

8 ケーブル系の非線形動的応答における一挙動

東京大学 ○山口 宏樹, 宮田 利雄, 伊藤 孝

1. はじめに

送電線, 斜張橋, ガイタワー等のケーブルを単一部材, あるいは支持部材とする, いわゆるケーブル構造は重要な構造形式の一つであるが, 剛性が小さく, 変形しやすいことから, 本質的に幾何学的非線形性を有する独特な構造でもある。従って構造工学上からはその非線形挙動を十分に把握することが重要で, 特に動的分野の研究に未着手の問題点が多々認められる。実際, 既存の斜張橋, 送電線などにおいてケーブル自体が風の作用下で大きく振動し, その解決策を見出す必要があることが報告されている。また, 主構造を支えるケーブルの質量が大きくなれば, ケーブル固有の応答性が構造物全体の動的応答に影響を与え, いわゆる相互作用の問題を生ずるが, これらの問題点を考える上でケーブルの動的な非線形特性を把握しておくことが極めて重要なポイントになると考えられる。

著者らはケーブル系の動特性に関する研究^{1,2)}を行なってきたが, 模型実験においてケーブルの非線形動的挙動の一つと思われる, 興味深い現象が観察され, 理論的な考察を加えたのでここに報告する。これは, 単一ケーブルに, ケーブルを含む鉛直面内方向の周期外力が作用する場合, 外力振動数, 鉛直たわみ振幅によっては面外方向の横揺れ振動を生じ, ついには回転運動をするという現象がある。同様の現象がガイケーブルの振動実験においても存在することを Davenport³⁾らは報告している。また, 音響学の分野においては, 弦の場合の同様の現象を Murthy⁴⁾らが弦の非線形動特性として理論解析, ならびに実験から考察を加えている。

この現象はケーブルの面内変位, および面外変位に関する運動方程式がその幾何学的非線形項を介して連成するために生ずるものであり, 面外方向の運動のみに着目すれば一種の動的不安定現象と考えられる。そこで, ここではケーブルを連続体として扱う基礎方程式の厳密な定式化から始め, この非線形動的挙動を表し得る支配方程式を示して理論的な考察を加える。次に面外運動をパラメトリック励起振動として扱い, その動的不安定領域を求める。さらに弦を扱った Murthy⁴⁾の理論⁴⁾と, サグを有するケーブルに拡張して面内面外連成強制振動の定常解を求め, この現象の解釈を行なう。同時に, ケーブルの動特性を支配するパラメータの影響についても考察する。

2. 基礎方程式¹⁾

ここでの定式化においては, ケーブルは部材として, 完全可撓性, 非抗圧縮性, 伸張性⁵⁾の3つの性質を有するものと仮定する。

[2.1] ひずみの定義式

任意時刻におけるケーブルの伸びひずみ ϵ (無外力状態基準) は次式で定義される。

$$\epsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (1)$$

ここで s は任意時刻のケーブルに沿う曲線座標, s_0 は無外力状態におけるケーブルに沿う曲線座標で

ある。式(1)で S_0 の代りに初期状態(静的つり合い状態)でのケーブルに沿う曲線座標 S_e を考えれば、初期状態基準ひずみ ϵ^* が同様に定義される。さらに初期ひずみ ϵ_e を導入すれば、

$$\epsilon = \epsilon^*(1 + \epsilon_e) + \epsilon_e \quad (2)$$

また、Greenのひずみテンソル成分は次式で定義される。

$$e = \frac{ds^2 - dS_0^2}{2dS_0^2} = \frac{1}{2} \{ (1 + \epsilon)^2 - 1 \} \quad (3)$$

従って、微小ひずみを仮定すれば伸びひずみとひずみテンソル成分とは近似的に等しくなる。

[2.2] 構成方程式(断面力-ひずみ関係式)

