態領域	左側バネの状態	右側バネの状態
E-E	$f_L < 1/2$, $\dot{e}_L > 0$ 弾性負荷	$f_R < 1/2$, $\dot{e}_R > 0$ 弾性負荷
E-P	$f_L < 1/2$, $\dot{e}_L > 0$ 弾性負荷	$f_R = \kappa_R$, $\dot{e}_R > 0$ 塑性負荷
UE-P	$f_L < 1/2$, $\dot{e}_L < 0$ 弾性域からの除荷	$f_R = \kappa_R$, $\dot{e}_R > 0$ 塑性負荷
UP-P	$f_L < \kappa_L$, $\dot{e}_L < 0$ 塑性域からの除荷	$f_R = \kappa_R$, $\dot{e}_R > 0$ 塑性負荷
P-P	$f_L = \kappa_L$, $\dot{e}_L > 0$ 塑性負荷	$f_R = \kappa_R$, $\dot{e}_R > 0$ 塑性負荷
P-E, P-UE, P-UP は表中の E-P, UE-P, UP-P に対して左右のバネ状態が逆の場合		

表 - 1

領域境界線	条件式		境界を挟む領域
aR	$f_R = 1/2$, $f_L \leq 1/2$	右バネ降伏	[E-E]//[E-P], [E-E]//[UE-P]
bR	$f_R \geq 1/2$, $f_L = 1/2$	左バネ降伏	[P-P]//[E-P]
cR	$\dot{e}_L = 0$; $f_R = \kappa_R$, $f_L = \kappa_L$	左バネ除荷	[P-P]//[UP-P]
gR	$\dot{e}_L = 0$; $f_R = \kappa_R$, $f_L < 1/2$	左バネ除荷	[E-P]//[UE-P]
aL	$f_R < 1/2$, $f_L = 1/2$	左バネ降伏	[E-E]//[P-E], [E-E]//[P-UE]
bL	$f_R = 1/2$, $f_L \geq 1/2$	右バネ降伏	[P-P]//[P-E]
cL	$\dot{e}_R = 0$; $f_R = \kappa_R$, $f_L = \kappa_L$	右バネ除荷	[P-P]//[P-UE]
gL	$\dot{e}_R = 0$; $f_R < 1/2$, $f_L = \kappa_L$	右バネ除荷	[P-E]//[P-UE]

表 - 2

釣合経路	経路に沿う状態推移	経路の特徴
I-(1)	(aR)→[E-P]→(gL)→[UE-P]	左バネが弾性域で除荷
I-(2)	(aR)→[E-P]→(bR)→[UE-P]	左バネが降伏した瞬間に除荷
I-(3)	(bR)→[E-P]→(bR)→[P-P]→(cR)→[UP-P]	両バネ塑性状態を経て左バネが除荷
I-(4)	(aR)→[E-P]→(bR)→[P-P]→(c)→ →[UP-P] →[P-P] →[P-UP]	接線係数型の分岐経路
I-(5)	(A)→[P-P]→(cL)→[P-UP]	両バネが同時に降伏後右バネが除荷
I-(6)	(aL)→[P-E]→(bL)→[P-UE]	右バネが降伏と同時に除荷
I-(7)	(aL)→[P-E]→(gL)→[P-UE]	右バネが弾性

表 - 3

釣合経路	経路に沿う状態推移	経路の特徴
II-(1)	(aR)→[E-P]→(gR)→[UE-P]	右バネ降伏後 左バネが弾性から除荷
II-(2)	(aR)→[E-P]→(bR)→ →[UE-P] →[P-UE]	BR 域で釣合経路群がはく離
II-(3)	(aR)→[E-P]→(bR)→[P-UE]	左バネ降伏の瞬間 右バネが塑性域から除荷
II-(4)	(A)→[P-UE]	左右バネが同時降伏後 右バネで急激な除荷
II-(5)	(aL)→[P-UE]	右バネが弾性域から除荷

