

1. 緒言 構造物の長大化および大型化に伴い、軽量構造が採用されているが、これらは薄肉はりおよび薄板を基本要素とするために、曲げやねじりに対する剛性が小さいから容易に有限変形を生ずることになる。橋梁におけるトラス橋やアーチ橋の腹材（吊材もしくは支柱）および送電鉄塔部材として鋼管もしくはH型鋼からなる細長比の大きい部材が用いられている。その結果、これらの部材が低風速時に周期的な渦（カルマン渦）による振動問題および突風応答などが重要視されるようになった。構造部材の端部はガセットプレートまたはボルトによって軸方向変位が固定されているために振幅によって引張力が中立軸に生ずることに起因する幾何学的な原因によって、これらの部材の固有振動数振動波形および応力分布は微小振動論よりえられる結果とは異なることが予想される。これまでのところ、このような部材の幾何学的非線形振動問題は系を一自由度系としたものが大部分で、現象の解明や実験との対応なども十分に行われているとは言い難い。そこで本研究は、はり部材の非線形振動の挙動を種々のパラメーターのもとに検討したものである。

2. 運動方程式 端部で軸方向変位が拘束された細長いはりに一様分布周期外力および初期軸力が作用する場合の運動方程式は次のように与えられる。

$$P = B - \frac{E A}{2l} \int_0^l \frac{\partial y}{\partial x} dx \quad (1) \quad L(y, P) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + C \frac{\partial y}{\partial x} + P \frac{\partial y}{\partial x} - P \cos \Omega t = 0 \quad (2)$$

ここに、 l ：はりの長さ、 E ：ヤング率、 A ：断面積、 I ：断面2次モーメント、 y ：たわみ、 x ：支点からの距離、 P ：単位体積重量、 C ：粘性抵抗係数、 P ：初期軸力、 P ：はりに作用する軸力、 ρ ：外力の荷重強度、 Ω ：外力の円振動数、 t ：時間 運動方程式において非線形項は振幅によって生ずる軸力 P である。

3. 多自由度系解析法 式(1)および(2)を解くために、はりのたわみを次のように変数分離形に仮定する。

$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$ (3) ここに、 $X_n(x)$ ：境界条件を満足する座標関数、 $T_n(t)$ ：未知の時間関数 式(3)の座標関数として軸力 P の作用しないはりの線形振動の規準関数を用いるものとする。式(3)を釣合式(2)に代入しても右辺はゼロにならないので、Galerkin法を適用する。すなわち、

$$\int_0^l L(y, P) X_n dx = 0 \quad (4) \quad \text{したがって、時間に関する連立非線形常微分方程式がえられる。}$$

$$\ddot{T}_n + 2\beta_n \dot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \bar{P} \sum_{m=1}^{\infty} T_m K_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_{klm} T_k T_l T_m = r_n \bar{P} \cos \bar{\omega} t \quad (5)$$

$$\text{ここに } \alpha_n = (\lambda_n^2 / \lambda^2), \quad \beta_n = \int_0^l X_n^2 d\zeta, \quad \beta_{klm} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{dX_k}{d\zeta} \frac{dX_l}{d\zeta} \frac{dX_m}{d\zeta} X_n d\zeta / (\lambda^2 \beta_n)$$

$$\bar{P} = P l^3 / E I r, \quad r_n = \varepsilon_n / (\lambda^2 \beta_n), \quad \varepsilon_n = \int_0^l X_n d\zeta, \quad \tau = \omega t, \quad \bar{\omega} = \Omega / \omega, \quad K_{nm} = \frac{\alpha_n}{\lambda^2} \int_0^l \frac{dX_n}{d\zeta} X_m d\zeta, \quad \bar{P} = P / P_{cr}$$

α ：座屈係数

4. 連立非線形常微分方程式の解法 多自由度系の非線形振動の定常応答を求めめるにあたって、非線形項が大きくなっても有効性を失わない調和バランス法を適用する。式(5)の非線形復元力がすべて3次式であることを考慮のうえ解を次のようにフーリエ級数に仮定する。 $T_n = \sum_{j=0}^{\infty} (a_n^j \cos j \bar{\omega} \tau + b_n^j \sin j \bar{\omega} \tau)$ (6)

