

1. 緒言

長大つり橋タワー・ピア系は、その構成が非常にフレキシブルなタワー・シャフトとマッシブなピアであるため、耐震設計に興味ある振動性状を示す。つまり、ピア一部は建設地の地盤条件を大きく反映したロッキング及びスウェイの運動を起こし、タワー部の運動と連成する。またピア一部の減衰は波動のエネルギー地下透散及び地盤の履歴復元力特性、内部減衰等でかなり大きな値と思われるが、タワー部は構造減衰が主体で非常に小さい値を示す。こうした上部構造と下部構造の減衰効果の違い（いわゆる非比例減衰マトリックス）は、系全体のモード解析(classical modal analysis)を不可能とするため、本論文では2つの異なる手法を用いて解析している。1つは、地盤の非線形性を等価線形化するに都合の良い方法であり、他はモード間連成振動を調べるに適している。これらの解析結果より、地盤の非線形性が上部構造へ及ぼす影響、及び全体系の非比例減衰を実耐震設計のモード解析のためにいかに配分するかを示すのが本論文の主眼点である。なお、得られた結果に一般性をもたせるため、入力は定常不規則外力を想定する。

2. 構造物系の運動方程式

解析対象のタワー・ピア系は、以前著者らが扱ったものと同一であり、図1のようにモデル化して考える。この系の非減衰時の振動は次式で与えられる。

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_i \end{Bmatrix} + [k] \begin{Bmatrix} \theta \\ x_p \\ y_i \end{Bmatrix} = -[m] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z} \quad (2.1)$$

ここに $[m]$: 質量マトリックス, $[k]$: 剛性マトリックスでこれらの各要素については文献(1), (2)に述べてある。 θ : ピアの回転角, x_p : ピアの並進変位, $\{y_i\}$: タワー部の変形量ベクトル, $\{y_i\} = \{x_p + h_i \theta + \alpha_i\}$: タワー部の相対変位ベクトル, h_i : 回転中心から各質点までの高さ, α_i : 地動変位

いま、方程式(2.1)において、減衰項を導入するため、まずタワー部とピア部に分ける。すなわち、ベクトル $\{y_i\} = \{1\} x_p + \{h_i\} \theta + \{\alpha_i\}$, あるいはマトリックス表示で

$$\{y_i\} = \begin{bmatrix} \{h_i\} & \{1\} & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x_p \\ \alpha_i \end{Bmatrix}$$

これを(2.1)式に代入して $[m] = \begin{bmatrix} [m]_p & [0] \\ [0] & [m]_T \end{bmatrix}$, $[k] = \begin{bmatrix} [k]_p & [k]_{PT} \\ [k]_{TP} & [k]_T \end{bmatrix}$ なることを考えると

$$\begin{bmatrix} [m]_p & [0] \\ [m]_T & [m]_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_p \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k]_p & [k]_{PT} \\ [k]_{TP} & [k]_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x_p \\ \alpha \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [m]_p & [0] \\ [0] & [m]_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z} \quad (2.2)$$

(2.2)式より、ピア部については

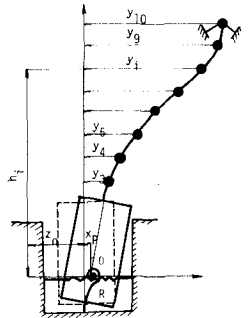


図1. タワー・ピア系

$$[m]_p \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_p \end{Bmatrix} + ([k]_p + [k]_{rr}[\{h\}|\{1\}]) \begin{Bmatrix} \theta \\ x_p \end{Bmatrix} + [k]_{rr}\{x\} = -[m]_p \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z}. \quad (2.3. a)$$

タワー部については、(2.2)式の剛性項において $[k]_{rr} + [k]_r[\{h\}|\{1\}] = [0]$ となるので

$$[m]_r \ddot{x} + [k]_r \{x\} = -[m]_r (\{h\} \ddot{\theta} + \{1\} \ddot{x}_p + \{1\} \ddot{z}). \quad (2.3. b)$$

