

1 1 薄肉開断面曲がり梁の大変形解析

金沢工業大学 〇西田 進
金沢大学 吉田 博
名古屋大学 福本 孝士

1. 緒言

薄肉開断面部材の有限変位理論に関する研究は、変位場の仮定より構成方程式を導く方法の確立により著しい発展がみられる。西野¹⁾は、3次元弾性体の有限変位の場合のひずみ・変位関係式を基礎とし、横断面形不変とせん断ひずみに関する仮定を適用する変位場と仮想仕事の原理を用いて、直梁の基礎方程式と境界条件式を導いている。また薄木²⁾は、薄肉回転シェルの有限変位のひずみ・変位関係と、直梁と同様な仮定を用いた変位場を適用して、薄肉曲線材の構成方程式を求めている。

一方、変形を考慮した薄肉断面梁の構成方程式は非線形方程式となり、数値計算上の困難さがある。このため、比較的厳密な構成方程式を得るにもかかわらず、解析例は特別な荷重条件、境界条件に関するものが多い。

本研究では、部材軸方向に曲率一定な薄肉開断面曲がり梁を対象として、円筒座標系に関する有限変位のひずみ・変位関係式と、ひずみに関する変位場の仮定のみを用いて変位関数を導き、これと仮想仕事の原理を用いて構成方程式を誘導する。次に、導いた構成方程式内の三角関数をTaylor展開することなく1階の常微分方程式系に変換し、この式をルンゲ・クッター法を用いた積分により格間伝達マトリックスを求める。この格間伝達マトリックスを用いた伝達マトリックス法による曲がり梁の解析は比較的大きなおじれが生じる場合も良い精度がえられる。

2. 曲がり梁の基礎方程式の誘導

図-1に示すような、一平面内で曲がり、その曲率と断面形がはり軸方向に一定な薄肉開断面曲がり梁を考える。

用いた仮定

- 1) 曲がり梁の曲率半径および部材長さは断面寸法に比して十分大きいものとする。
- 2) 断面は2軸対称薄肉開断面とする。
- 3) 横断面形状は変化せず、また直応力と釣り合い状

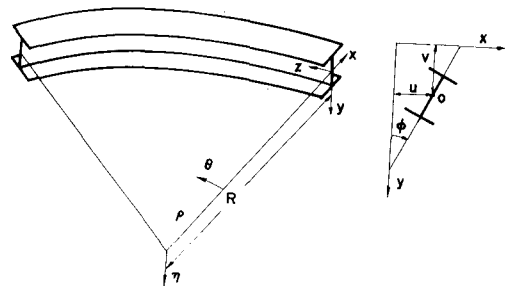
態にあるせん断力によるせん断変形は無視する。

図-1 解析モデル

- 4) 横断面方向の変位に比して、部材軸方向の変位は小さく、また軸方向ひずみも小さい。

図-1に示すように、曲がり梁の曲率中心に原点をもつ円筒座標 (ρ, θ, z) を、断面の重心に原点をもつ直交曲線座標 (x, y, z) を定義する。ただし、曲がり梁の曲率中心と断面の重心との距離は一定 R とし、 ρ, z 軸の正方向と x, y 軸の正方向は一致する。

有限変位理論による変位とひずみの関係は基準状態(変形前の状態)が円筒座標系を構成し、仮定4)より、横断面方向の変位に比して部材軸方向変位が小さい場合、次式で表わされる³⁾。



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (1-a, b)$$

$$\varepsilon_\theta = \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right\}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1-c, d)$$

$$\gamma_{x\theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \gamma_{y\theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (1-e, f)$$

ここに u, v, w は変形前の x, y, θ 方向変位を示す。横断面形は変化しないという仮定3)より $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ (2) を得る。式(2)を満足する解は剛体変位であり、幾何学的条件より

$$u = u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi), \quad v = v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \quad (3-a, b)$$

となる。ここに u_0, v_0 は原点の x, y 方向変位であり、 φ は θ 軸まわりのおじれ角を表わす。

一般にはり理論では軸方向垂直応力差とつり合うせん断応力による変形は無視する(仮定3)。この条件を用いると $\gamma_{x\theta} = \gamma_{y\theta} = 0$ を得る。また仮定1)より ρ は十分大きく式(1-e, f)の2次項の w は $w \approx w_0$ と近似できる。ここに w_0 は原点の θ 方向変位である。式(2-e, f)は、この近似と $\gamma_{x\theta} = \gamma_{y\theta} = 0$ なる条件より、次の様に変形できる。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = - \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w_0}{\rho} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w_0}{\rho} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w_0}{\rho} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (4-a, b)$$

