

2 周期外力による弾性体の動的安定問題の厳密な扱いについて

東京大学生産技術研究所 皆 川 洋 一

§1. 序 周期外力を受ける弾性体の動的安定問題はパラメータ共振とも呼ばれ、従来周期係数を有する運動方程式(Mathieu-Hill式)で支配される問題として定式化されて来た。縦方向外力を受けるrodの曲げ変形、面内方向外力を受ける板の曲げ変形、対称モードの外力を受けるアーチ、リング、及び偏平シールの非対称変形、軸対称外力を受ける回転シールの非軸対称変形¹⁾、この問題の代表的なモデルである。しかしながら、歪の2次項までの有限変形を考慮してこれらの弾性体を支配する運動方程式を誘導すると、Mathieu-Hill式へ導かれるのではなく、不安定前の変形(初期変形)(rodの縦変形、板の面内変形、アーチ、リング、及び偏平シールの対称変形、回転シールの軸対称変形)と不安定後の変形(rodの曲げ変形、板の面外変形、アーチ、リング、及び偏平シールの非対称変形、回転シールの軸対称変形)とが非線形項で連成し、強制外力項を持つ非線形運動方程式が導かれる。これをMathieu-Hill式で支配されるとして従来の扱いでは、この非線形運動方程式の不安定前の変形と不安定後の変形の間に変数分離を仮定し、不安定前の変形は線形項のみで近似的に解析し、この解のもとで不安定後の変形が安定であるか否かを検討する扱いに対応している。この仮定を導入せず、不安定前の変形と不安定後の変形が⁽¹⁾連成した非線形運動方程式を直接解析した結果と従来の定式化に基づく結果との間に差違が認められることが皆川によつて示されている。本報は周期外力を受ける弾性体を支配する2自由度系の非線形運動方程式を解析し、厳密な扱いをして得た結果と従来の定式化を応用して得た結果との間に生ずる差違を比較検討する。

一才、非線形振動を解析する際一般に非線形代数方程式をNewton-Raphson法等の収斂計算法を利用して解析しなければならない。しかし、ある種の非線形運動方程式は収斂計算を行わず代数変算だけで非線形振動を解析すること²⁾ができる。この方法を示し、前記の2自由度系非線形運動方程式へ応用して、不安定前変形の自由振動解、強制振動解、及び動的安定問題における初期変形(不安定前の変形)の非線形応答を考慮した不安定領域での決定に利用できることを示す。

§2. 周期外力を受ける偏平構造物を支配する運動方程式 (1-a)式において非線形項を無視し、線形項のみで x_1 を解析すると、次式を得る。

$$(\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_2^2 + 2\alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3 = f_1 \cos \omega t \quad (1-a)$$

$$(\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + 2\alpha_2 x_1^2 x_2 + \alpha_5 x_2^3 = 0 \quad (1-b)$$

$$x_1^* = \frac{f_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (2)$$

歪の2次項までの有限変形を考慮して、rodにおける縦変形モード(x_1)と曲げ変形モード(x_2)、板における面内変形モード(x_2)と曲げ(面外)変形モード、アーチ、リング、偏平シールの対称変形モード(x_1)と非対称変形モード(x_2)、回転シールにおける周方向展開次数 $n=0$ の変形(軸対称変形)モード(x_1)と $n=m(m \neq 0)$ の変形(非軸対称変形)モード(x_2)を1個ずつ採用し、(x_1)の変形モードを持つ強制外力を作用させると(1)式で表わされる非線形運動方程式が導かれる。¹⁾

(1-b)式において、非線形項の係数 $\alpha_2=0$ を仮定した式へ(2)式を代入して次式を得る。

$$\ddot{x}_2 + (\omega_2^2 + 2\alpha_1 \frac{f_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos \omega t) x_2 + \alpha_5 x_2^3 = 0 \quad (3)$$

$\alpha_2=0$ を仮定した理由、従来の扱いでは初期変形(x_1)の2次のオーダの項を無視しているからである。

歪の2次項までの有限変形を考慮した時、(1)式で支配される系を近似的に(3)式で支配されるとして扱い、従来の「周期外力による動的安定問題」であった。この問題を扱、多くの研究では(3)式において $\omega^2=0$ とした式を基礎式としている。この場合

(1)式で表わされる系を扱う従来の定式化について検討する。

112 $\omega^2=0$ とした式を基礎式としている。この場合

初期変形 (x_1) は非線形項ばかりではなく、慣性項も無視したことになる。(3)式に対応する基礎式を使用した場合、初期変形の線形応答を考慮していることになる。⁽⁵⁾⁽⁶⁾

§3. 解の仮定と解の安定性

ここでは(1)式へ調和バランス法を適用して解析する。規準座標 x_1 及び x_2 を次式で仮定する。⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

$$\begin{cases} x_1 = \frac{C_{10}}{Z} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \cos n\omega t \\ x_2 = \frac{C_{20}}{Z} + \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_{2l} \cos \frac{l}{2} \omega t + S_{2l} \sin \frac{l}{2} \omega t \} \end{cases} \quad (4)$$