(2.3. a), (2.3. b) 式は構造物-地盤系の動的相互作用を扱う場合の通常表現方法であるが、ピア一部については、(2.1)式から座標変換によって導いているのでタワー部の影響は慣性項に入らず剛性項に入っている。

さて、減衰効果をピア一部については、それぞれロッキング及ビスウェイに対して次式で与える。

$C_\theta = 2\beta_\theta \sqrt{k_\theta I_p}$, $C_h = 2\beta_h \sqrt{k_h m_p}$ 但し I_p, m_p はピアのR点に関する回転慣性モメント及び質量
従って、(2.3. a)式は
$$[m]_p \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} + ([k]_p + [k]_{rr}[\{h\}|\{1\}]) \begin{Bmatrix} \theta \\ x_p \end{Bmatrix} + [k]_{rr}\{x\} = -[m]_p \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{z}. \quad (2.4. a)$$

一オ、タワー部に対しては、(2.3. b)式がモード解析できると仮定して、各次モードについて、それぞれ減衰定数を考える。すなわち、減衰項を入れた(2.3. b)式を座標変換 $\{x\} = [V]\{\xi\}$ でモード座標で表わすと

$$[I]\{\ddot{\xi}\} + [2\beta_i \omega_i] \{\dot{\xi}\} + [\omega_i^2] \{\xi\} = -[V]^T [m]_r (\{h\} \ddot{\theta} + \{1\} \ddot{x}_p + \{1\} \ddot{z}). \quad (2.4. b)$$

ここで、 $[V]$ はタワー部のみのモードマトリックスで $[V]^T [m]_r [V] = [I]$, $[V]^T [k]_r [V] = [\omega_i^2]$

但し、 $[V]^T$ は $[V]$ の転置行列であり、 ω_i はタワーのみの固有振動数である。

以上のようにして導いた減衰系を、(2.1)式の形で書くと

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{F\} \ddot{z}. \quad (2.5) \text{ 但し } \{y\} = \begin{Bmatrix} \theta \\ x_p \\ y \end{Bmatrix}, \{F\} = -[m] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & 0 \\ 0 & C_h & 0 \\ 0 & 0 & ([V]^T [2\beta_i \omega_i] [V])^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

この形の減衰マトリックス作成方法は文献(3)にも述べられているが、著者らは、以前⁴⁾、実験的にピアにロッキングのみを許した場合の $[c]$ を作成し、後の解析に使用している。

3. 応答解析 (周波数領域での解析)

(2.4. a)と(2.4. b)式を連立させて解くのであるが、まず、後者のフーリエ変換をとると

$$\{\hat{y}\} = [H_i(\omega)] [V]^T [m]_r (\{h\} \hat{\theta} + \{1\} \hat{x}_p) \omega^2 + \hat{\ddot{z}} \} \quad (3.1)$$

但し、 $\hat{y} \subset \hat{y}$, $\hat{\theta} \subset \hat{\theta}$, $\hat{x}_p \subset \hat{x}_p$, $\hat{\ddot{z}} \subset \hat{\ddot{z}}$. (記号 $\hat{}$ はフーリエ変換域を表わす)で

$$H_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + i 2\beta_i \omega_i \omega}$$

また、(2.4. a)式のフーリエ変換に(3.1)式を代入し、ベクトル $\begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{x}_p \end{Bmatrix}$ について解くと

$$\begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{x}_p \end{Bmatrix} = \left[\omega^2 (-[m]_p + [k]_{rr} [V] [V]^T [m]_r [\{h\}|\{1\}]) + i \omega \begin{bmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & C_h \end{bmatrix} + [k]_p + [k]_{rr} [\{h\}|\{1\}] \right]^{-1} \cdot ([k]_{rr} [V] [V]^T [m]_r \{1\} - [m]_p \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}) \hat{\ddot{z}}. \quad (3.2)$$