式(6)を式(5)に代入して、非線形項に含まれる正弦、余弦の積を加法定理を用いて展開のうえ、調和

バランス法を適用すれば、未定々数 a_n^i, b_n^i を決定するための連立非線形代数方程式が求められる。任意の振動数比 ω に対して適当な初期値を与えればNewton-Raphson法を用いて、 a_n^i, b_n^i を決定することができ、これらを式(3)に代入すれば、はりの振動の時間的、空間的変動が求められる。なお、振幅の定義としては非減衰の場合には基本波の絶対値が最大となる時刻のはり中央点の無次元変位を用いる。また、振動時に作用するはりの軸力の時間的変動は次のように与えられる。

$$\bar{P} = \bar{P}_0 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} T_n T_m \quad (7) \quad \text{ここに} \quad f_{nm} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} d\theta$$

5. 振幅安定判別法³⁾ 式(6)の解の安定性を調べるためには、その周期解 T_n にわずかなく乱 δ_n を与えた場合の動的応答を検討する。周期解 T_n に微小な乱 δ_n を与えることによって生ずる振動を $\bar{T} = T_n + \delta_n$ とする。これを式(6)に代入して δ_n の2次以上の微小項を無視し、周期解 T_n が式(6)であることを考慮すれば、次式がえられる。

$$E\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + AS + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos 2k\omega t + C_k \sin 2k\omega t) \delta = 0 \quad (8) \quad \text{ここに、} E: \text{単位行列、} H: \text{減衰行列、} A: \text{剛性行列、} B_k, C_k: \text{非線形バネ定数と振幅の2次の項の積からなる行列}$$

上式は連立のHillの方程式である。減衰行列 H は減衰の直交性の仮定に基づいて対角化されているが、行列の積の交換則が成立する単位行列 E に変換できる場合すなわち減衰の大きさは各モードとも一定である。 $\delta = \delta e^{i\omega t}$ とおいて、 $e^{i\omega t}$ が特異でないことを考慮すれば、第一階の微係数を欠く標準形に変換することができる。解 δ を次のように未定々数を含む指数関数の項と運動の周期性を保証するフーリエ級数の積に仮定する⁴⁾。

$$\delta = e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin 2k\omega t + b_k \cos 2k\omega t) \right\} \quad (9) \quad \text{ここに} \quad b_0, a_k, b_k: \text{時間に無関係なベクトル}$$

式(9)を標準形に書きなおしたものに上式を代入して再び調和バランス法を適用すれば、次のような未定々数 b_0, a_k, b_k および ω を求めるための同次方程式が次のように求められる。

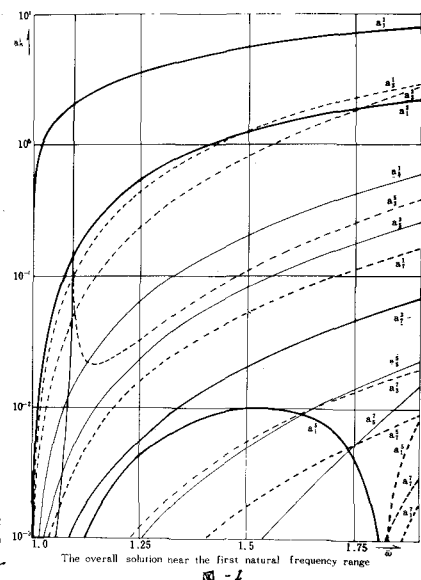
$$GX = 0 \quad (10) \quad \text{ここに} \quad G: \text{係数行列、} X: b_0, a_k, b_k \text{ からなる列ベクトル}$$

上式の X がゼロベクトル以外の解を持つためには、係数行列 G の値がゼロでなければならないことから、次のような2倍サイズの行列の固有値問題に変換することができる。

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}M_0 & -M^{-1}M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (11) \quad \text{ここに、} Y = \lambda X$$

式(11)の行列は実係数の非対称行列であるからその固有値入は共役な複素数となるが、QR法を用いてすべての固有値が求められる。えられた固有値の実数部から減衰定数を引いた値がすべて負もしくは零ならば安定で、1つでも正ならば不安定というLiapunovの方法によって非線形振動の解の安定判別を行うことができる³⁾。

6. 解析結果 (1) 振動数 ω が振動形に及ぼす影響 以上に示した解析法を用いて、はりの非線形自由振動特性を検討する。両端単純支持はり(SS)の時間に関する運動方程式には他の自由度の3乗の単独項が含まれていないために、線形振動の規準関数を用いて変数分離することが可能である。非線形自由振動数