(4)式を(1)式へ代入して調和バランス法を適用すると次式で表わされる非線形代数方程式を得る。

$$G(\omega, C) = 0, \text{ここに } C = \{C_{10}, C_{11}, \dots, C_{20}, \dots\}^T \quad (5)$$

(5)式を解析して得た解を $X_0 = \{x_1^0, x_2^0\}$ と表わす。

次に、得られた周期解 X_0 の安定性を検討する。

周期解 X_0 のもとで導かれる(1)式の変分式を次式で表わす。

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j + \sum_{k=1}^{\infty} H_{jk}(X_0) \xi_k = 0 \quad (j=1, 2) \quad (6)$$

ここに、 $X_0 = \{x_1^0, x_2^0\}$, $x_j^0(t) = x_j^0(t+T)$, $(j=1, 2)$

$\xi_j = \delta x_j$; x_j の変分

$H_{jk}(X_0)$: 周期関数

Froquetの定理により、実の周期係数を持つ(6)式の解に、次式の形を持つものが存在する。

$$\xi_j = e^{\mu t} \phi_j(t) \quad (j=1, 2) \quad (7)$$

$$\phi_j(t) = \frac{\tilde{C}_{j0}}{Z} + \sum_{l=1}^{\infty} \{ \tilde{C}_{jl} \cos \frac{l}{2} \omega t + \tilde{S}_{jl} \sin \frac{l}{2} \omega t \} \quad (8)$$

(7)式及び(8)式を(6)式へ代入し、同一の波数を持つ係数を0と置いて、次式を得る。

$$[\mu^2 \mathbb{I} + \mu \overline{C} + \overline{K}] \mathbb{I} \phi = 0 \quad (9)$$

ここに、 $\mathbb{I} \phi = \{\tilde{C}_{10}, \dots\}^T$ 。

同次形の線形代数方程式がnontrivialな解を持つためには、次式が成立しなければならない。

$$\det[\mu^2 \mathbb{I} + \mu \overline{C} + \overline{K}] = 0 \quad (10)$$

(10)式で表わされる固有値問題において、すべて固有値(特性指数)の実部が正にならないよう、変分式は安定であり、周期解 X_0 も安定であると考える。

一方、正の実部を持つ固有値が1個でも出現すれば、周期解 X_0 は不安定と考えられる。

§4. 数値解析⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

(1)式で支配される系のモデルとして、Sine形状をした偏平アーチを採用する。このアーチの非線形項の係数の陽に求められている。偏平アーチの対称および反対称変形モード (x_1) 、逆対称変形モード (x_2) とあるが(1)式の各係数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \omega^2 = 1 + H^2/2, \alpha_1 = -H, \alpha_2 = 1/2, \omega_2^2 = 16 \\ \alpha_3 = -3H/4, \alpha_4 = 1/4, \alpha_5 = 4, H: \text{無次元化ライズ} \end{cases} \quad (11)$$

(1)式及び(11)式で支配される偏平アーチにおいて、無次元化ライズ $H=3$ 及び 10 を有する2つのモデルの数値解析を行う。

4-1 無次元化ライズ $H=3$ の偏平アーチ

無次元化ライズ $H=3$ の偏平アーチを静的に解析した場合の荷重-変位

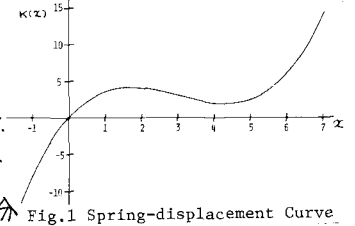
曲線を図1に示す。静的に解析した時、 $H=3$ の偏平アーチにおいて逆対称変形は分岐して来ない。すなわち、 x_2 は恒等的に0となる。

次に、非線形運動方程式((1)式)において、 $f_1=6.0$ としたモデルを解析する。解の仮定は(4)式から次式の級数を採用する。

$$\begin{cases} x_1 = C_{10}/Z + C_{11} \cos \omega t \\ x_2 = C_{20}/Z + C_{21} \cos \frac{1}{2} \omega t + S_{21} \sin \frac{1}{2} \omega t \end{cases} \quad (12-a)$$

$$+ C_{21} \cos \omega t + S_{21} \sin \omega t \quad (12-b)$$

(1)式において規準座標 x_2 はtrivialな解を持つ。この時の規準座標 x_1 の共振曲線(基本1/2に対応する共振曲線と呼ぶ)から、規準座標 x_2 がnontrivialな解を持つ共振曲線(分岐1/2に対応する共振曲線)が分岐してくる。分岐1/2に対応する共振曲線を図2及び図3に示す。破線は基本1/2に対応する共振曲線である。図2において、基本1/2に対応する共振曲線上に2つの分岐点 P_1 及び P_2 が存在し、これらの分岐点からそれぞれ振動成分 C_{21} 及び S_{21} が分岐す