完全弾性体を仮定し、次の構成方程式を用いる。

$$T = EA \epsilon \quad (\text{任意時刻のケーブル張力}) \quad (4)$$

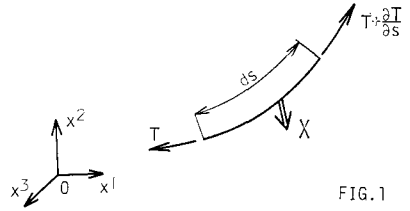


FIG. 1

ここで EA はケーブルの伸び剛性である。

[2.3] 運動方程式

空間固定デカルト座標 $\{X^1, X^2, X^3\}$ を考えれば、任意時刻のケーブル諸点の空間位置ベクトル X は s の時刻のケーブルに沿う曲線座標 S によつて確定される。Fig. 1 のようにケーブルの微小要素 (ds) を考え、力のつり合いを考えれば Euler 表示の運動方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial X^i}{\partial S} \right) + X^i = \rho \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

ここで X^i , ρ はそれぞれ、 S に沿う単位長さ当たりの外力成分、ケーブル質量である。

運動中のケーブル諸点の空間位置 $\{X^i\}$ は、埋込座標 S_0 と時刻 t の関数であることを考慮して式(5)を書き直せば、Lagrange 表示の運動方程式が求まる。

$$\frac{\partial}{\partial S_0} \left(\frac{T}{1 + \epsilon} \frac{\partial X^i}{\partial S_0} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} + (1 + \epsilon) X^i + X_e^i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

ここで ρ_0 は S_0 に沿う単位長さ当たりのケーブル質量、 X_e^i は初期状態に作用する静的外力成分である。

式(6)を静的つり合い位置 $\{X_e^i\}$ からの動的変位 $\{u^i\}$ に関する運動方程式に変換し、任意時刻のケーブル張力 T を初期張力 T_e と変動張力 ΔT とで表わして、静的つり合い式を考慮すれば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial S_0} \left\{ \frac{T_e + \Delta T}{1 + \epsilon} \left(\frac{dX_e^i}{dS_0} + \frac{\partial u^i}{\partial S_0} \right) - T_e \frac{dX_e^i}{dS_0} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + (1 + \epsilon) X^i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

さらに微小ひずみを仮定すれば、

$$\frac{\partial}{\partial S_0} \left\{ (\Delta T - \epsilon^* T_e) \frac{dX_e^i}{dS_0} + (T_e + \Delta T - \epsilon^* T_e) \frac{\partial u^i}{\partial S_0} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + (1 + \epsilon) X^i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

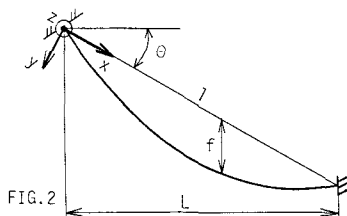
[2.4] ひずみ-変位関係式

微小ひずみの仮定のもとにひずみ-変位関係式を求めておく。

$$\epsilon^* \simeq e^* = \frac{dX_e^j}{dS_0} \frac{\partial u^j}{\partial S_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^j}{\partial S_0} \frac{\partial u^j}{\partial S_0} \right) \quad (j: \text{dummy index}) \quad (9)$$

3. 偏平ケーブルの支配方程式

土木構造物にみられるケーブル構造では、ケーブルのサブ
比 $\beta(=f/L)$ が1/10程度以下であることが多く、ここでも偏平
なケーブルに限ることにする(Fig. 2)。偏平を仮定すれば、振
動はケーブルの弦(支点間を結ぶ直線)と直交する方向にの
み起るものと考えられ、軸方向(X方向)の運動は無視でき
る。さらに $ds_0 \approx dx$ とでき、式(8)から偏平ケーブルの運動方程式が次のように求まる(Fig. 2参照)。



$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\Delta T - \epsilon^* T_e) \frac{dx}{ds_e} \right\} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\Delta T - \epsilon^* T_e) \frac{dy_e}{ds_e} + (T_e + \Delta T - \epsilon^* T_e) \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Y = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (T_e + \Delta T - \epsilon^* T_e) \frac{\partial w}{\partial s_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z = 0 \quad (12)$$