式(3)を式(4)に代入し、整理すると

$$\frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{R}{\rho} \left\{ (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \cos \varphi + v'_0 \sin \varphi \right\} + \frac{R}{\rho} y \varphi', \quad \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{R}{\rho} \left\{ v'_0 \cos \varphi - (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \sin \varphi \right\} - \frac{R}{\rho} x \varphi' \quad (5-a, b)$$

を得る。ここに φ は θ 方向の $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ を示す。 x, y 平面での全微分の定義式 $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$ と

式(5)より

$$w = w_0 - \left\{ (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \cos \varphi + v'_0 \sin \varphi \right\} x - \left\{ v'_0 \cos \varphi - (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \sin \varphi \right\} y + \left\{ \int \frac{R}{\rho} y dx - \int \frac{R}{\rho} x dy \right\} \\ + \left\{ \int \frac{R}{\rho} dx \left\{ (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \cos \varphi + v'_0 \sin \varphi \right\} + \int \frac{R}{\rho} dy \left\{ v'_0 \cos \varphi - (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \sin \varphi \right\} \right\} \quad (6)$$

を得る。式(6)4～6項の積分は薄肉断面のそり関数に対応する項である。ここでそり関数 ω を導入するため、薄肉断面重心に原点をもち、薄肉中心線にそった S 座標と、 S と直角方向の n 座標を定義する。 S, n 座標を用いて式(6)4項の積分を行なうと次のようになる。

$$\int \frac{R}{\rho} y dx - \int \frac{R}{\rho} x dy = - \int \frac{R}{\rho^*} (x^* \frac{\partial y^*}{\partial S} - y^* \frac{\partial x^*}{\partial S}) dS + \int \frac{R}{\rho^*} (y^* \frac{\partial x^*}{\partial n} - x^* \frac{\partial y^*}{\partial n}) dn = - \int_0^S \frac{R}{\rho^*} \rho_S dS + \int_0^n \frac{R}{\rho^*} \rho_n dn \quad (7)$$

ここに $\rho_S = x^* \frac{\partial y^*}{\partial S} - y^* \frac{\partial x^*}{\partial S}$, $\rho_n = y^* \frac{\partial x^*}{\partial n} - x^* \frac{\partial y^*}{\partial n}$ であり、 $*$ は薄肉中心線上の値を示す。同様に $\rho = R + x$ なる関係を用いて5, 6項を積分すると $\left\{ \int_0^S \frac{R}{\rho^*} \rho_S dS - \int_0^n \frac{R}{\rho^*} \rho_n dn \right\} \frac{v'_0}{R}$ と近似できる。これらを用いて式(6)を整理する。

$$\omega = \int_0^S \frac{R}{\rho^*} \rho_S dS - \int_0^n \frac{R}{\rho^*} \rho_n dn = \omega^* - \frac{R}{\rho^*} \rho_n n$$

$$w = w_0 - \left\{ (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \cos \varphi + v'_0 \sin \varphi \right\} x - \left\{ v'_0 \cos \varphi - (u'_0 - \frac{w_0}{R}) \sin \varphi \right\} y - \omega (\varphi' - \frac{v'_0}{R}) \quad (8)$$

次に板厚方向に変化するせん断ひずみ $\gamma_{\theta\theta}$ (St. Venantのおじり)によるせん断ひずみに対応する)を

求める。式(6)の積分において平面保持の法則に従う、 x, y 座標の一次式にて表わされる変位成分と平面保持の法則に従わない S, π 座標にて表わされる変位成分に分けて解析したので $\gamma_{s0} \equiv 0$ ではない。 S, π 座標系で表わしたせん断ひずみ γ_{s0} と γ_{x0}, γ_{y0} の間には次式が成立する。

$$\gamma_{s0} = \gamma_{x0} \frac{\partial x}{\partial S} + \gamma_{y0} \frac{\partial y}{\partial S} = \frac{\partial x}{\partial S} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho} \right) + \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial S} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{\rho} \right) + \frac{\partial v}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (9)$$