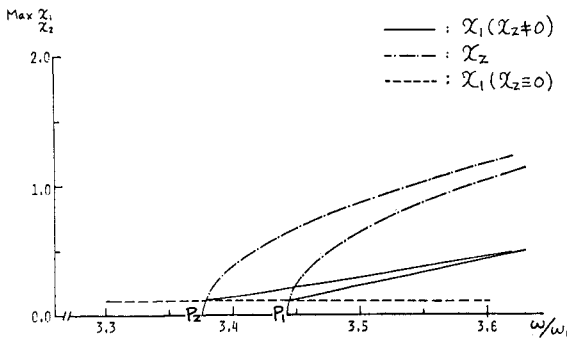


Fig. 2 Resonance Curve (H = 3)

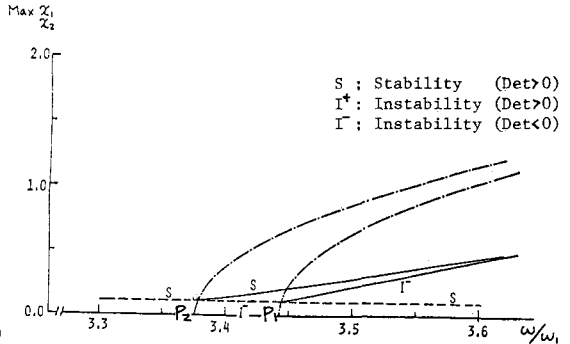


Fig. 4 Stability of Periodic Solution

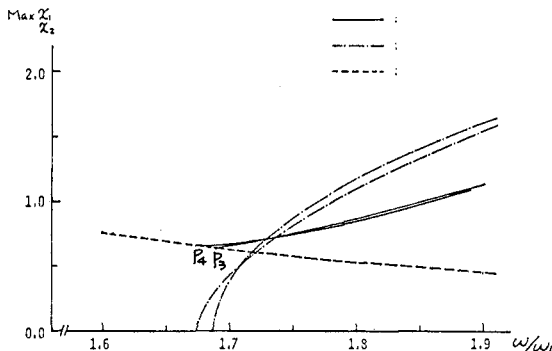


Fig. 3 Resonance Curve (H = 3)

る。点 P_1 及び P_2 は規準座標 X_2 の動的不安定領域の境界に対応し、点 P_1 と P_2 とで挟まれた領域が主不安定領域である。また、図 3 の基本 1/2 に対応する共振曲線上の点 P_3 及び P_4 も分岐点である。点 P_3 から S_{21} が分岐し、点 P_4 から C_{20} と C_{21} が分岐する。点 P_3 と P_4 とで挟まれた領域が X_2 の 2 次不安定領域である。

次に、図 2 で示した主不安定領域の解の安定性を検討する。(8) 式に対応して、 ϕ_j ($j=1, 2$) を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \tilde{C}_{10}/2 + \tilde{C}_{11} \cos \omega t + \tilde{S}_{11} \sin \omega t \\ \phi_2 &= \tilde{C}_{20}/2 + \tilde{C}_{2\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \omega t + \tilde{S}_{2\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \omega t + \tilde{C}_{21} \cos \omega t + \tilde{S}_{21} \sin \omega t \end{aligned} \quad (13)$$

(1) 式及び (13) 式を (6) 式へ代入して得られる固有値問題を解析した結果を図 4 に示す。図中の記号 S は正の実部を有する固有値 (特性指数) が存在せず安定、 I^+ , I^- は正の実部を有する固有値が出現して不安定であることを意味する。右肩の $+$, $-$ は (10) 式における $\det [K]$ の

正負を表す。

4-2 無次元化ライズ $H=10$ の偏平アーチ

次に無次元化ライズ $H=10$ の偏平アーチを解析する。

このモデルを静的に解析した場合の荷重-変位曲線を図 5 に示す。この系は静的解析において、分岐座屈を起す。

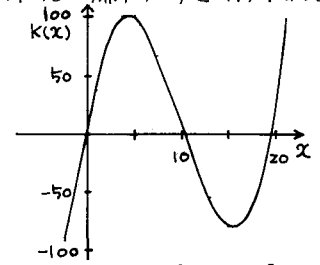


Fig. 5 Spring-Displacement Curve

(1) 式において、外力振幅 $f_1=30.0$ としたモデルの共振曲線を解析する。

解の仮定は (12) 式と同一の Fourier 級数を採用する。規準座標 X_2 が trivial な解を取る基本 1/2 に対応する共振曲線の一部を図 6 に示す。