ただし、ケーブルは初期状態において自重のみが作用し、 x - y 平面内にある(初期形状: y_e)。外力とし
ては y, z 方向の分布外力 $Y(x, t)$, $Z(x, t)$ を考えている。また、ここで v, w はそれぞれ、 y 方向(鉛直
方向), z 方向(面外方向)の動的変位を表わしている。簡単のため傾斜角が 0 の場合を考えると、式(10)か
ら時間のみに依存する変動水平張力 $\Delta H(t)$ が決定される。さらに初期水平張力 $H_0 (= T_0 \frac{dx}{ds_e})$ が一定である
ことを考慮すれば、面内鉛直方向と面外方向の運動方程式が次のように求まる。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - H_e \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Delta H \frac{d^2 y_e}{dx^2} - Y = \Delta H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (13)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H_e \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Z = \Delta H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (14)$$

ここで右辺は運動方程式における幾何学的非線形項であって、変動張力の動的変形による成分である。
さらに式(10)から決まる変動水平張力を、式(9)のひずみ-変位関係を用いて変位表示すれば、

$$\Delta H = -\frac{EA}{\alpha} \int_0^L \frac{d^2 y_e}{dx^2} v dx + \frac{EA}{2\alpha} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad \text{ただし } \alpha = \int_0^L \left(\frac{ds_e}{dx} \right)^3 dx \quad (15)$$

ここで右辺、 $\frac{EA}{2\alpha}$ 積分項が、ひずみ-変位関係が非線形であることによる幾何学的非線形項である。
式(15)と式(13), (14)に代入すれば、変位のみを未知変数とした支配方程式が最終的に次のように求まる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{C_1^2}{\alpha} y_e'' \int_0^L y_e'' v dx \\ = -\frac{C_1^2}{\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_0^L y_e'' v dx + \frac{C_1^2}{2\alpha} y_e'' \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + \frac{C_1^2}{2\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + \frac{Y}{\rho_0} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{C_1^2}{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L y_e'' v dx + \frac{C_1^2}{2\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + \frac{Z}{\rho_0} \quad (17)$$

ここで $C_0 (= \sqrt{H_0/\rho_0})$, $C_1 (= \sqrt{EA/\rho_0})$ はそれぞれ、弦の横波、縦波の伝播速度、 α は x に関する二階
導微分を意味する。また——項はつり合い式の非線形性による幾何学的非線形項、---項はひずみ-
変位関係式での非線形性による幾何学的非線形項、~~~~項はそれぞれの非線形性の cross term である。
偏平ケーブルの支配方程式(16), (17)から、線形範囲内、つまり微小振動の範囲内では面内鉛直振動と
面外振動とは完全に分離され、幾何学的非線形性を考慮して初めてそれらが連成することがわかる。

物理的には、運動方程式(13)、(14)からわかるように、ケーブルの変動張力を介して連成することになる。

4. 鉛直方向周期外力による偏平ケーブルの非線形挙動

外力として振動数 ω_f の鉛直方向周期外力のみを考え、それを鉛直線形振動の基準関数で展開する。

$$\frac{Y}{\rho_0} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{Yi} \eta_i(x) \cos \omega_f t \quad (18)$$

ここで f_{Yi} は一般化外力振幅、 $\eta_i(x)$ は面内鉛直振動の基準関数で、直交関数系をなす。

[4.1] 面外パラメトリック共振振動

鉛直方向に n 次のモードで振動するような強制振動を考え、面外振動がないものとする。定常解は

$$V(X, t) = a_{yn} \eta_n(x) \cos \omega_f t \quad (19)$$

と表わされる。ここで a_{yn} は一般化変位振幅で、1自由度数の振動理論から、外力振動数 ω_f の関数で表わされる。式(19)を面外方向の運動方程式(17)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = & - \frac{c_1^2}{\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \int_0^l \eta_n^2 dx a_{yn} \cos \omega_f t \\ & + \frac{c_1^2}{2\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \int_0^l \eta_n^2 dx a_{yn}^2 \cos^2 \omega_f t + \frac{c_1^2}{2\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \int_0^l \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \quad (20) \end{aligned}$$