表 - 4

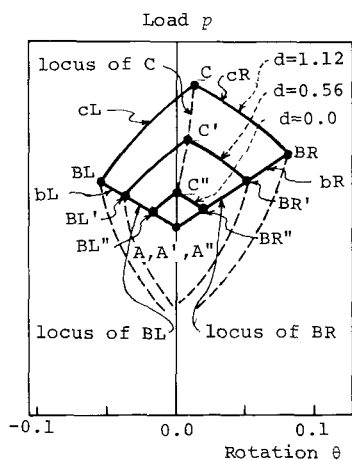


図-12 状態領域図, $P_t/P_y=1.2$

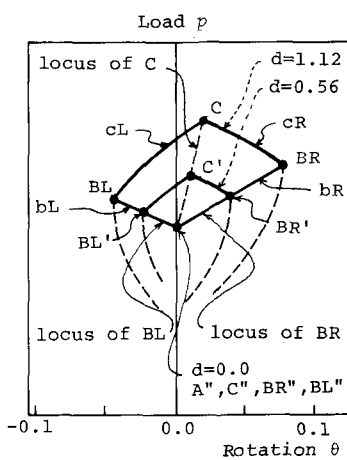


図-13 状態領域図, $P_t/P_y=1.0$

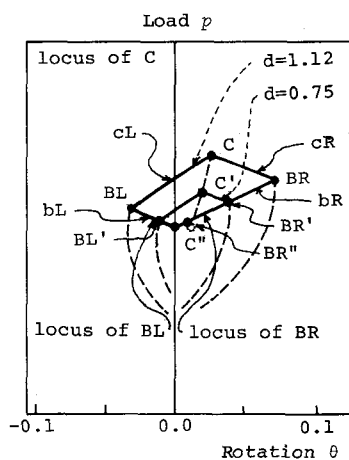


図-14 状態領域図, $P_t/P_y=0.8$

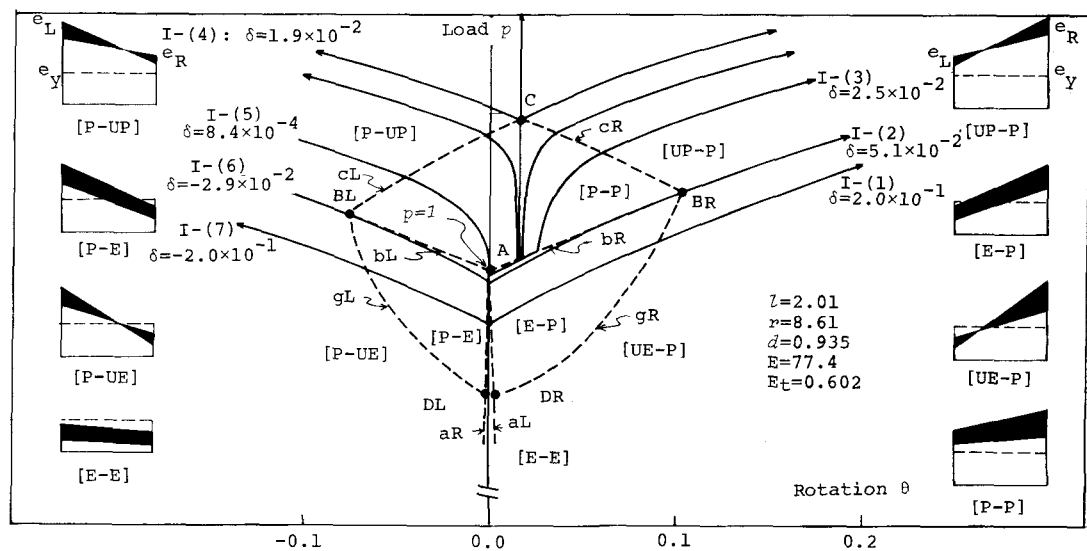


図-15 荷重-回転角関係, $P_t/P_y=1.2$

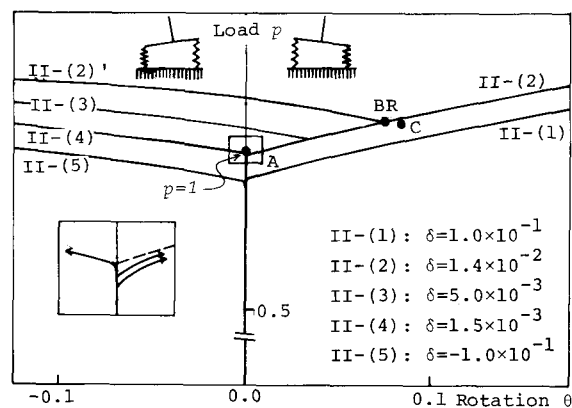


図-16 荷重-回転角関係, $P_t/P_y=0.6$

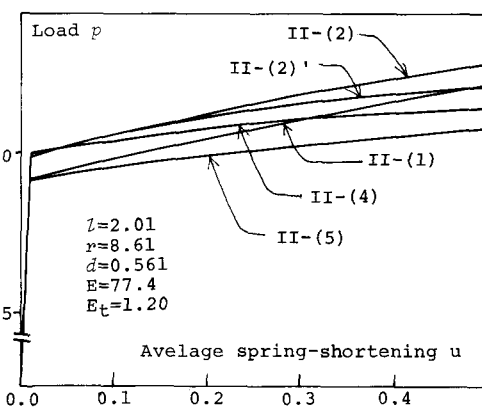


図-17 荷重-平均バネ縮み関係, $P_t/P_y=0.6$

移及び特徴が表-3に示される。 $I^{-(4)}$ はC点を通る経路であり、C点で3個の異なる経路に分岐する。1つはC点を通り荷重P軸に平行な基本経路である。基本経路挙動において、左右のバネは等しい割合で負荷する。他の2経路はそれぞれ左右のバネが中立負荷状態から除荷する経路である。この2分枝は、共に荷重の増加を伴うが、 θ 軸に関しては正負反対方向にそれぞれ向う。以上に述べた性質は対称分岐点とも共通するが、次の点で違いがある。(i)対称の場合の基本経路は $\theta=0$ であるのに対し、本モデルでは柱が右に傾いた $\theta>0$ の領域にある。