を線形1次振動数で無次元化した振動数比 $\bar{\omega}$ とはり中央の無次元振幅 A との関係を求めれば表-1のS.S.に示すとおりである。本問題の非線形性の大きさを示すパラメーターは振幅比 A である。表において $A=0$ は線形振動に対応するものである。S.S.の結果は楕円積分よりえられた解と一致する。当然ながら、本ケースの非線形振動の規準関数は振幅に無関係に微小振動の正弦波形で与えられ、表-2の最後の列に示すとおりである。他の境界条件のはりはすべての自由度が連成するために、自由振動においても変数分離することが不可能である。すなわち、振幅の変化とともに振動波形が変動するので多自由度系としての取り扱いが本質的である。図-1は両端固定はりの1次固有振動近傍の振動数比 $\bar{\omega}$ を各振幅成分 a_n の絶対値との関係を片対数グラフにプロットしたものである。図中の実線は1次振動の基本波 a_1 を正としたときの同位相の振幅成分を示し、点線は逆位相の振幅を示すものである。振動数比 $\bar{\omega}$ が増大すると、1次振動の基本波 a_1 をはじめとしてすべての調和成分が必然的に生ずるが、 a_5 すなわち3次振動の5倍の高調波が $\bar{\omega}=1.1$ 付近で非線形の連成項を通じて高調波共振を示すことがわかる。また、 a_5 すなわち1次振動の5倍の高調波は単調に増加しない結果となっている。これらは多自由度系の非線形振動の固有の性質である。表-1 C.C.の $\bar{\omega}$ は多自由度系としてえられた振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係をまとめたものである。また、(b)は差分法を用いたシミュレーションによる解を示し、(c)は実験結果を示すものである。(a)、(b)、(c)の結果はほぼ完全に合致しており、本解析法が連続体の非線形振動の解を予測するものと考えられる。表-2は各種の振幅比の増大とともににはりに生ずる軸方向張力のために曲げよりも軸力の影響が增大するために端部の固定の影響が小さくなり、ふくらんだ形になり単純支持の波形に近づくことがわかる。図-2の実線は表-1の振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ の関係をプロットしたものである。図のように振幅比の増大とともに振動数比が増大する硬化バネの挙動を示す。これは振幅によって生ずるはりの軸方向力が構造全体の剛性を高めるためである。また、振幅比の変化に伴う振動数比の変動は単純支持の場合が固定の場合よりも大きい。なお、図-2において点線ははりのたわみによって生ずる最大軸力を用いて一定の軸力 $P=P_{max}=const.$ の作用するはりの線形振動の微分方程式を用いて求めた結果である。図のように厳密解との間にかなりの差があるといえ、振動時の予測には非線形振動理論を用いなければならない。

(2)初期軸力の影響および振動時の軸力の変動 構造部材において柱部材として用いられる場合には部材には死荷重による初期軸力が作用する。また、スパン長が固定されているから、温度変化によって、

表-1 Frequency ratios of beams

A	$\bar{\omega}$	CC			SS
		(a)	(b)	(c)	(a)
0	1.0000	1.0000	1.000	1.00	1.0000
1	1.0222	1.022	1.01		1.0892
2	1.0854	1.085	1.08		1.3178
3	1.1824	1.182	1.16		1.6257
4	1.3049	1.305	1.27		1.9761
5	1.4468	1.447	1.40		2.3502
6	1.6046	1.599	1.59		2.7384
7	1.7771	1.774	1.74		3.1360
8	1.9672		1.93		3.5394

表-2

Variation of modal shapes of beams for various amplitude ratio

A	0	2	4	6	8	all
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.1191	0.1238	0.1387	0.1605	0.1927	0.3090
0.2	0.3900	0.3986	0.4256	0.4638	0.5191	0.5879
0.3	0.6901	0.6967	0.7175	0.7460	0.7869	0.8090
0.4	0.9164	0.9187	0.9258	0.9357	0.9499	0.9511
0.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

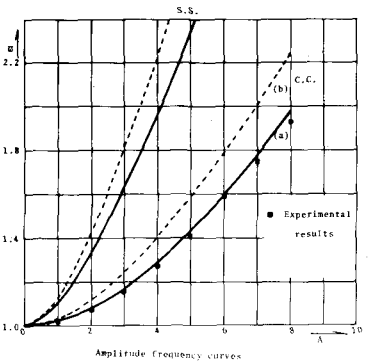


図-2

図-2の実線は表-1の振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ の関係をプロットしたものである。図のように振幅比の増大とともに振動数比が増大する硬化バネの挙動を示す。これは振幅によって生ずるはりの軸方向力が構造全体の剛性を高めるためである。また、振幅比の変化に伴う振動数比の変動は単純支持の場合が固定の場合よりも大きい。なお、図-2において点線ははりのたわみによって生ずる最大軸力を用いて一定の軸力 $P=P_{max}=const.$ の作用するはりの線形振動の微分方程式を用いて求めた結果である。図のように厳密解との間にかなりの差があるといえ、振動時の予測には非線形振動理論を用いなければならない。