この解を面外線形振動の基準関数 $\zeta_i(x)$ で展開する。

$$W(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) \zeta_i(x) \quad (21)$$

ここで g_i は一般化変位である。式(20)で面外変位 W のみに関する非線形項(右辺第3項)は無視するとして式(21)を代入し、Galerkin法を適用すれば、各一般化変位 g_j について次のようなHill方程式が得られる。

$$\ddot{g}_j + \omega_{zj}^2 \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \cos(\omega_f t) \right) g_j = 0 \quad j=1, 2, \dots \quad (22)$$

ここで μ_0, μ_1, μ_2 はサグ比 s 、伝播速度比 $k (=c_1/c_0)$ 、無次元外力振幅 $\eta_n (=f_{Yn}/a_{yn})$ 、および鉛直方向変位応答倍率 $\delta_{yn} (=a_{yn}/a_{y0}, a_{y0} = \eta_n l)$ で表わされる無次元パラメータであり、 t は時間 t に関する2階微分である。このように面外運動はパラメトリック共振振動を表わす方程式(22)により支配されることが導かれる。

Hill方程式(22)の発散解の領域、つまり動的不安定領域は周期 $T (=2\pi/\omega_f)$ (外力周期)、または周期 $2T$ をもつ周期解により区分され、周期の等しい2つの解は不安定領域を区分するから、各周期解と無限Fourier級数に展開して式(22)に代入すれば、Fourier係数 A_k, b_k に関する各次代数方程式が次の形で求まる(詳細はBolotin⁵⁾を参照)。ただし、以後は $j=n$ に限り、面外運動も n 次のものを考えることにする。

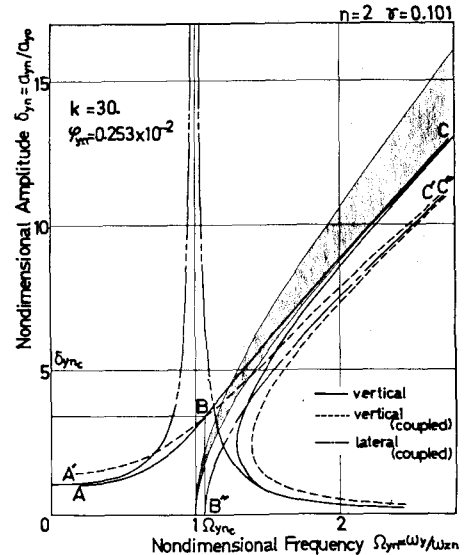


FIG.3 Regions of Dynamic Instability and Response Curves (n=2)

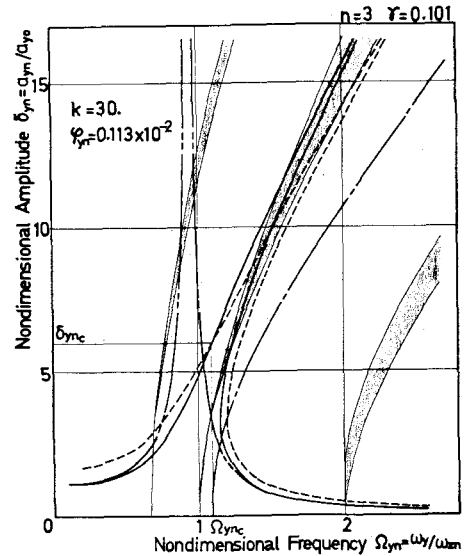


FIG.4 Regions of Dynamic Instability and Response Curves (n=3)

$$[[A]-\Omega_{yn}^2[B]]\{a\}=\{0\}, [[C]-\Omega_{yn}^2[D]]\{b\}=\{0\} \quad (23a,b)$$