あるいは、これを

$$\begin{Bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{x}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_\theta(\omega) \\ H_{x_p}(\omega) \end{Bmatrix} \hat{\ddot{z}}.$$

$$[V][H_i(w)][V]^T = [\sum_{j=1}^M H_i V_{ij} V_{ij}] \quad M < (77 - \text{部} \in - \text{ド} \text{数})$$

(3.2)式の複素数マトリックスの逆行列は、マトリックスの大きさが (2×2) であるので容易に求まる。次に、タワ-部モードについては、(3.2)式を(3.1)式に代入して

$$z \triangleq \{H_{b_i}(\omega)\} = [H_i(\omega)][V]^T[m]_T \left([\{h\}][1] \right) \begin{Bmatrix} M_{\theta}(\omega) \\ M_{\gamma p}(\omega) \end{Bmatrix} \omega^2 + [1] \Bigg)$$

7. 例 5 $E[\{\tilde{y}\}\{\tilde{y}\}^T] = E\left[\begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ x_p \\ \tilde{y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ x_p \\ \tilde{y} \end{Bmatrix}^T\right] = [T] E\left[\begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ x_p \\ \tilde{y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ x_p \\ \tilde{y} \end{Bmatrix}^T\right] [T] \quad (3.4) \quad \text{また } [T] = \begin{bmatrix} [I] & [O] \\ [h\{1\}] & [V] \end{bmatrix}$

$$E[\{YH\}^T] = \int_{-\infty}^{\infty} [S_Y] d\omega \quad (3.5) \quad \text{但 } [S_Y] = [T] \begin{bmatrix} [\{H_0\} \{H_0^*\}] & [\{H_0\} \{H_0^{*T}\}] \\ [\{H_0\} \{H_0^*\}] & [\{H_0\} \{H_0^{*T}\}] \end{bmatrix} [T] S_{\Sigma}(\omega) \quad (3.6)$$
$$E[\theta^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\theta}(w)|^2 S_{\ddot{x}_0}(w) dw \quad E[x_p^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{x_p}(w)|^2 S_{\ddot{x}_0}(w) dw \quad (3.7)$$

ここで、 m はロッキングバネに対してはR点に関するピアーの慣性モーメント I_P を、またスウェーイバネに対してはピアーの質量 m_P をとる。そして

で、 ω_0 は「 $\omega_{\text{キング}}$ 」に対しては $\omega_0 = \sqrt{K_\theta / I_p}$ を、スウェイに対しては $\omega_H = \sqrt{K_H / m_p}$ であり、

$$\text{但 } E\left[\frac{w^2}{Y^2} \mid A=U\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} & u \leq Y \\ 1 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{3U}{2Y} \left(\frac{U}{Y} - \frac{4}{3} \right) \cos^{-1}(1 - 2\frac{Y}{U}) - (3\frac{U}{Y} - 2) \left(\frac{U}{Y} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] & u > Y \end{cases}$$

— 227 —

$$\beta_{eq} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_q}\right)^3 \left\{ \beta_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega_q}\right)^2 + \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} (1-\alpha) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{\delta_x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{\delta_x}\right) \right\} \quad (3.11)$$

ここに $\operatorname{erfc}(\cdot)$ は余誤差関数で、 $\operatorname{erfc}(v) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v \exp(-t^2) dt$ で定義され、減衰定数 β_0 はロッキングに対しては β_0 、スウェイトに対しては β_H である。以上の等価線形化法の精度は従来の狭帯域応答を仮定した Krylov-Bogoliubov 法よりずうと優れていることを付記する。

さて、外力に対して (3.7) 式からピア一の応答を求め、応答値 δ_x/γ によって、等価回転バネ、並進バネ剛性及び等価粘性減衰定数を (3.8) ~ (3.11) 式より得る。そして、この繰り返しの、等価バネ剛性、等価粘性定数がある値に収束するまで行なう。この過程において、(3.2) 式の逆行列を毎回計算しなければならぬが、その大きさが (2×2) であるため全体系で行なうよりずうと有利である。著者らは双一次履歴系には最小応答を不ず靱性率が存在することを発見しており、地盤のこの非線形性が上部構造に対しても同様にあてはまることをつきとめている。