式(9)に式(3), (8)を代入して整理すると $\gamma_{s0} = \frac{R}{\rho^2} 2\pi \left(\varphi' - \frac{v_0'}{R} \right) = \theta \left(\varphi' - \frac{v_0'}{R} \right)$ をえる。式の変形の過程で薄肉断面という仮定より $\frac{R}{\rho} \approx 1 - \frac{x}{R}$, $x = x^* + \pi \frac{\partial x^*}{\partial S}$, $y = y^* - \pi \frac{\partial x^*}{\partial S}$, $\rho \approx \rho^*$ なる近似を行なった。式(3), (8)を式(1-c)に代入すると次の軸ひずみ ε_0 を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = & \frac{R}{\rho} \left\{ \left(\omega_0' + \frac{u_0'}{R} \right) - \left\{ \left(u_0'' - \frac{w_0'}{R} \right) \cos \varphi + v_0' \sin \varphi + \frac{1 - \cos \varphi}{R} \right\} x - \left\{ v_0'' \cos \varphi - \left(u_0'' - \frac{w_0'}{R} \right) \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{R} \right\} y - \omega \left(\varphi' - \frac{v_0'}{R} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \left\{ \left(u_0' - \frac{w_0'}{R} \right)^2 + (x^2 + y^2) \varphi'^2 \right\} + \left(\frac{R}{\rho} - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \left\{ \left(u_0' - \frac{w_0'}{R} \right) (y \cos \varphi + x \sin \varphi) \varphi' - v_0' (x \cos \varphi - y \sin \varphi) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

いま、曲がり梁の曲率半径 R は十分大きく、 $\frac{R}{\rho} \approx 1$ に近似できる場合を考える(仮定1)。この場合、式(10)の最後の項は0となる。また θ 座標のかかりに x, y 座標を用い、サブスクリプトを省略して解析を進める。

仮定2より、せん断中心と重心が一致する対称軸交点に (x, y, z) , (S, π) 座標の原点をとり、変形前の x, y, z 方向の分布荷重 g_x, g_y, g_z および分布おじりモーメント m_x が作用する場合を考える。内力のなす仕事を U , 分布荷重および部材端力のなす仕事を V_1 および V_2 とすれば仮想仕事の原理より次式が成立する。

$$\begin{aligned} \delta U - \delta V_1 - \delta V_2 = 0, \quad \delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{sz} \delta \gamma_{sz}) dA dz, \quad \delta V_1 = \int_0^L \{ g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w + m_x \delta \varphi \} dz \\ \delta V_2 = \bar{N} \delta w_0^L + \bar{V}_x \delta u_0^L + \bar{V}_y \delta v_0^L + \bar{M}_x \delta \varphi_0^L - \bar{M}_y \delta \left(u' - \frac{w'}{R} \right)_0^L - \bar{M}_z \delta v_0^L - \bar{M}_\omega \delta \left(\varphi' - \frac{v'}{R} \right)_0^L \quad (11-a \sim d) \end{aligned}$$

ここに $\bar{N}, \bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_\omega$ は部材端に作用する外力あるいは反力であり、 L はスパン長を示す。式(11-b)の断面に関する積分を行なうと

$$\begin{aligned} \int_A (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{sz} \delta \gamma_{sz}) dA = & -\frac{N}{R} \left(u' - \frac{w'}{R} \right) \delta w' + \left\{ N + \frac{M_x}{R} \cos \varphi - \frac{M_z}{R} \sin \varphi \right\} \delta w' + \frac{N}{R} \delta u + N \left(u' - \frac{w'}{R} \right) \delta u' - \\ & \{ M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi \} \delta u'' + (N v' - \frac{T_{st}}{R}) \delta v' - \{ M_y \sin \varphi + M_x \cos \varphi - \frac{M_\omega}{R} \} \delta v'' + \{ M_y \left\{ \left(u'' - \frac{w'}{R} \right) \sin \varphi - v'' \cos \varphi \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sin \varphi}{R} \right\} + M_x \left\{ v'' \sin \varphi + \left(u'' - \frac{w'}{R} \right) \cos \varphi - \frac{\cos \varphi}{R} \right\} \right\} \delta \varphi + (T_{st} + K \varphi') \delta \varphi' - M_\omega \delta \varphi'' \quad (12) \end{aligned}$$