ここで $[A], [C]$ は M_0, M_1, M_2 で表わされる無限次元マトリクス, $[B], [D]$ は無限次元の定数マトリクスであり, Ω_{yn} は無次元の外力振動数 $(=\omega_y/\omega_{yn})$ である。従って式(23a,b)を有限項で打ち切り, 鉛直振幅 δy_n を与えて M_0, M_1, M_2 を確定すれば, 固有値として Ω_{yn} が数値的に得られ, δy_n - Ω_{yn} 平面での面外振動不安定領域が求められる。Fig.3, Fig.4 にその例を示す。 $\Omega_{yn}=2$ から広がる領域が主不安定領域, $\Omega_{yn}=1$ が才2不安定領域, $\Omega_{yn}=3/2$ が才3不安定領域である。才4不安定領域以降は Ω_{yn} のさらに小さな値から広がる領域であるが, 小さな領域となるので図には示していない。

このような不安定領域の全領域が実際に生起可能なわけではない。つまり, 鉛直振幅 δy_n は外力振動数 Ω_{yn} によって決まる応答曲線によって表われ, それ以上には大きくなれないのである。Fig.3, Fig.4 で実線が鉛直方向の強制振動応答曲線であり, 従って可能な不安定領域はその下の領域に限られる。

さらに厳密に言えば, ある Ω_{yn} で δy_n が不安定領域に達した場合にどう向きの振動が生ずるのであるが, それ以後の鉛直方向の応答は面外運動をも考慮した連成支配方程式により決定されねばならず, 従って不安定領域もその応答曲線によって限定される。

[4.2] 面内面外連成強制振動

やはり n 次モードで振動するような強制振動を考え, 解を1自由度で仮定する。それに對する一般化変位については外力周期 T と同じ周期を有するとして Fourier 級数に展開可能であるが, 非線形性が小さいとすれば主調和成分のみを考えれば十分である。また, 面内, 面外方向の応答では一般に位相差を生ずるが, ここでは回転運動のみに着目して $\pi/2$ とする。従って解を次のように表わす。

$$v(x,t)=a_{yn}\zeta_n(x)\cos\omega_y t, \quad w(x,t)=b_{zn}\zeta_n(x)\sin\omega_y t \quad (24a,b)$$

式(24a,b)を, 式(18)の外力を考慮した連成運動方程式(16),(17)に代入し, Galerkin法, ならびに調和バランス原理を用いれば, 面内, 面外方向の無次元応答振幅 $\delta y_n, \delta z_n (=b_{zn}/a_{yn})$ に関する非線形代数方程式が次のように求まる。

$$(I_{23}^*R^*+gk^2I_1^*\frac{R^*}{I_3^*}-\Omega_{yn}^2)\delta y_n+\frac{3}{8}gk^2I_2^*I_{23}^*R^*\varphi_{yn}^2\delta y_n^3+\frac{1}{8}gk^2I_2^*R^*\varphi_{yn}^2\delta y_n\delta z_n^2=1 \quad (25)$$

$$1-\Omega_{yn}^2+\frac{1}{8}gk^2I_2^*\varphi_{yn}^2\delta y_n^2+\frac{3}{8}gk^2I_3^*\varphi_{yn}^2\delta z_n^2=0 \quad (26)$$

ここで $I_1, I_2^*, I_3^*, I_{23}^*, R^*, g$ は振動次数 n , およびサグ比で表わされる無次元パラメータである。式(25),(26)から δz_n を消去すれば, 連成を考慮した鉛直方向の応答関数が次のように得られる。

$$\{2I_{23}^*R^*+3gk^2I_1^*\frac{R^*}{I_3^*}-(3-I_{23}^*R^*)\Omega_{yn}^2\}\delta y_n+gk^2I_2^*I_{23}^*R^*\varphi_{yn}^2\delta y_n^3=3 \quad (27)$$