4. 複素モード応答解析と近似モード応答解析

一般に、応答解析には全体系 (タワー-ピア系) をモード分解し、各次モードに通切は減衰定数を与えるのが実際の耐震設計においては都合が良いと思われる。しかし、タワー部とピア部はそれぞれ独立に減衰効果を仮定しているために、(2.5) 式において減衰項によるモード間連成が生じ厳密な意味でモード解析ができない。この節では、複素モード解析結果と近似モード解析結果との比較を通して、後者の減衰定数決定法について述べる。

式 (2.5) を解くに $\{u\}^T = \{\dot{y}\}^T \{y\}^T$ は状態ベクトルを導入する⁷⁾

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{P\} \quad (4.1) \quad \text{あるいは} \quad \{\dot{u}\} = -[D]\{u\} + \{Q\} \quad (4.1')$$

$$\text{但し} \quad [A] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \quad \{P\} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \ddot{x}_0 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} [m]^{-1}[c] & [m]^{-1}[k] \\ -[I] & [0] \end{bmatrix} \quad \{Q\} = [A]^{-1}\{P\}$$

$$(4.1) \text{ 式は座標変換} \quad \{u\} = [\Phi]\{r\} \quad (4.2)$$

$$\text{により} \quad \{\dot{r}\} + [\lambda_j][r] = [\Phi]^{-1}\{P\} \quad (4.3)$$

但し、 λ_j は (4.1') 式より $|[D] - \lambda[I]| = 0$ で得られる複素固有値であり、一般に

$$\lambda_j = \mu_j \pm i\nu_j \quad (\mu_j > 0) \quad (4.4)$$

で、 μ_j は減衰効果を、 ν_j は固有振動数を表す。また $[\Phi]$ は対応する複素固有ベクトルからなる複素モードマトリックスである。(4.2), (4.3) 式から外力 $\ddot{x}_0$ に対する応答共分散マトリックスが得られるが (付録1参照)、これらは (3.5) 式から計算されるものと同じであることはいふまでもない。以後これらを厳密解と呼ぶ。

次に、(4.4) 式の固有値が通常のモード解析において、いかなる対比をはずかをみる。(2.1) 式の固有モードマトリックス $[\Psi]$ を用いて、すなわち $\{y\} = [\Psi]\{\xi\}$ で、(2.5) 式を座標変換し、前から $[\Psi]^T$ を乗じて

$$[I]\{\dot{\xi}\} + [\zeta]\{\xi\} + [\omega_j^2]\{\xi\} = [\Psi]^T\{F\} \ddot{x}_0 \quad (4.5)$$

ここで $[\Psi]^T[m][\Psi] = [I]$, $[\Psi]^T[c][\Psi] = [\zeta]$, $[\Psi]^T[k][\Psi] = [\omega_j^2]$ を使用している。 ω_j は全体系の非減衰固有振動数であり、減衰マトリックス $[\zeta]$ は一般に非対角要素が残る。よって全体

系の振動方程式は、

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \tilde{c}_{11}\lambda & \cdots & -\tilde{c}_{1N}\lambda \\ -\tilde{c}_{21}\lambda & A_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -\tilde{c}_{N1}\lambda & \cdots & A_N \end{vmatrix} = 0 \quad \text{但し } A_j = \lambda^2 - \tilde{c}_{jj}\lambda + \omega_j^2 \quad (4.6)$$

そして、これの展開は

$$\Delta = \prod_{j=1}^N A_j + O(\tilde{c}_{ij}, \lambda) \quad (4.6)'$$

上式において、非対角要素は一般には対角要素に比べて小さく、振動方程式には2次微小項とらえて表われる。もし、(4.6)式で全ての非対角要素が対角要素に比べて無視できる程小さいならば

$$\lambda_j = \tilde{s}_j \omega_j \pm i \omega_{jd} \quad (4.7) \quad \text{但し } \tilde{s}_j = \tilde{c}_{jj}/2\omega_j, \quad \omega_{jd} = \sqrt{1 - \tilde{s}_j^2} \omega_j$$