を得る。式(12)の断面力は次のように定義した。

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA, \quad M_\omega = \int_A \sigma_z \omega dA, \quad T_{st} = \int_A \tau_{sz} \theta dA, \quad K = \int_A \sigma_z (x^2 + y^2) dA \quad (13)$$

式(12)を式(11-b)に代入して部分積分を行ない、式(11-c, d)と共に式(11-a)に代入して整理すると次の微分方程式と境界条件式をえる。

$$N' + \frac{1}{R}(M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi)' + \frac{N}{R}(u' - \frac{w}{R}) + \delta_x = 0, \quad (N - \bar{N}) \delta u|_0^L = 0 \quad (14-a)$$

$$(M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi)'' - \frac{N}{R} + \{N(u' - \frac{w}{R})\}' + \delta_x = 0 \quad (14-b)$$

$$(M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi)'' - \frac{M_w' + T_{st}}{R} + (Nv')' + \delta_y = 0 \quad (14-c)$$

$$M_w' + T_{st}' + (K\varphi)' - M_y\{(u' - \frac{w}{R})\sin \varphi - v' \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{R}\} - M_x\{v' \sin \varphi + (u' - \frac{w}{R}) \cos \varphi - \frac{\cos \varphi}{R}\} + m_x = 0 \quad (14-d)$$

$$\{(M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi)' + N(u' - \frac{w}{R}) - \bar{N}_x\} \delta u|_0^L = 0, \quad \{(M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi) - \bar{M}_y\} \delta(u' - \frac{w}{R})|_0^L = 0 \quad (14-e)$$

$$\{(M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi)' - \frac{M_w' + T_{st}}{R} + Nv' - \bar{N}_y\} \delta v|_0^L = 0, \quad \{(M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi) - \bar{M}_x\} \delta v'|_0^L = 0 \quad (14-f)$$

$$\{(M_w' + T_{st} + K\varphi) - \bar{M}_z\} \delta \varphi|_0^L = 0, \quad (M_w - \bar{M}_w) \delta(\varphi' - \frac{v'}{R})|_0^L = 0 \quad (14-g)$$

また断面力と変形の関係は2軸対称断面と言う仮定2)と式(10), (13)より次式をえる。

$$N = \int_A E \varepsilon_z dA = EA(w' + \frac{u}{R}) + \frac{1}{2}EA\{(u' - \frac{w}{R})^2 + v'^2\} + \frac{1}{2}EI_p \varphi'^2 \quad (15-a)$$

$$M_x = \int_A E \varepsilon_z y dA = -EI_x\{v' \cos \varphi - (u' - \frac{w}{R}) \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{R}\} \quad (15-b)$$

$$M_y = \int_A E \varepsilon_z x dA = -EI_y\{(u' - \frac{w}{R}) \cos \varphi + v' \sin \varphi + \frac{1 - \cos \varphi}{R}\} \quad (15-c)$$

$$M_w = \int_A E \varepsilon_z w dA = -EI_w(\varphi' - \frac{v'}{R}), \quad T_{st} = \int_A G \gamma_{sz} \otimes dA = G K_T(\varphi' - \frac{v'}{R}) \quad (15-d, e)$$

ここに $A = \int_A 1 dA$, $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$, $I_p = I_x + I_y$, $I_w = \int_A w^2 dA$, $K_T = \int_A \otimes^2 dA$ である。

3. 伝達マトリックス法による曲がり梁の解析

式(14-d~g)の境界条件式より, 変形前の部材座標系に関する次の変形量および断面力をえる。ただし, 変形後の部材軸に関する曲げモーメントと区別するため, 変形前の部材軸に関する曲げモーメントはバーをつけて表示する。

$$\theta_y = u' - \frac{w}{R}, \quad \theta_x = v', \quad \rho = \varphi' - \frac{v'}{R}, \quad M_z = M_w' + T_{st} + K\varphi' \quad (16-a \sim d)$$

$$\bar{M}_x = M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi, \quad \bar{V}_y = (M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi)' - \frac{M_w' + T_{st}}{R} + Nv' \quad (16-e, f)$$

$$\bar{M}_y = M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi, \quad \bar{V}_x = (M_y \cos \varphi - M_x \sin \varphi)' + N(u' - \frac{w}{R}) \quad (16-g, h)$$