部材に温度応力による軸力が作用する。初期軸力が非線形自由振動に及ぼす影響を検討するために、図-3に両端固定はりの振動数比 ω と振幅比 A との関係を初期軸力比 $\bar{P}_0$ （初期軸力/オイラーの座屈荷重）をパラメーターにプロットした結果を示す。 $\bar{P}_0 > 0$ は圧縮力の領域に対応し、また $\bar{P}_0 < 0$ は引張力の領域に対応するものである。 $\bar{P}_0 = 1$ の場合には線形振動においては復元力を持たないために無周期運動をするが、非線形振動においては振動数は振幅にほぼ比例して増大する。初期軸力の影響は圧縮領域において顕著でかつ振幅比の小さい領域において敏感であるが、振幅比の大きい領域では小さくなる。図-4は両端単純はり（S.S.）と固定はり（C.C.）の振動時にはりのたわみによって生ずる軸力の変動範囲を示すものである。すなわち、図において横軸は初期軸力比 $\bar{P}_0$ を、縦軸は振動時に生ずる最大軸力 P_m の大きさを示すものである。すなわち、振幅比 A で振動しているはりの軸力は $P_0 - P_m$ の範囲で変動する。はりの曲げ剛性に比べて軸方向伸び剛性 EA はかなり大きいから、振動時に生ずる軸力はかなり大きくなるので、格点の疲労強度や応力度の推定には、軸力の影響を考慮することが必要であると考えられる。なお、軸力比は対応するはりの座屈荷重を用いて無次元化したか、はりに生ずる軸力の絶対値は境界条件によらず、ほぼ同じ大きさである。

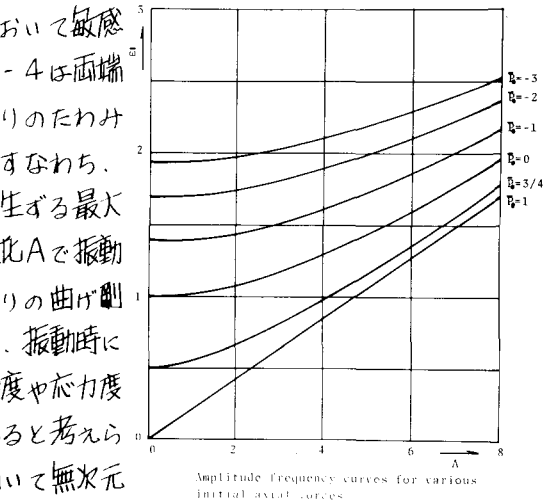


図-3

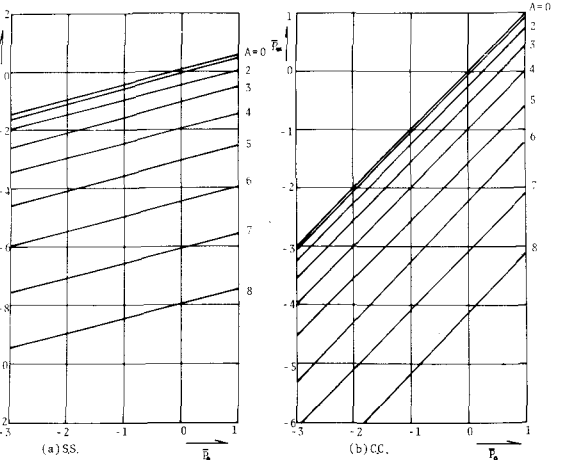


図-4 Relation between initial axial force and maximum axial force

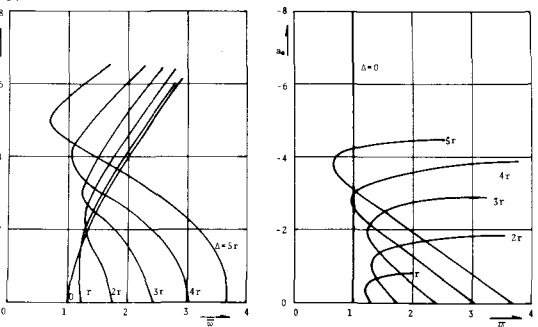


図-5 Amplitude frequency curves and direct current component-frequency curves for various initial static deflections