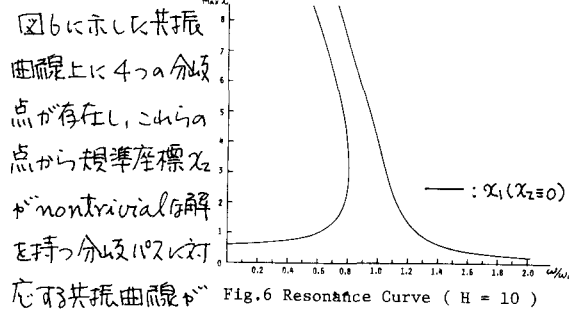
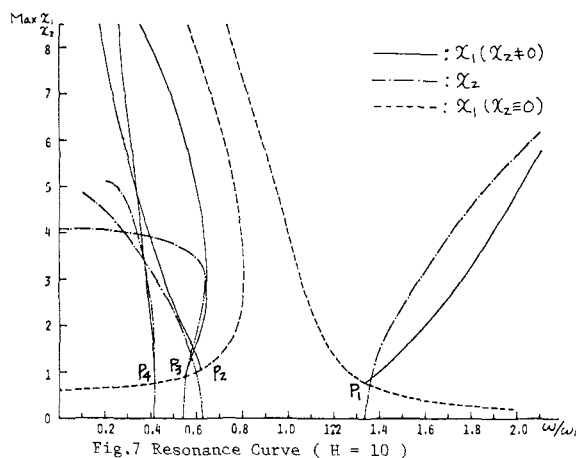


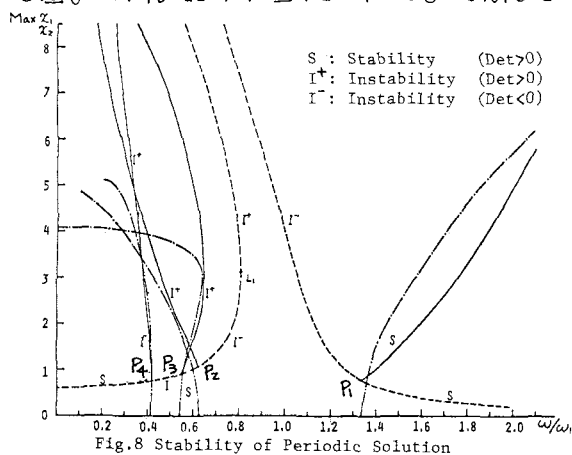
Fig. 6 Resonance Curve (H = 10)

分岐する。この場合の共振曲線を図 7 に示す。

図 7 の破線は図 6 に示した基本 1/2 に対応する共振曲線である。点 P_1 ($\omega/\omega_1 \approx 1.34$) 及び点 P_2 ($\omega/\omega_1 \approx 6.3$) から $C_{2\frac{1}{2}}$ が分岐する。点 P_3 ($\omega/\omega_1 \approx 0.55$) から S_{21} が分岐し、点 P_4 ($\omega/\omega_1 \approx 0.42$) から C_{20} と C_{21} が



分岐する。次に図7に示した共振曲線の安定性を検討する。変分式の解は $H=3$ の偏平P-子と同様に、(13)式で仮定する。(7)式及び(13)式を(6)式の変分式へ代入して得られる固有値問題を解析した結果を図8に示す。記号は図4で用いたものと同じで



ある。基本10スに対応する共振曲線は点 P_4 及び P_3 で挟まれた領域、点 P_2 及び P_1 で挟まれた領域で不安定である。その他の領域で安定である。

分岐点から分岐する図8に示した共振曲線のうち、点 P_1 から分岐する共振曲線は安定であり、点 P_2 、 P_3 及び P_4 から分岐する共振曲線は不安定である。このため、点 P_4 及び P_3 、点 P_2 及び P_1 で挟まれた不安定領域での系の定常解の振幅は、図7及び図8のスケールを越える大振幅となることを予期される。大振幅を持つこれらの周期解も同様な手法で解析することができる。

§5 既往の定式化による結果との比較検討
歪の2次項まで有限変形を考慮すると(1)式で支配される系は、従来多くの場合(3)式で支配されるものとして扱われてきた。ここでは、従来の扱いについて簡単に整理すると共に、結果を求め、前節で解析した厳密な扱いによる結果と比較検討する。

5-1 近似法1

(3)式を Bolotin¹⁾ が扱っている Mathieu-Hill 式の標準型へ変換して次式を得る。

$$\ddot{X}_2 + \Omega_2^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) X_2 + \alpha_3 X_2^3 = 0 \quad (14)$$

$$\text{ここに } \Omega_2^2 = \omega_2^2, \mu = \frac{\alpha_1 f_1}{\omega_2^2 (\omega_2^2 - \omega^2)}$$

(14)式の主不安定領域を定めるオ1近似は次式で与えられる。

$$1 \pm \mu - \frac{\omega^2}{4\Omega_2^2} = 0 \quad (15)$$

§4で解析した偏平P-子モデルの主不安定領域を(14)、(15)式から定める。まず、4-1で解析した $H=3$ 、 $f_1=6.0$ のモデルの主不安定領域を表1に示す。4-1で求めた主不安

Table 1 Main Instability ($H=3$, $f_1=6.0$)

Mathieu-Hill ($\omega=0$)	$3.042 < \omega/\omega_1 < 3.747$
Mathieu-Hill	$3.343 < \omega/\omega_1 < 3.443$
Present	$3.376 < \omega/\omega_1 < 3.412$

領域を表1に示した。次に4-2で解析した $H=10$ 、 $f_1=30.0$ の偏平P-子モデルへ適用した結果を表2に示す。

Table 2 Main Instability ($H=10$, $f_1=30.0$)