式(14)~(16)を用いて状態量ベクトルの各項を1階の常微分方程式系に変換し, マトリックス記号表示すると $\frac{d}{dx}V = GV$ (17)となる。ここに V^T は $\{w \ N \ u \ \theta_y \ \bar{M}_y \ \bar{V}_x \ v \ \theta_x \ \bar{M}_x \ \bar{V}_y \ \varphi \ \rho \ M_z \ M_w \ 1\}$ なる状態量ベクトルを, G は 15×15 のマトリックスを表す。式(17)をルンゲ・クッタ法を用いて数値積分すると格間伝達マトリックス形が得られる。伝達マトリックス法による具体的な計算方法は文献4)に詳細に述べられているのでここでは省略する。

なお数値計算に当って, 計算精度を向上させるため式(17)の無次元化を行なった。また式(17)のマトリックス内に M_x, M_y, φ, N, K なる未知量を含むため, 適切な初期値を仮定し, 与えた初期値に

対して第2近似が得られると M_x, M_y, N, φ は各分割要素内で2次放物線近似し、おじれ角 φ が必要とする精度に収束するまでくり返す、計算手法をとった。

4. 数値計算例および考察

曲がり梁の解析法として、おじれモーメントを受ける場合（偏心載荷）や比較的曲がり梁の曲率の大きい場合は応力問題として解析を行ない、一方曲がり梁の曲率の小さい、換言すれば大きな初期不整程度の曲率を有する場合は座屈解析（固有値問題としての座屈解析）を行なう場合が多い。

本研究では、部材内最大応力が降伏点応力に近傍の場合と、おじれ変形が大きい場合の荷重・変形挙動について検討を行なう。

a. 初期不整程度の曲率半径を有する曲がり梁の近似解

いま、両端に等曲げ M_0 のみを受ける両端単純支持曲がり梁を考え、その曲率半径が初期不整程度の場合の近似解を式(14)より求めると次の解を与える。

$$u_{L/2} = \frac{M_0 R}{M_0^2 R^2 + EI_y GK_T} \left\{ -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \frac{1}{\cosh \alpha_1 L/2} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \frac{1}{\cos \alpha_2 L/2} + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} - \frac{1}{8} \right\} \quad (18-a)$$

$$\varphi_{L/2} = \frac{M_0 R EI_y}{M_0^2 R^2 + EI_y GK_T} \left\{ \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \frac{1}{\cosh \alpha_1 L/2} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \frac{1}{\cos \alpha_2 L/2} - 1 \right\} \quad (18-b)$$

$$u_{L/2}'' = -\frac{M_0}{EI_y} \varphi_{L/2}, \quad \varphi_{L/2}'' = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_1^4 + \alpha_2^4} \frac{M_0 R EI_y}{M_0^2 R^2 + EI_y GK_T} \left\{ \frac{1}{\cosh \alpha_1 L/2} - \frac{1}{\cos \alpha_2 L/2} \right\} \quad (18-c, d)$$

$$v_{L/2}'' = \frac{EI_w}{EI_x R} \varphi_{L/2}'' - \frac{GK_T}{EI_x R} \varphi_{L/2} - \frac{M_0}{EI_x}, \quad \sigma = E \varepsilon_x = -E \left\{ u_{L/2}'' x + v_{L/2}'' y + \varphi_{L/2}'' \omega \right\} \quad (18-e, f)$$

$$\text{ここに } \lambda_1 = \left(\frac{GK_T}{EI_w} - \frac{1}{R^2} \right), \quad \lambda_2 = \left(\frac{M_0^2}{EI_y EI_w} + \frac{GK_T}{EI_w R^2} \right), \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{-\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{2}}$$

である。また外力モーメントの最大値は式(18-a)の $u_{L/2} \rightarrow \infty$ となる値、すなわち $\cos \alpha_2 L/2 = 0$ ($\alpha_2 L = \pi$) であり、これより $(M_0)_{cr}$ は次の式となる。

$$(M_0)_{cr} = \sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{\pi^2 R^2}\right) \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \left(GK_T + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2}\right)} \quad (19)$$

b. 数値計算例および考察

数値計算に用いた断面は $H-200 \times 100 \times 5.5 \times 8 \text{ mm}$ のH形断面であり、ヤング係数、ポアソン比、降伏点応力として $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ を用いた。