(ii) $P-\theta$ 平面で、 θ 軸の負方向へ向う経路の方が正の方向へ向う経路より緩い勾配を持つ。分岐経路を与える偏心率 δ_c を境に、 $\delta>\delta_c$ の経路はすべて θ の正方向に、 $\delta<\delta_c$ の経路はすべて負方向に向う。たわみの反転現象が生じる偏心率範囲は $\delta_A<\delta\leq\delta_c$ である。 δ_A はA点を通る経路に対する偏心率。図-3で示された、現実的な肘型骨組の数値解析結果の種々の特性は、図-15の単純モデルの釣合経路図によって端的に説明し得たといえる。

(5) 領域図においてC点が(意味のある点として)存在しない場合の釣合経路：C点がBR線より下側の領域に来て物理的意味を失う場合の釣合経路が図16に示されている。各代表的経路についてその性質が表-4にまとめられている。この場合、釣合経路群のはく離点はBR点である。BR点は次の二つの条件を兼備した点として特徴づけられる；(1)左側のバネが降伏する点、(2)左側のバネが除荷する点。この点では次に示すような、 θ に関して正負相反する方向へ向う2つの経路が分離する；(i)左バネが降伏点に達する直前に、除荷が始まり、 θ が正の方向に単調に傾く経路、(ii)左バネが降伏した瞬間に右バネが有限の歪速度を持って除荷し、 θ が反転して負の方向に向う経路。この時BR点から登る、左右両バネが塑性負荷する経路はない。BRに達する経路を与える偏心率を δ_{BR} と書くと、たわみの反転が生じるための偏心率領域は $\delta_A<\delta\leq\delta_{BR}$ である。図-6に示された肘型骨組の数値解析結果の本質的特徴も、このモデルで説明されたといえる。