③初期変形の影響 薄肉構造部材では製作過程支持部の出来具合および自重などの影響によって初期変形が必ず存在する。薄肉部材の座屈問題では座屈荷重に及ぼす初期変形の影響がきわめて敏感であることが知られているが、非線形振動においても全く同じである。はりの中央に対して対称な初期たわみを持つはりを対象に非線形自由振動特性に及ぼす初期変形の影響を検討したものである。初期軸力 $P_0 = 0$ の場合の $\sin$ 状の初期たわみを持つはりの時間に関する運動方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{T} + (1 + \frac{1}{2}A_0^2)T + \frac{3}{4}AT^2 + \frac{1}{4}T^3 = 0 \quad (2)$$

初期変形の影響は線形項に2次のオーダー、非線形項に1次のオーダーで効いてくることかわかる。また、初期変形によって復元力に2次の非線形項が含まれる。 $T = a_0 + a_1 \cos \omega t$ と置いて振動数比 ω と振幅の変動成分 a_1 と直流成分 a_0 の関係が図-5に示すようにえられる。図から明らかなように初

初期変形 Δ_0 が回転半径以上になると初期変形の影響が大きくなる。振幅 a_i が小さい場合にはアーチとしての微小振動となり平衡点のまわり($a_0=0$)で振動する。これに対して振幅 a_i が増大するにつれて、振動の中心が平衡点から初期変形を打ち消す方向に移動し、これに伴って振動ははりの振動($a_0 \rightarrow \Delta_0$)に近づく。このときの振動数比 $\bar{\omega}$ は振幅の増大とともに減少し、軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大して、初期変形よりも大きくなると、振動の中心は直線はりと同じ($a_0 \rightarrow \Delta_0$)になり、振動数比は振幅の増大とともに増加し、硬化バネの挙動を示す。以上の結果から、初期変形は応答特性に大きな影響を及ぼすことが予想される。

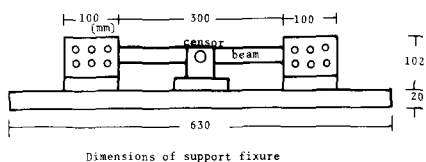
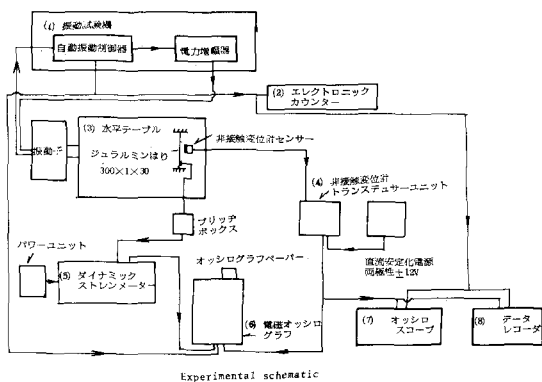


図-6



Experimental schematic
図-7

(4) 定常強制振動 図-6に示すような材質ジュラルミン製のはり(有効長さ30 cm、厚さ1 mm、単位体積量 $\gamma=2.85 \text{ g/cm}^3$ 、ヤング率 $E=0.68 \times 10^{10} \text{ kg/cm}^2$ 、線形1次振動数 $f_1=55.2 \text{ Hz}$)を両端で軸方向変位および曲げに対して固定の条件を満足するように鉄製の治具により固定し、持全体を図-7に示すように振動台上に振動方向と直角に設置した。図-7のブロックダイアグラムにしたがって定常加振実験を実施した。計測されたはりの中央点の動的変位を回転半径 r で無次元化し、また加振周波数 f を微小振動実験より測定された固有振動数 f_1 で無次元化($\bar{\omega}=f/f_1$)のうえ、振幅 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係を主めれば、加振力 $\bar{P}=128$ および $\bar{P}=256$ に対して図-8、9に示す結果をうる。図中において○印は掃引周波数を増加させた場合を、×印は掃引周波数を減少させた場合の実験値をそれぞれ示す。また、図中の矢印は振幅の跳躍が生じた位置と方向を示すものである。また、肉太の実線は対応する理論解よりえられた安定な非線形応答に、一点鎖線は不安定な非線形応答にそれぞれ対応するものである。また、点線は微小変形理論からえられる線形応答を示す。なお、計算に用いた減衰定数は0.004である。図中において $\bar{\omega}=1.0$ 付近は1次の主共振(図-10(a))、 $\bar{\omega}=0.2$ 付近の共振は外力の5倍の高調波共振(図-10(b))、 $\bar{\omega}=0.3$ 付近は3