図-2は初期不整程度 ($1/1000$) の曲がり梁を有する単純梁に等曲げが作用する場合の近似強度曲線を示す。図中、実線は作用モーメント $(M_0)_{cr}$ (座屈モーメント) を、点線は部材内最大応力が降伏点応力になる場合を示し、縦軸は無次元化した応力 $\sigma/\sigma_y = M_0/\sigma_y w$ を、横軸は正規化した細長比 $\alpha = \sqrt{M_y/M_E}$ を示す。ここに M_y : 降伏モーメント, M_E : 等曲げを

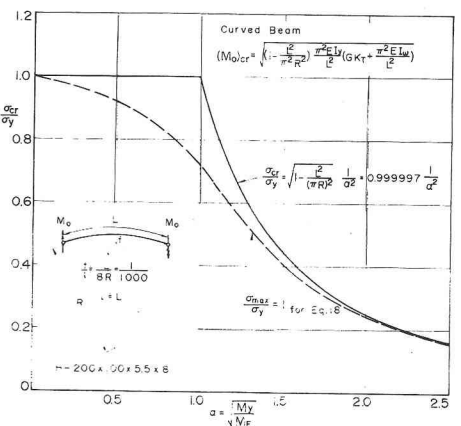


図-2 強度曲線

受ける単純直梁の弾性変曲モーメントを表わす。図より、普通に用いられる部材長さ ($\alpha=1.0$ 近傍) の場合、応力解析と変曲解析の差は比較的大きい。さらに断面内の初期応力分布による断面剛性の低下を加味すれば、強度曲線はさらに低下することが考えられる。

図-3 は無次元細長比 $\alpha=1.0$ なる場合の、各曲率半径に対する式(18)で求めた近似解と式(14)を伝達マトリックス法により求めた厳密解の比を示す。ただし、非線形解析のため基準の取り方によって異なるので、伝達マトリックス法による部材内最大応力が $\sigma_{max} = \bar{\sigma}_y$ になる値を基準とした。最大応力、おじれ角は比較的良好く一致し、水平変位 u と鉛直変位 v は曲率半径の減少と共に大きな差が表われる。これは近似解において変形の2次項(連成項)を無視したことによる。

図-4 は図-2 と同じ部材が等曲げを受ける場合の作用モーメントとスパン中央部変位との関係を示し、太線は伝達マトリックス法による解を、細線は近似解を示す。図中、実線は部材高さ d で無次元化した鉛直変位を、点線はおじれ角を、一点鎖線はフランジ幅 b で無次元化した水平変位を表わす。図より、作用モーメントが $0.7 M_y$ 程度まで、近似解と伝達マトリックス法による解は良く一致し、より大きな作用モーメントに対しては変形の2次項の影響により、近似解と伝達マトリックス法による解との差は大きくなる。

図-5 は図-4 と同じ場合の作用モーメントとスパン中央断面におけるフランジ4端の応力との関係を示す。各応力の番号は図中に示したH形断面の4端番号を表わす。図より、比較的大きな σ_3, σ_4 は伝達マトリックス法による解と近似解の差は小さいが、 σ_1, σ_2 は $0.8 M_y$ 以上のモーメントに対してその差は大きい。

図-6 および図-7 は等曲げを受ける曲がり梁の伝達マトリックス法による大変形解析を示し、前者は $L/8R = 1/500$ なる場合を、後者は $L/8R = 1/50$