また, 式(25),(26)から Ω_{yn} を消去し, δz_n について解けば,

$$\delta z_n^2=\frac{I_{23}^*(3I_{23}^*R^*-1)}{3-I_{23}^*R^*}\delta y_n^2-\frac{8}{gk^2\varphi_{yn}^2I_3^*(3-I_{23}^*R^*)}\delta y_n+\frac{8(I_{23}^*R^*+gk^2I_1^*\frac{R^*}{I_3^*}-1)}{gk^2\varphi_{yn}^2I_3^*(3-I_{23}^*R^*)} \quad (28)$$

従って, 面外方向の振動が可能な場合は式(28)の右辺が正值をとるときのみであって, その限界の鉛直振幅 δy_{nc} は次式で与えられる。

$$\frac{I_{23}^*(3I_{33}^*R^*-1)}{3-I_{33}^*R^*}\delta y_{nc} + \frac{8(I_{23}^*R^*+gk^2\gamma_1^2\frac{R^*}{I_3^*}-1)}{gk^2\gamma_1^2 I_3^*(3-I_{33}^*R^*)}\delta y_{nc} - \frac{8}{gk^2\gamma_1^2 I_3^*(3-I_{33}^*R^*)} = 0 \quad (29)$$

このときの対応する振動数 Ω_{ync} は、式(28)から次のように得られる。

$$\Omega_{ync}^2 = 1 + \frac{1}{8}gk^2 I_2^* \gamma_1^2 \delta y_{nc}^2 \quad (30)$$

Fig.3, Fig.4に連成振動の応答曲線を示した。破線が鉛直方向、一点鎖線が面外方向の応答曲線である。Fig.3で鉛直方向の応答曲線に着目すれば、面外運動を考慮したもの(破線)と無視したもの(実線)とが点B($\Omega_{ync}, \delta y_{nc}$)で交わっている。つまり、この点と境に応答は不連続となるのであって、面外方向の応答B'C'が存在する範囲ではBCで表わされ、面外運動が存在しない範囲($\Omega_{yn} \leq \Omega_{ync}$)ではABで表わされる。

5. 考察

以上の理論展開より得られたFig.3, Fig.4から、面内鉛直方向に周期外力が作用する場合の面外の回転運動という非線形挙動を解釈すると、まず不安定領域内にあって、しかも面外定常振幅が存在するような範囲の外力振動数 $\Omega_{yn} (> \Omega_{ync})$ をもつ周期外力が、静止状態のケーブルに鉛直に作用すると、鉛直振幅は増大して行き、パラメトリック励起振動を生む不安定領域に入る。ここで、面外方向の振動が生じ、面内、面外の振動が共に発達して、回転運動を表わす応答曲線(図の破線、および一点鎖線)に達し、定常な回転運動が継続されるということになる。

また、Davenportらの報告³⁾では「やはり3次振動において、振幅がある程度以上になると面内の振動数の1/2の振動数をもつ面外振動が生じた」とある。これはパラメトリック励起振動での主不安定領域における現象に相当する。Fig.3, Fig.4はそれぞれ2次、3次振動に対応するものであるが、2次振動(Fig.3)では、主不安定領域をはじめ、奇数次の不安定領域は存在しない。このことは偶数次の振動の場合すべてについて理論的に言え、Davenportらの報告をうまく説明することになる。これはケーブルの固有振動が、偶数次では弦のそれと全く同じであるのに対し、奇数次ではケーブル固有の振動となることによるものである。逆に言えば、弦においては主不安定領域での現象が存在せず、この現象はサグを有するケーブルに固有の非線形現象と考えられる。もっとも、この現象の起り得る可能性はサグ比に依存するのであって、実際、サグ比を小さくして行くと、偶数次振動ではFig.3($\delta=0.1$)とほぼ同じ図が得られるのに対し、奇数次振動では主不安定領域等の領域が減少して行き、偶数次振動の図に近づく。しかし、その近づき方は線形ではない。サグ比 $\delta=0.05$ の場合をFig.5に示すが、 $\delta=0.1$ であるFig.4の主不安定領域よりも逆に増大しており、外力の1/2の振動数で面外振動が発生するという現象が起り得る可能性が大きい。これは、3次の固有振動がサグ比0.05近くで大きく変化することによるものと思われる。