(4.4), (4.7)式間の対応関係から、この場合モード解析がよい近似で成り立つ。しかし、そうではないときは、モード間の連成振動効果を評価しなければならぬ。本論文で対象としているタワー・ピアー系は、地盤条件によってその動的特性が大きく影響され、低次モード間において固有振動数の接近あるいは分離という現象が生じる¹⁾。しかも、接近の生じるのはピアーのみのロッキングあるいはスウェイの固有振動数が、タワーのみのどれかのモードの固有振動数に接近した状況で起こるということである。以前の著者らの研究¹⁾では、前者の耐震設計上の重要性を指摘した。また、モードが接近した場合については、(4.4)式、(4.7)式から得られる減衰定数を上の非減衰モードに使用して応答解析結果を、モード間の位相を考慮したとき、しばしば(これは通常R.M.S.応答と呼ばれる)について比較している⁸⁾。そして、実耐震設計においては、いわゆる応答スペクトルが使用される都合上、(4.7)式の減衰定数を採用してR.M.S.応答を近似応答値として用いることを提案した。本論文では、これを更に改良する二つの試みを述べる。

まず、モード間連成振動効果を各次モードに配分するため(4.5)式を次のように表わす。

$$[I]\{\ddot{\xi}\} + [(2\tilde{s}_j\omega_j)]\{\dot{\xi}\} + [\omega_j^2]\{\xi\} + \{E[\{\xi\}\{\xi\}^T]\} = [\Psi]^T[F]\ddot{x} \quad (4.8)$$

ここで $\tilde{\omega}_j$ と $\tilde{s}_j$ は誤差ベクトル $\{E\}$ を最小ならしめるように選ばれ、それぞれ等価な固有振動数及び減衰定数と呼ぶ。これは、非線形系の等化線形化の一手法の応用であり、 $\tilde{\omega}_j$ と $\tilde{s}_j$ は

$$\frac{\partial E[\{\xi\}^T\{\xi\}]}{\partial (2\tilde{s}_j\omega_j)} = 2E[\varepsilon_j \dot{\xi}_j] = 0 \quad \frac{\partial E[\{\xi\}^T\{\xi\}]}{\partial \tilde{\omega}_j^2} = 2E[\varepsilon_j \xi_j] = 0 \quad (4.9)$$

から得られ、応答の定常確率過程を考慮すると

$$\tilde{\omega}_j^2 = \omega_j^2 + \frac{\sum \tilde{c}_{jk} E[\dot{\xi}_j \dot{\xi}_k]}{E[\dot{\xi}_j^2]} \quad \tilde{s}_j = \frac{\sum \tilde{c}_{jk} E[\dot{\xi}_j \xi_k]}{2\tilde{\omega}_j E[\dot{\xi}_j^2]} \quad (4.9)'$$

上式で $E[\xi_j \xi_k]$ $E[\dot{\xi}_j \dot{\xi}_k]$ 及び $E[\xi_j \dot{\xi}_k]$ は(4.5)式から得られる応答共分散マトリックスである。従って、前もってモード連成系の応答厳密解を求め、この方法は実際的とはいえないが、他の手法から得られる等価なモード非連成系の固有振動数、減衰定数と比較する一つの基準となろう。

次に実際的な方法として、対象としているタワー・ピアー系が、耐震設計上重要となるモードのうち二つのモードのみが接近するという事実を利用する。そこで、(4.5)式を近似的に次のように書く。

接近した二つのモード(連成が強い)に対して

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \ddot{z}, \quad \text{但し } \{F\} = [\Psi]^T \{F\} \quad (4.10.a)$$

他のモード（連成が弱い）に対して

$$[I] \{\ddot{q}\} + [\tilde{c}_{jj}] \{\dot{q}\} + [\omega_j^2] \{q\} = \{F\} \ddot{z}. \quad (4.10.b)$$