Mathieu-Hill ($\omega=0$)	$0.891 < \omega/\omega_1 < 1.310$
Mathieu-Hill	$0.660 < \omega/\omega_1 < 1.349$
Present	$0.630 < \omega/\omega_1 < 1.337$

検討 $H=3$ 、 $f_1=6.0$ のモデルでは初期変形に定答を無視して扱いが不安定領域の幅を安全側(広く)見積る。逆に $H=10$ 、 $f_1=30.0$ のモデルでは初期変形に定答を無視して扱いが不安定領域の幅を危険側(狭く)見積る。本報の扱いは初期変形の非線形応答と(1)式において α_2 のつり合非線形項の影響

響を考慮しているの2, 4-1の結果と初期変形の線形応答を考慮した場合の結果との差は, (1-a)式の数5, 及び6項, (1-b)式の数4項に起因する。次に, 規準座標 x_2 が "nontrivial" 解を持つ場合の共振曲線を求める。

5-2 近似法 2

この方法は Bolotin¹⁾ に示されているものであり, (1)式において次式で表わされる項以外は無視して扱いと等価である。

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_2^2 = f_1 \cos \omega t \quad (16-a)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 = 0 \quad (16-b)$$

(16)式を次式で仮定する。

$$\begin{cases} x_1 = C_{10} + C_{11} \cos \omega t \\ x_2 = A_2 \sin \frac{1}{2} \omega t, \text{ or } A_2 \cos \frac{1}{2} \omega t \end{cases} \quad (17)$$

(17)式を(16)式へ代入し, 調和バランス法を適用して得られる代数方程式を $A_2 \neq 0$ の条件のもとで解析すると次式を得る。

$$A_2^2 = \frac{\omega_1^4 (4\omega_2^2 / \omega_1^2 - \xi^2)(1 - \xi^2) \pm 4\alpha_1 f_1}{2(1 - 2\xi^2)\alpha_1^2} \quad (18)$$

$$\text{ここに } \xi = \omega / \omega_1$$

(18)式において $A_2 = 0$ とおくと, 初期変形の線形応答を考慮した(15)式の扱いと同じ重荷不安定領域の境界を与える。

4-2で扱う, 無次元化パラメータ $H=10, f_1=30.0$ の条件下(18)式を適用する。このモデルの諸量を(18)式へ代入して A_2^2 を求めた結果を図9に示す。

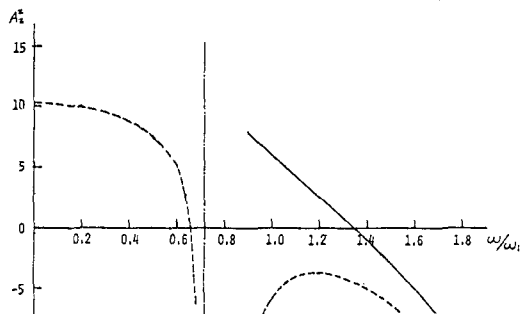


Fig. 9

$A_2^2 \geq 0$ の場合だけ意味があることを考慮して,

(18)式から得られる x_2 の振幅を図10に実線と示す。(20)式へ代入すると振幅 A が求められる。

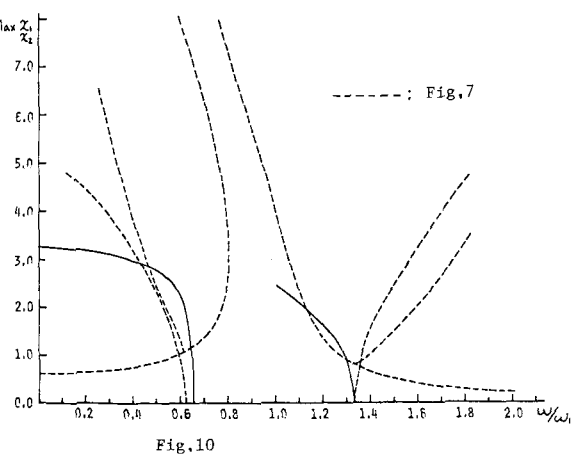


Fig. 10

図10の破線は図7の結果である。

5-3 近似法 3

Bolotin¹⁾ は(14)式で表わされる非線形 Mathieu-Hill 式において, x_2 が "nontrivial" 解を有した場合の定常解の振幅を求める計算法を示している。(14)式を次式で仮定する。

$$x_2 = a \sin \frac{1}{2} \omega t + b \cos \frac{1}{2} \omega t \quad (19)$$

(19)式を(14)式へ代入し, 調和バランス法を適用して得られる代数方程式を $a, b \neq 0$ の条件のもとで解析して次式を得る。

$$A_2 = \frac{2R_2}{\sqrt{3}\alpha_1} \sqrt{\frac{\omega^2}{4R_2^2} - 1 \pm \mu} \quad (20)$$

$$\text{ここに } A_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(20)式は(14)式の μ, R_2^2 を用いて計算することによって得られる。ここでは, 4-2で解析された規準座標 x_1 の分岐点 P_1 及び P_2 (図7)で取る値をもとにして, (20)式を計算する。この時(2)式の代りに x^* は次式で表わされる。