[4]結論 (1)弾塑性肘型骨組の種々の釣合経路を、梁理論に基づく有限要素法によって求めた。この現象の特徴的な点を次に示す。(a)柱脚の支持条件が異なる図-1及び図-2のいずれの骨組においても、bi-linear又はtri-linearの応力-歪関係を用いた解析によって、柱たわみの反転する応答が得られた(図3~9)。(b)bi-linear 応力-歪関係で第2分枝勾配がかなり小さく、柱頭ピンの条件に対する柱の接線係数荷重が、降伏荷重よりもかなり低い場合の解析例では、鋭い角度をもってたわみが反転する釣合経路が得られた。(c)荷重偏心率位置を変化させて得られる釣合経路群は、終局状態での柱のたわみ方向が異なる2つのグループに分離される。この分離は分岐経路の存在を示唆している。

(2) (1)の数値解析結果に見られる諸現象は、新たに提案された単純モデルを用いて、端的に説明された。単純モデルの解析を通じて説明された結果は次にまとめられる。(a)性質の異なる2種類の臨界点があり、釣合経路群はこのいずれかの点からはく離する。(b)1つは接線係数型分岐点で、ここから2個の異なる分岐経路が発生する。この分岐点での形状は柱がたわんだ状態である。(c)今1つは(b)に対応する基本経路の存在しないはく離点で、柱頭ピンの柱材の接線係数荷重が降伏荷重よりもかなり低い場合に生じ得る。(d)荷重偏心率が、「柱が弾性域でたわみずに変形する時の偏心率」と「前述の臨界点挙動を与える時の偏心率」との間の範囲にある時、柱のたわみ方向の逆転する現象が生じる。

(3)上記での性質は(1)の現実的骨組モデルの解析結果において観察された所であり、従ってこれらの中には、弾塑性体の更に一般的な非対称分岐現象の普遍的特徴を表わすものがあると推察される。

ASYMMETRIC BRANCHING BEHAVIOR OF ELASTIC-PLASTIC FRAMES

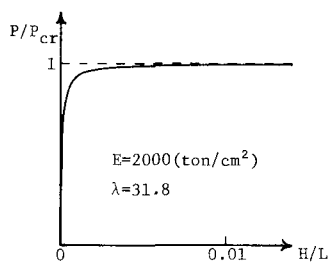
By Tsuneyoshi NAKAMURA[#], Koji UETANI^{*} and Eiji SAWAKI^{**}

The symmetric branching behavior of inelastic structures as represented by the well-known Shanley type buckling of inelastic columns have been investigated in detail. It does not appear, however, that the elastic-plastic counterpart of the general theory for asymmetric branching behavior has so far been discussed. The only one example in which an asymmetric branching behavior has been illustrated is the Shanley-like branching curves for an aluminum column with an unsymmetrical cross-section.

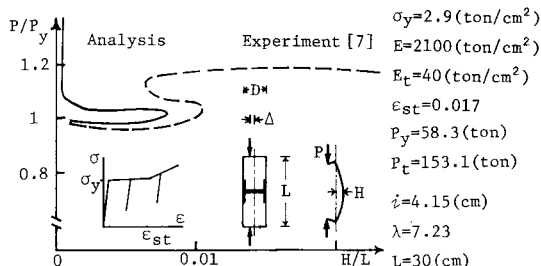
In the present paper, some fundamental characteristics of the asymmetric branching behavior of elastic-plastic frames have been first investigated through finite element analysis of elbow-shaped bi- and tri-linear strain-hardening frames, and then clarified through a theoretical analysis of a simple simulation model.