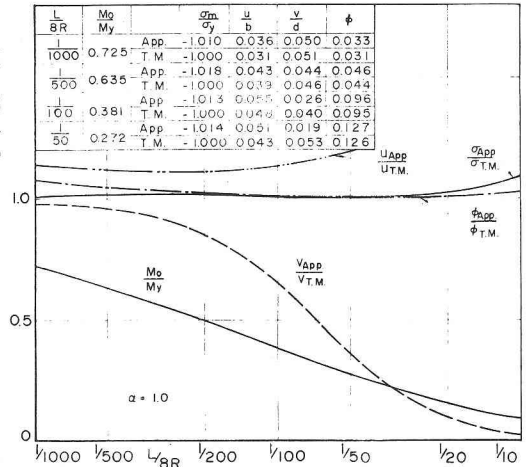


図-3 曲率半径と近似解の関係

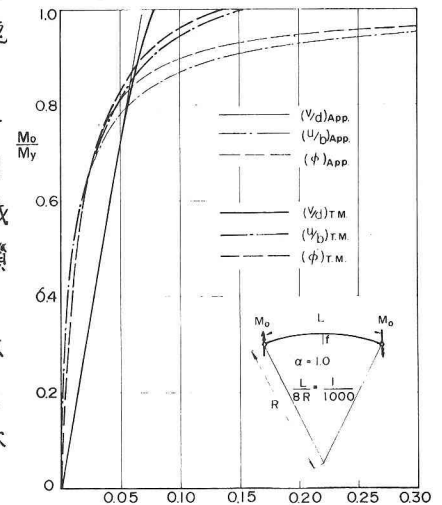


図-4 作用モーメントと変位の関係

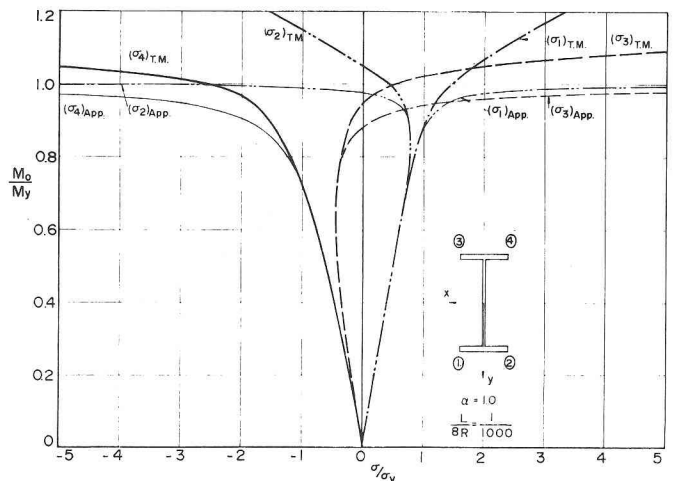


図-5 作用モーメントと4端応力の関係

なる場合を示す。図中、縦軸は無次元作用モーメントを、横軸は無次元化したスパン中央部の変形と $10\sigma_y$ で無次元化した中央断面の最大応力 σ_{max} を表わす。図より、曲がり梁の曲率半径の大きい場合近似解法で得られる座屈モーメントを境にして、荷重・変形挙動が大きく異なることがわかる。また曲率半径の小さい場合、小さい荷重段階から大きい変形が生じ、比較的小さい荷重に対しても大変形解析の必要性がある。

5. まとめ

部材軸方向に曲率一定な薄肉円断面曲がり梁を対象に、円筒座標系に関する有限変形のひずみ・変位関係式と、ひずみに関する変位場の仮定のみを用いて変位関数を導入した。次にこの変位関数と仮想仕事の原理を用いて2軸対称薄肉円断面曲がり梁の微分方程式と境界条件式を誘導した。構成方程式の誘導に当って、おじね角の三角関数をTaylor展開することなく導き、また上記の式を1階の常微分方程式系に変換し、ルンゲ・クッター法を用いた積分により格間伝達マトリックスを求める。このようにして得られる格間伝達マトリックスを用いた伝達マトリックス解析により、曲がり梁の荷重・変形挙動を求めた。

数値計算結果より、大きな変形が生じる場合も伝達マトリックス法を用いて容易に解析できた。実用的な応力範囲 ($10\sigma_{max} < \sigma_y$) では、近似解と大変形解析の差は小さかった。しかし曲率半径が比較的小さい場合、応力の差は小さくても荷重・変形挙動は大きく異なる。

なお、断面の初期応力分布を考慮した場合については、目下検討を進めている。

参考文献

- 1) 西野文雄, 倉方慶夫, 長谷川彰夫, 奥村敏恵, 「軸力と曲げおよびおじねを受ける薄肉円断面部材」, 土木学会論文報告集, No. 225, 1974年5月。
- 2) 薄木征三, 「変形を考慮した薄肉円断面円弧アーチの曲げおじね座屈」, 土木学会論文報告集, No. 263。
- 3) Saada, A. S.: Elasticity Theory and Application, Pergamon Press, 1974。
- 4) 遠田良喜, 「伝達マトリックス法による薄肉円断面曲線ばりの2次の応力問題の解析」, 土木学会論文報告集, No. 210, 1973年2月。