$$x^* = C_{10}^* + C_{11}^* \cos \omega t \quad (21)$$

(21)式を(1-b)式へ代入して, (3)式に対応する式を導くと, 次式で表わされる。

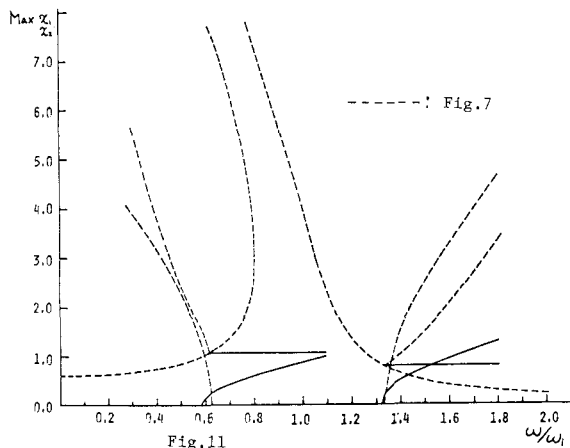
$$\ddot{x}_2 + R_2^2 (1 - \mu \cos \omega t) x_2 + \alpha_1 x_2^3 = 0 \quad (22)$$

$$\text{ここに } R_2^2 = \omega_2^2 + \alpha_1 C_{10}^*, \mu = -\alpha_1 C_{11}^* / R_2^2$$

$$C_{10}^*, C_{11}^*: \text{分岐点 } P_1, P_2 \text{ (図7) の値}$$

C_{10}^*, C_{11}^* を(22)式へ代入して μ, R_2^2 を求め, それらを

4-2で扱った無次元化ライズ $H=10, f_1=30.0$ の偏平アークに(20)式を適用して得られた結果を図11に実線を示す。破線は図7の結果である。



検討 x_2 がnontrivialな解を有した場合の振幅について検討する。

近似法2を無次元化ライズ $H=10, f_1=30.0$ の偏平アークに適用した結果は、図10に示したように分岐点 P_1 及び P_2 から分岐した共振曲線とも振動数の低い方へ曲る。一方、近似法3を同じモデルに適用した結果は図11に示したように、点 P_1 及び P_2 から分岐した共振曲線とも振動数の高い方へ曲る。図7の結果と比較すると、点 P_1 から分岐する共振曲線は近似法3における結果は図7と同じ傾向を示す。しかし、近似法3の結果の方が x_2 の振幅を小さく見積る。また、点 P_2 から分岐する共振曲線は近似法2による結果と図7の結果が良く合う。しかし、近似法2を適用して得た点 P_1 から分岐する共振曲線、及び近似法3を適用して得た点 P_2 から分岐する共振曲線は図7に示した厳密な扱いによる結果と全く異なる。近似法2及び近似法3は歪の2次項までの有限変形を考慮した場合(1)式で支配される系を扱う既往の定式化である。ここで示した例題から、既往の定式化による結果と厳密な扱いによる結果とが間に大きな差異が生ずる場合があることが分かる。すなわち、trivialな解を持つ規準座標(同次成分)がnontrivialな解を持つ場合の振幅は、厳密な扱いをする必要がある。

§6 近似解法

非線形振動を解析する際、一般に非線形代数方程式を解析しなければならない。非線形代数方程式(7)多くの場合代数計算だけで解析できるが収斂計算法を利用しなければならない。ここで、代数計算(9)(10)で(1)式の近似解を求める方法を示す。(1)式において、 x_2 がtrivialな解を持つ時、次式が導かれる。

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3 = f_1 \cos \omega t \quad (23)$$

(23)式の解を(12-a)式で仮定し、調和バランス法を適用すると次式が導かれる。

$$\begin{cases} \omega_1^2 C_{10} + \frac{\alpha_3}{2} (C_{10}^2 + C_{11}^2) + \frac{\alpha_4}{2} (2C_{10}^3 + 3C_{10}C_{11}^2) = 0 & (24-a) \\ (\omega_1^2 - \omega^2) C_{10} + \alpha_3 C_{10}C_{11} + \frac{3}{4}\alpha_4 (C_{10}^2C_{11} + C_{11}^3) = f_1 & (24-b) \end{cases}$$

(24)式において ω を110度とすると、 C_{10}, C_{11} は陽に表わされる。しかし、 C_{10} を115度とて選べば(24-a)式から

$$C_{11}^2 = -\frac{4\omega_1^2 C_{10} + 2\alpha_3 C_{10}^2 + \alpha_4 C_{10}^3}{2(2\alpha_3 + 3\alpha_4 C_{10})} \quad (25)$$

(24-b)式から次式を得る。

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \alpha_3 C_{10} + \frac{3}{4}\alpha_4 (C_{10}^2 + C_{11}^2) - \frac{f_1}{C_{11}} \quad (26)$$

この近似解法は $C_{11}^2=0$ 、つまり別の扱いをしなければならないが一般に(23)式で表わされる系の自由振動($f_1=0$)、及び強制振動の近似解を与える。