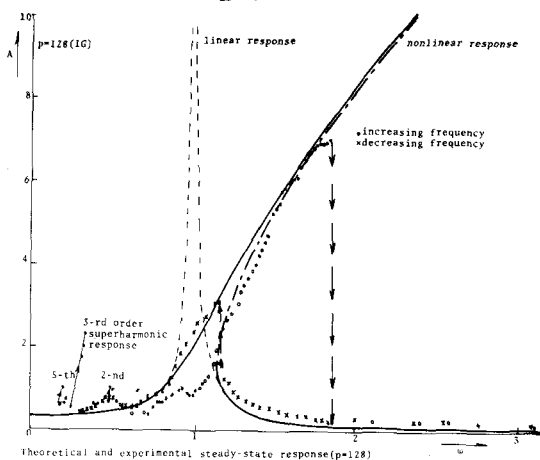


図-8

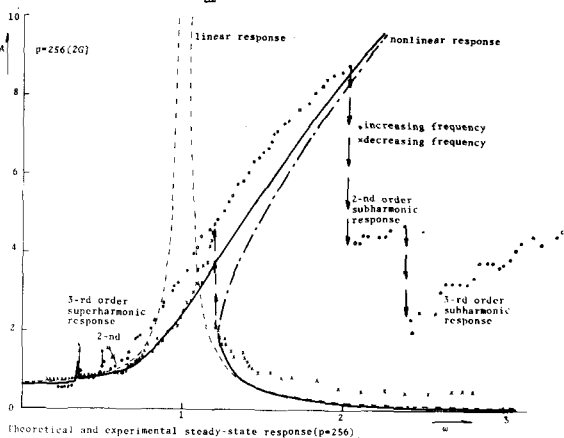


図-9

からえられる線形応答を示す。なお、計算に用いた減衰定数は0.004である。図中において $\bar{\omega}=1.0$ 付近は1次の主共振(図-10(a))、 $\bar{\omega}=0.2$ 付近の共振は外力の5倍の高調波共振(図-10(b))、 $\bar{\omega}=0.3$ 付近は3

倍の高調共振振(図-10(e))