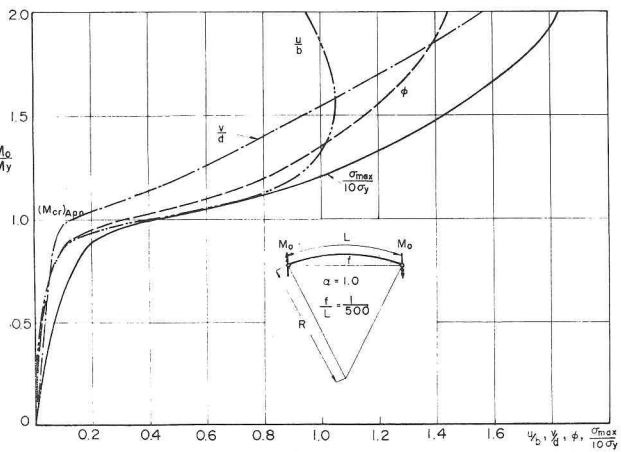


図-6 曲がり梁の大変形解析 ($L/8R = 1/500$)

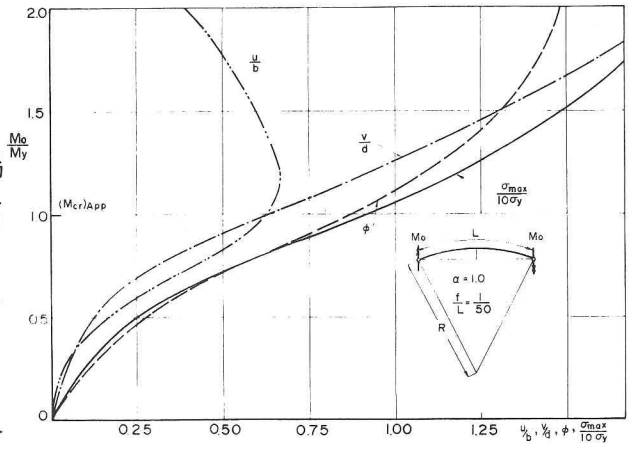


図-7 曲がり梁の大変形解析 ($L/8R = 1/50$)

Large Deflection Analysis of Curved Members with Thin-Walled Open Cross Section

Susumu Nishida*, Hiroshi Yoshida**, and Yuhshi Fukumoto***

The study of the finite displacement theory of curved members with thin-walled cross section has been quickly prospered by many investigators among whom are Konishi and Komatsu, Kuranishi, Enda, Nishino and Fukazawa, and Usuki in Japan. The governing differential equations were derived from the equilibrium equations through geometric consideration, or by using the variational method.

The purpose of this study is to derive a consistent one dimensional theory of the curved members subjected to the action of axial force, bending and torsional moments and to investigate the behavior of curved members under the large torsional deflection.

The following assumptions are used: (1) the length and the radius of curvature are considerably larger than the cross sectional dimensions; (2) the cross sections are not distorted; (3) the shear strain due to shear in equilibrium with the change of normal stress is small and can be neglected; and (4) the shear strain in the middle surface and in the planes normal to that of thin walls is small and can be neglected.

In view of the above assumptions, the three-dimensional expressions of strain-displacement relationships are reduced to one-dimensional expressions and the virtual work principle is used to derive all the equilibrium equations and associated boundary conditions.

The proposed equilibrium equations are solved by using the transfer matrix method without any approximation for the torsional angle. In other words, the bending moments about the strong and weak axes, the axial force and the torsional angle are approximated by parabola in the field matrix, but the trigonometrical functions of the torsional angle are not approximated. Simply supported beams are treated which are subjected to equal end moments M_0 applied about the strong axis for various L/R , where L denotes the length of curved beams, and R the radius of curvature. By using figures, the relationships of the end moment versus the displacements in the vertical and horizontal directions, the torsional angle and the normal stresses at the four flange tips of H-beam at the center of the span are shown.

Using this transfer matrix method, the force-displacement relationship can be pursued up to the range of the large torsional angle, but this method did not so differ from other method at the range in which the maximum normal stress is nearly equal to the yield stress.

Finally, this transfer matrix method can be extend to the case, for instance, members with abrupt changes in the cross section or parallel beams with cross beams commonly encountered in practical design of steel members.

* Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Kanazawa Institute of Technology.

** Associate Professor, Department of Civil Engineering, Kanazawa University.

*** Professor, Department of Civil Engineering, Nagoya University.