例題1 自由振動への応用

無次元化ライズ $H=3$ の偏平アークに(25)、(26)式を適用する。得られたBackbone Curveを図12に実線を示す。破線は誤差を含む

と考えられる曲線(9)(10)である。この例からも分かるように、この近似法は割合精度が良い。

例題2 強制振動力次に無次元化ライズ $H=3$ の偏平アークに外力振

幅 $f_1=1.68$ を作用させた時の共振曲線

を求める、図13に実線を示す。

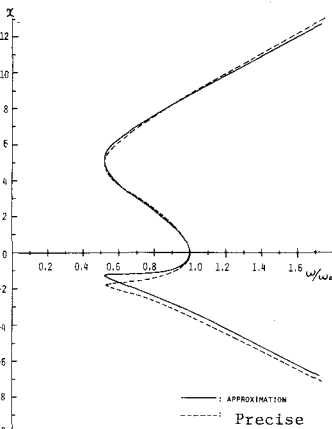


Fig.12 BACKBONE CURVE (H=3)

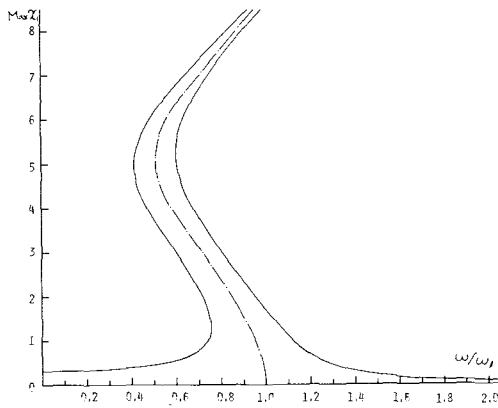


Fig.13 Resonance Curve (H = 3)

一点鎖線は例題1の Backbone Curveである。それ、無次元化ライズ $H=10, f_1=30.0$ の偏平アーチに適用すれば、図6に示した共振曲線を代数演算だけで解析できる。

例題3 動的安定性の境界の決定。

(1)式において、 $\chi_2=0$ の場合の周期解 χ_1 は(25)、(26)式を用いて近似解を求めらる。この χ_1 を(1-b)式へ代入して2次式を得る。

$$\ddot{\chi}_2 + R_2^2(1 - 2\mu_1 \cos \omega t - 2\mu_2 \cos 2\omega t)\chi_2 + d_2 \chi_2^3 = 0$$

$$\therefore R_2^2 = \omega_2^2 + d_1 C_{10} + d_2 C_{10}^2/2 + d_2 C_{11}^2 \quad (27)$$

$$\mu_1 = -C_{11}(d_1 + d_2 C_{10})/R_2^2$$

$$\mu_2 = -d_2 C_{11}^2/(4R_2^2)$$

(27)式の主不安定領域の近似は2次式で与えられる⁽¹⁾

$$\text{Det}_1 = (1 + \mu_1 - \frac{\omega^2}{4R_2^2})(1 - \mu_1 - \frac{\omega^2}{4R_2^2}) = 0 \quad (28)$$

2次不安定領域の近似は2次式で表される。

$$\text{Det}_2 = (1 + \mu_2 - \frac{\omega^2}{R_2^2})(1 - \mu_2 - \frac{\omega^2}{R_2^2} - 2\mu_1^2) = 0 \quad (29)$$

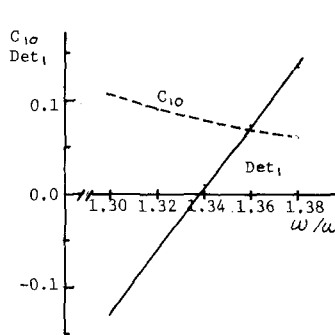


Fig.14 Det₁

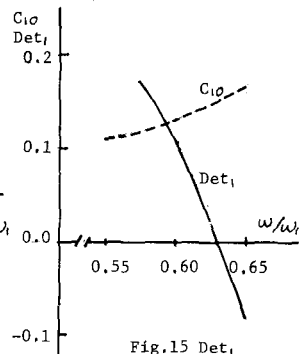


Fig.15 Det₁

4-2 2次解析にて無次元化ライズ $H=10, f_1=30.0$ の偏平アーチにおいて、(25)、(26)式から得らる諸量を(28)、(29)式へ代入して求めた Det_1 のグラフを図14、及び図15に示す。

それ、 Det_2 のグラフを図16に示す。

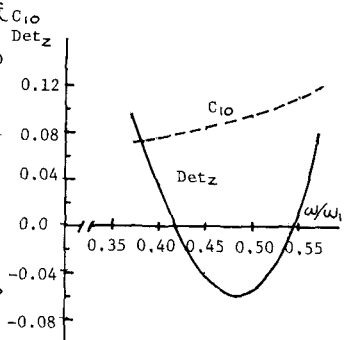


Fig.16 Det₂

図14、15から得らる主不安定領域の境界は、表2に示した4-2の結果と同一である。それ、図16から得らる不安定領域の境界は4-2の解析で得らる2次不安定領域の境界と一致する。