おまび $\bar{\omega} = 0.5$

付近は2倍の高調共振振(

図-10(d))にそ

れぞれ対応するものである

各々の出力の

振動数は

れも1次の固

有振動数には

ば一致する。加振周波数を $\bar{\omega} = 1.0$ 付近から増加させていく

と、1次振動の外力と同位相の主共振が成長していくが、

$\bar{\omega} = 2.0$ 付近で応答振幅は跳躍を起こし、図-11(a)に示すよう

な過渡状態を伴った振動すなわち非線形減衰自由振動をし

ながら逆位相の定常状態に移る。並に加振周波数を $\bar{\omega} = 1.3$

付近から減少させていくと、逆位相の振幅から同位相の振

幅への跳躍はうなりを伴った振動をしている(図-11(b))。

これらはいずれも非線形振動系固有の現象である。P=128

の場合には理論値と実験値はほぼ合致しているが、主共振

の跳躍を生ずる振幅は理論値よりえられる応答振幅が閉じ

る位置よりかなり小さな振幅で生じ、並に高調共振振の振

幅は理論値よりも大きな振幅となっている。この原因は微

小振動からえられた減衰定数が大振幅振動では異なること

に起因するものである。図-9の加振力の大きさを2倍にした場合には、主共振幅は理論値より大き

な値となっている。また、主共振の上側から生ずる跳躍が生じたあと、図-10(d)に示すような2分

の1おまび3分の1の分数調共振振の振幅に飛び移っているが、この原因は大振幅振動時

にはりに生ずる軸方向力のために、はりが軸方向の変位の固定が不十分であるためにはりに変形が生じたこと

によるものと考えられる。図-9,10 に示すように2倍の高調共振振おまび2分の1の分数調共振振など

の偶数次の波形を持つ共振が見うけられるが、これらの共振は直線ばりの理論では発生しえないもの

である。これは、はりにわずかな初期たわみが存在することによって、式(12)に示すような2次の非線

形項が含まれることに起因するものと予想される。以上のように薄肉構造部材の強制振動では加振周

波数で共振する可能性があること、また、温度による初期たわみや初期たわみによって弾性状態が著し

く異なることなど非常に複雑なものとなる。

5 非線形過渡振動 非線形過渡振動の取り扱いには非線形項が存在するために自由振動と強制振動の重

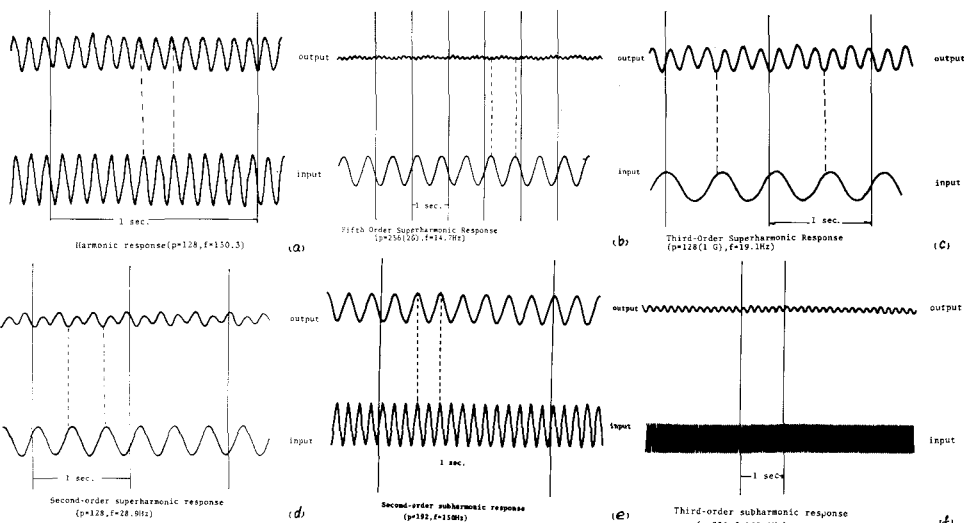


図-10

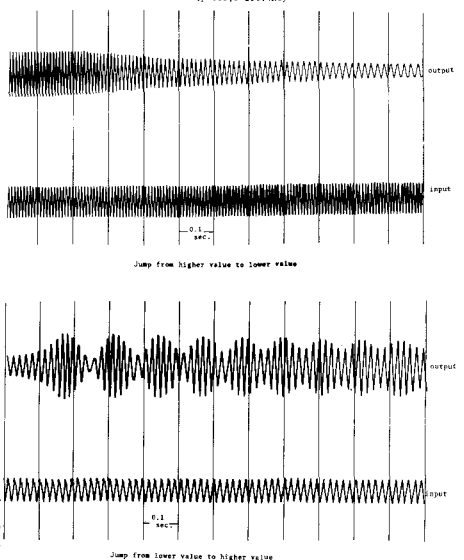


図-11

ね合せが成立しないために、非線形項が大きくなると有効な手法は現在のところ見受けられない。衝撃荷重を受けるはりの非線形応答を Runge-Kutta-Gill 法

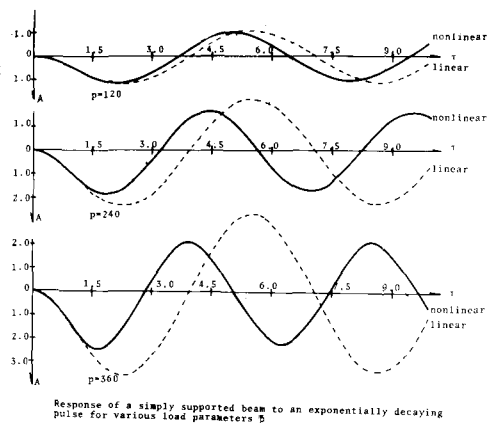


図 - 12

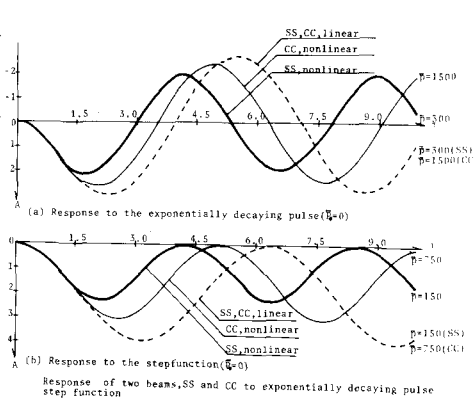


図 - 13

によるシミュレーションによる結果を示す。図-12は各種の荷重 p に対する指数関数的減衰パルスによる単純支持はりの応答を示す。図中において実線は非線形応答を、点線は線形応答を示す。線形の場合には振幅は荷重強度に比例し、周期は荷重に独立であるが、非線形の場合には振幅は荷重強度に比例せず、周期は荷重強度の増大とともに短くなる。はりに生ずる軸力が荷重を分担するために、振幅は線形の場合よりもかなり小さくなる。固定と単純支持はりの2つのはりの指数関数パルスとステップ外力に対する応答を図-13に示す。両境界条件に対する荷重強度は線形応答は単純支持はりの場合よりも大きく、固定はりの周期の変化は単純支持はりよりも変化が小さい。この原因は同じ振幅に対してはりに生ずる軸力の影響が固定よりも単純支持よりも大きいためである。