次に、不安定領域に及ぼす減衰の効果について考える。減衰を考慮した場合には、Fig.6に示すように鉛直振幅 δy_{nc} の小さな

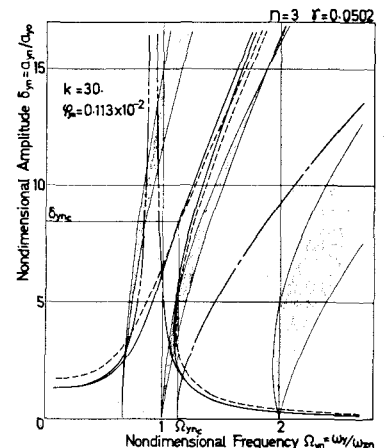


FIG.5 Regions of Dynamic Instability and Response Curves ($r=0.05$)

値の範囲に対して不安定領域が存在しなくなる。不安定領域の存在する鉛直振幅の下限 δy_n^* は減衰定数 h に依存し、しかも各不安定領域で異なる⁵⁾。 h を横軸に δy_n^* の変化をみたものが Fig. 72。減衰がかなり小さくとも δy_n^* は大きくなっている。従って、減衰を無視した場合に理論的にはどんな小さな振幅 δy_n に対しても不安定振動が可能であるが、実際には少なからず減衰があるわけで、ある振幅 δy_n^* 以上にならない限り、不安定現象が起らないことがわかる。

最後に無次元化外力振幅 φ_{yn} について考察する。式(30)で $\delta y_n' = \varphi_{yn} \delta y_n = a_{yn}/l$ とすれば、つまり支気間距離 l で無次元化した各答振幅を用いれば、式(30)は外力振幅 φ_{yn} によらず一意に決まる。

$$\Omega_{yn}^2 = 1 + \frac{1}{8} g R^2 I_z^* \delta y_n'^2 \quad (31)$$

これを $\delta y_n' - \Omega_{yn}$ 平面で図示すれば Fig. 8 のようになり、面外回転振動の存在範囲が外力によらず決定されることになる。また、回転振動のもう一つの存在限界は下向きの jump が生ずる場合であって、これは減衰を一定とすれば $\varphi_{yn} = 0$ の場合に相当し、式(27)より次のように求まる。

$$\Omega_{yn_i}^2 = \frac{2 I_z^* k^* + 3 g R^2 I_z^* \frac{k^*}{l^2} + g R^2 I_z^* k^* \delta y_n'^2 - 3}{3 - I_z^* k^*} \delta y_n_i \quad (32)$$

以上から連成強制振動の定常解は外力によらず Fig. 8 で示される範囲に限定されることがわかる。

6. あとがき

単一ケーブルの厳密な基礎方程式の定式化から始めて、支気間方程式における幾何学的非線形項につき考察し、非線形動的応答の興味ある一挙動、面外パラメトリック初起振動、また、面内面外の連成振動の定常解について理論解析を行ない、考察を加えた。本研究により現象の少なからぬ定性的把握はできたものと思われる。今後、ケーブル系の非線形動特性についてさらに研究を進めたい。

[参考文献]

- 1) 山口；ケーブル系系の動特性における相互作用(東大修士論文)，1977
- 2) Miyata, Yamaguchi, Ito ; A Study on Dynamics of Cable-Stayed Structures , An.Rept.En.Re.Inst.Fac.Eng., Univ.Tokyo
- 3) Davenport, Steels ; Dynamic Behavior of Massive Guy Cables , ASCE, ST2, 1965
- 4) Murthy, Ramakrishna ; Nonlinear Character of Resonance in Stretched Strings , JASA, 1964
- 5) Bolotin ; The Dynamic Stability of Elastic Systems, (訳: 3074)