(28)式あるいは(29)式の代りに更に良い近似を与える式を用い、(27)式の主不安定領域、2次不安定領域の境界の精密な値を得られるだけなく、3次以上の不安定領域を定めることができる。

References

- 1) V.V.Bolotin: "The Dynamic Stability of Elastic Systems" Holden-Day, 1964
- 2) V.E.Mettler and F.Weidenhammer: "Zum Problem des Kinetischen Durchschlagens Schwach Gekümmter Stäbe" Ingenieur-Archiv p.421, 1962
- 3) V.E.Mettler: "Stability and Vibration Problems of Mechanical Systems under Harmonic Excitation" Dynamic Stability of Structures Ed. G.Herrman Pergamon Press p.169, 1965
- 4) J.Tani: "Dynamic Instability of Truncated Conical Shells under Periodic Axial Load" Int. Solids and Structures p.169, 1974
- 5) J.Tani: "Influence of Deformations Prior to Instability on the Dynamic Instability of Conical Shells under Periodic Axial Load" Appli. Mech. p.87, 1976
- 6) L.R.Koval: "Effect of Longitudinal Resonance on the Parametric Stability of Axially Excited Cylindrical Shell" J. Acoust. Soc. Am. p.91, 1974
- 7) N.Yamaki and K.Nagai: "屈曲時の圧縮荷重を有する矩形板の動的安定" Mem. Inst. High Speed Mech. Vol.36 No.351, 1975
- 8) Y.Minakawa and Y.Hangai: "非線形微分方程式の解析的および数値的解析" オペレーティングシステム p.307, 1976
- 9) Y.Minakawa: Doctoral Dissertation, University of Tokyo, 1976
- 10) Y.Minakawa: "The Periodic Solution Problems of Nonlinear Equations of Motion" Trans. A.I.J. (to be appeared)
- 11) G.A.Hegemier and F.Tzung: "The Influence of Damping on the Snapping of a Shallow Arch under a Step-pressure Load" AIAA J. p.1494, 1969
- 12) N.J.Hoff and V.G.Bruce: "Dynamic Analysis of the Buckling of Laterally Loaded Flat Arches" J. of Mathematics and Physics, p.276, 1954

On the Strict Treatment of the Dynamic Stability in Elasticity under Periodic Force

Youichi Minakawa*

There are many papers which deal with problems of the dynamic stability in elasticity under periodic force. In these systems, the deformation before instability is the symmetric deformation (axial deformation in rods, inplane deformation in plates, symmetric deformation in arch, ring and shells), and the deformation after instability is the asymmetric deformation (bending deformation in rods, and plates, asymmetric deformation in arch, ring and shells). If the equations of motion are derived by considering the finite deformation theory in elasticity, the symmetric and the asymmetric deformation modes are coupled through nonlinear terms of spring. Then, applying periodic force with symmetric mode, the equations of motion which have external periodic force terms, and the symmetric and the asymmetric deformation modes coupled in nonlinear spring terms are derived. In conventional treatment of the systems, the symmetric deformation modes are assumed to be solved under separate variables from the asymmetric deformation modes. Assuming separate variables, the symmetric deformation modes are solved with linear terms, then these solutions are substituted into equations of motion corresponding to the asymmetric deformation modes. The derived Mathieu-Hill equations are treated as the basic equations for the dynamic stability under periodic force.

For example, adopting the deformation before instability (χ_1) and the deformation after instability (χ_2) in foregoing elastic systems, we get the equation of motion with two-degree-of-freedom as presented in Eq.(1). Assuming Eq.(1-a) is solved without nonlinear term, normal mode χ_2 is given by Eq.(2). Substituting Eq.(2) into Eq.(1-b), we get the Mathieu-Hill equation (3). Some authors who investigated the dynamic stability in elasticity under periodic force based on the Mathieu-Hill equation corresponding to Eq.(3). Many authors neglected the inertia force of the deformation before instability and dealt with the Mathieu-Hill equation corresponding to Eq.(3) where $\omega^2=0$.

In this paper the conventional approximate procedure is not adopted, but Eq.(1) is solved by the method of harmonic balance. We employ the shallow sinusoidal arch as a model governed by Eq.(1) and show the numerical results in §4. The obtained typical results are compared with the results which are obtained by applying the conventional treatment in §5. The comparisons make clear the influence of nonlinear response before instability and the nonlinear vibration after instability. Especially, they show that there is substantial difference in the steady-state amplitude after instability for the same elastic model.

In order to investigate whether the obtained solutions are stable or unstable for perturbation, the complex eigenvalue problem is solved.

In the last, an approximation method to solve a sort of nonlinear equations of motion is proposed. By applying the method, some nonlinear vibrations are analyzed without solving nonlinear algebraic equations by iteration procedures such as the Newton-Raphson procedure. In order to analyse nonlinear free vibration and forced vibration of χ_1 and determine the boundary region of dynamic stability of χ_2 this method is applied to Eq.(1).

* Student, Institute of Industrial Science University of Tokyo, Dr. Eng.