1. The following characteristics have been observed in the numerical results:
 - (1) As the single vertical load is monotonically increased with an eccentricity value within a certain interval, a deflection reversal occurs. [Fig.3-9]
 - (2) Equilibrium paths for different load eccentricities may be classified into two groups for both of the frames analyzed here. These two groups of curves apparently suggest the existence of a branching point or a point of separation. [Fig.3,6,8]
 - (3) In the case of the frame with a column whose tangent modulus load is considerably less than the yield load, each equilibrium path for a load eccentricity within a certain interval exhibits a sharply turning corner. [Fig.6]
2. The fundamental characteristics clarified through the model analysis may be summarized as:
 - (1) Two different types of separation points exist. [Fig.15,16]
 - (2) Two different paths branch off the fundamental path at a branching point of the asymmetric version of the well-known tangent modulus branching in the Shanley model or in symmetric columns. In contrast to the symmetric branching behavior, the frame is in a deflected configuration already at the asymmetric branching point. [Fig.15] [Fig.16]
 - (3) At the other separation point, the counterpart of the fundamental path does not exist?
 - (4) For a load eccentricity value within a certain interval, a deflection reversal occurs similarly to the reversal in the realistic columns as described in 1. [Fig.15,16]
3. It has been demonstrated that the simple model enables one to account for all the fundamental characteristics of the asymmetric branching behavior of the realistic two-bar frames. It may therefore be conjectured that at least some of the characteristics discovered here represent those of asymmetric branching behaviors of general elastic-plastic structures.

[#]Associate Professor of Architecture, ^{*}Assistant, ^{**}Graduate student, of Kyoto University



弾性柱の Euler 座屈



鋼極短柱の座屈 [7] $\Delta/D=0.0005$

REFERENCES

- [1] W. T. Koiter, On the Stability of Elastic Equilibrium, *Thesis, Univ. Delft*, H. J. Paris, Amsterdam, 1945, English translation NASA TT F-10,833, 1967.
- [2] J. M. T. Thompson, A General Theory for the Equilibrium and Stability of Discrete Conservative Systems, *Zeit. Angew. Math. Phys.*, 20, 797-846, 1969.
- [3] R. Hill, On the Problem of Uniqueness in the Theory of a Rigid-plastic Solid, I, II, III, IV, *J. Mech. Phys. Solids*, 4, 247-255, 5, 1-8, 1956; 5, 153-161, 302-307, 1957.
- [4] J. W. Hutchinson, Post-bifurcation Behavior in Plastic Range, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 163-190, 1973.
- [5] F. R. Shanley, Inelastic Column Theory, *J. Aero. Sci.*, 14, 261-268, 1947.
- [6] J. E. Duberg & T. W. Wilder III, Inelastic Column Behavior, *NACA Rept.* 1072, 1952. J. E. Duberg, Inelastic Buckling, *Handbook of Engineering Mechanics* (Edited by W. Flugge), McGraw-Hill, 52.1-52.9, 1962.
- [7] 加藤 勉, 林山 井上豊彦, 「中心圧縮鋼短柱の座屈後の挙動」, 日本建築学会論文報告集, 第229号, 67-76.
- [8] B. G. Johnston (Ed.), *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, (3rd Ed.) Chap.3, 44-47, J. Wiley & Sons, 1976.
- [9] 中村 恒善, 上谷 忠二, 「複合非線形問題の数値解析法」, 成岡昌夫, 中村 恒善 共編, 骨組構造解析法要覧 第8章, 159-184, 培風館, 1976.
- [10] Yoshitsura Yokoo, Tsuneyoshi Nakamura & Koji Uetani, The Incremental Perturbation Method for Large Displacement Analysis of Elastic-plastic Structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10, 503-525, 1976.
- [11] M. J. Sewell, The Static Perturbation Technique in Buckling Problems, *J. Mech. Phys. Solids*, 13, 247-265, 1965.
- [12] W. T. Koiter, Post-Buckling Analysis of a Simple Two-Bar Frame, *Recent Progress in Applied Mechanics: The Folke Odqvist Volume*, John Wiley & Sons, 337-354, 1967.