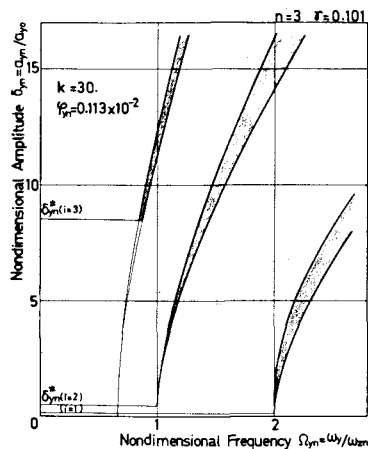


FIG.6 The Influence of Damping on Unstable Regions ($h=0.001$)
 $\gamma=0.1013$

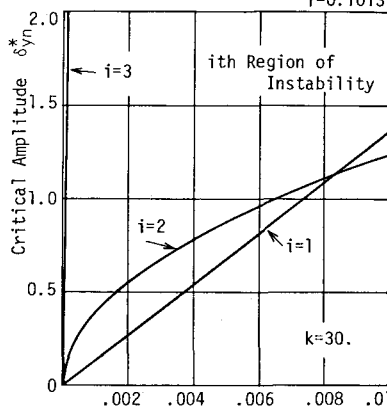


FIG.7 Critical Amp. VS. Damping Const.

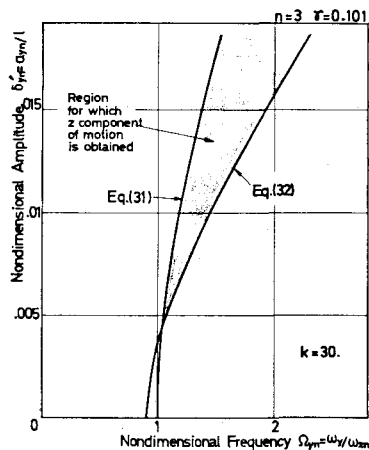


FIG.8 Region for Tubular Motion of the Cable ($r=0.1$)

A Dynamic Unstable Behavior in Nonlinear Responses of Cable Systems

by Hiroki YAMAGUCHI*, Toshio MIYATA** and Manabu ITO***

It has been experienced the fact that a suspended cable vibrated in lateral, out-of-plane direction as well when it made a vertical motion excited by a periodic loading in vertical, in-plane direction. This is one of dynamic nonlinear behaviors of a suspended cable, mathematically caused by geometrically nonlinear coupling terms in governing equations of in-plane and out-of-plane motions. In this paper, starting with the derivation of nonlinear basic equations to describe the dynamic three dimensional motion, the occurrence of the above-mentioned out-of-plane motion is analysed from a viewpoint of dynamic instability of a parametric oscillation. It is also analysed as an in-plane and out-of-plane coupled forced oscillation. As a result, a theoretical interpretation of the phenomenon can be done at least qualitatively. The content of this paper and some explanation are as follows:

1. Introduction
2. Basic equations of three dimensional motion;
 - 2.1: Definition of strain
 - 2.2: Constitutive equation
 - 2.3: Equation of motion
 - 2.4: Strain displacement relation
3. Equations to govern the vertical and lateral coupled motion (v, w) of suspended cables with small sag (Eqs.10, 11 and 12 for θ , and Eqs.16 and 17 for $\theta = 0$)
4. Nonlinear response due to vertical, in-plane loading;
 - 4.1: Derivation of Hill type equation (Eq.22) to describe the out-of-plane parametric oscillation and determination of unstable region (Figs.3 and 4)
 - 4.2: In-plane and out-of-plane coupled forced oscillation (Eqs.27 and 28, Figs.3 and 4)
5. Considerations of the occurrence of dynamic unstable behavior, the effect of span-sag ratio γ (Figs.3, 4 and 5) and damping constant h (Figs.6 and 7), and the existence range (Eqs.31 and 32) of stationary coupled oscillations (Fig. 8)
6. Concluding remarks

* Graduate Student, Fac. of Engineering, the University of Tokyo.

** Assoc. Professor, ditto.

*** Professor, ditto.