7.結語 以上によってえられた結果を要約すると

- ①はりの非線形性を表わすパラメーターは振幅比である。振動数は振幅比とともに増加し、その割合は単純支持の方が固定よりも大きい。理論値と実験値は良好な一致を示した。
- ②単純支持はり以外のはりの振動波形はたわみに生ずる軸力のために振幅とともに変化し、弦の波形に近づく。したがって、応力分布も線形の場合から変化する。
- ③はりの初期軸力が振動数に及ぼす影響は振幅比の小さい領域では大きく、振幅比が増大するにつれて小さくなる。振動時にはりに生ずる軸力は曲げ剛性に対して軸剛性が大きいので大きい。
- ④はりの非線形振動の挙動は初期たわみの大きさに至るまで敏感で、振幅が初期たわみ程度までは振動数を減少させる効果をもつ。振幅が初期変形を越えると直線はりとしての振動をする。
- ⑤はりの定常強制振動の共振には応答振幅の周波数が外力のそれと同じである主共振の他に高調波共振および分数調波共振が生ずる。非線形特有の振幅の跳躍現象が見受けられた。

- 参考文献
- 1) 山口、白木、梅林、田中；カルマン渦による橋梁部材の振動とその防止策、三菱重工技報、Vol.7, No.7, pp.1018 ~ 1031 (1970)
 - 2) K. Takahashi. Nonlinear Free Vibrations of Beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.24, pp. 109 ~ 120 (1976)
 - 3) Takahashi, K. and Kawahara, K. On a Method of Approaching the Stability Problem of Nonlinear Vibrations, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.26, pp.491 ~ 502 (1978)
 - 4) 高橋、中島、上村；初期不整を有するはりの非線形振動、昭和54年度土木学会 西部支部研究発表会論文集、昭54年2月
 - 5) 山口、高橋、中島；はりの非線形振動 土木学会 第32回年次学術講演会講演概要集 第1冊、昭52年10月

Nonlinear Vibrations of Slender Structural Members

Kazuo TAKAHASHI* and Yutaka NOGUCHI

As the construction scale of bridge becomes larger, bridge members increase the slenderness ratio and tend to be subjected to vibrations caused by a breeze or a gust which may endanger its integrity. Since recent bridge construction technology employs steel pipes for lateral members, diagonal members and intersection of truss from the points of taking advantage of weight lightening of construction and beauty. These members are fixed with constant distance between panel points. The axial tensile force due to lateral deflection occurs during vibration. Equations of motion of these members are governed by nonlinear partial differential equations. This paper outlines the solution of nonlinear vibrations of beams or columns, and describes fundamental discussions on various nonlinear properties.

This problem is analyzed by the application of a Galerkin method in which the effect of multi-mode participation is considered, and an unspecified function of time resulting in nonlinear coupled differential equations of motion is solved by the harmonic balance method.

The stability problem is investigated by studying the behavior of a small perturbation of the steady-state response which results in the coupled Hill type equation. This problem is transformed by the harmonic balance method into the eigenvalue problem of non-symmetric matrix. A summary of results is as follows.

- (1) The frequency increases with amplitude of vibration. Results predicted by the present solution agree closely with the experimental data. The clamped beam exhibits less change in frequency with amplitude than does the simply-supported beam.
- (2) The normal mode of nonlinear vibrations of beams changes considerably with increase of amplitude. The normal mode becomes flatter.
- (3) The effect of the initial axial force on frequency is conspicuous where amplitude is small and becomes smaller with increase of amplitude.
- (4) The induced axial tensile force due to lateral deflection is appreciably large since the axial stiffness is much greater than the flexural stiffness. This will be of pronounced influence upon the design of the panel points.
- (5) The nonlinear vibrations of beams are affected remarkably by the effect of the initial static deflection. The frequency decreases with increase of amplitude when amplitude is smaller than the initial static deflection, while frequency increases when amplitude is greater than the initial static deflection.
- (6) Besides simple harmonic response, other branch solutions involving superharmonic responses and subharmonic responses are found. The theoretical results agree well with the experimental ones. The jump phenomena are recorded experimentally.
- (7) In the case of nonlinear response to pulse excitations, amplitude is not proportional to load intensity, and the period decreases with increasing load intensity. The simply-supported beam is much affected by the nonlinear effect than the clamped beam.

*Department of Civil Engineering, Nagasaki University