(4.10.a) 式から応答を求めるに当り、振動系の外力の振動数成分吸収が固有振動数近傍でのみ行なわれるとする。これは軽減要素の場合には、外力の振動数特性が系のそれに比較してかなり広帯域であるためあまり誤差を生じない。しかも、上式で $\omega_1 \approx \omega_2$ であるから white noise 外力を想定する。よって

$$E[q_1^2] = \frac{\pi S_{F_1}}{\omega_1^4} \frac{\tilde{c}_{22}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22})\{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21}\}\omega_1^2 + (\tilde{c}_{22} - \frac{F_2}{F_1}\tilde{c}_{12})^2\omega_1^2}{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22})(\tilde{c}_{22}\omega_1^2 + \tilde{c}_{11}\omega_2^2)(\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21})} \quad (4.11)$$

ここで S_{F_1} は外力 $F_1 \ddot{z}$ のパワースペクトル密度である。また応答 $E[q_1^2]$ は (4.11) 式で $\tilde{c}_{11} \rightarrow \tilde{c}_{22}$, $\tilde{c}_{22} \rightarrow \tilde{c}_{11}$, $\tilde{c}_{12} \rightarrow \tilde{c}_{21}$, $\tilde{c}_{21} \rightarrow \tilde{c}_{12}$, $F_1 \rightarrow F_2$ とすればよい。ところで、1 自由度系

$$\ddot{q}_1 + 2\check{\zeta}_1 \omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = F_1 \ddot{z}, \quad \text{の応答は} \quad E[q_1^2] = \frac{\pi S_{F_1}}{2\check{\zeta}_1 \omega_1^4} \quad (4.12)$$

で与えられるので、(4.11), (4.12) 式を等値とすると減衰定数 $\check{\zeta}_1$ は

$$\check{\zeta}_1 = \frac{1}{2\omega_1} \cdot \frac{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22})(\tilde{c}_{22}\omega_1^2 + \tilde{c}_{11}\omega_2^2)(\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21})}{\tilde{c}_{22}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22})\{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21}\}\omega_1^2 + (\tilde{c}_{22} - \frac{F_2}{F_1}\tilde{c}_{12})^2\omega_1^2} \quad (4.13.a)$$

さらに $\omega_1 = \omega_2$ とすると近似的に

$$\check{\zeta}_1 \approx \frac{1}{2\omega_1} \cdot \frac{(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22})(\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21})}{(\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_{21}) + (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{21})^2} \quad (4.14)$$

同様にして $\check{\zeta}_2$ も算定される。なお、連成が無視できるモードに対しては (4.10.b) 式より

$$\check{\zeta}_j = \tilde{c}_{jj} / 2\omega_j \quad (4.13.b)$$

著者らの以前の研究結果では、耐震上重要なモードに対して (4.9) 式より得られた $\check{\omega}_j$ と ω_j 、また $\check{\zeta}_j$ と ζ_j との間にはあまり差がなく、(4.13.a), (4.13.b) を用いることができてを示している。

さて、以上の減衰定数 $\check{\zeta}_j$ を各次モード系に採用して全体系の応答を近似的に求めることができる。不規則振動論におけるスペクトル解析法から、振動系の応答と外力の関係は振動数領域で

$$[S_g] = [\Theta][S_F][\Theta^*]^T \quad (4.15)$$

ここで $[\Theta]$ は系のレセプタンス・マトリックスで $[\Theta^*]^T$ はその共役転置したものである。そして、

$$[\Theta] \text{ はモード解析が可能ならば } [\Theta] = [\Psi][H_g][\Psi]^T \quad (4.16)$$

但し、 $[H_g]$ の要素は

$$H_{g_j}(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 + i 2\check{\zeta}_j \omega_j \omega} \quad (4.17)$$

$$(4.15) \text{ 式は Wiener-Kintchine の関係より } E[\{g\}\{g\}^T] = [\Psi]([S_g] \otimes [J])(\Psi)^T \quad (4.18)$$

ここで記号 $\otimes$ はマトリックスの乗法で要素ごとのそれを意味する。そして white noise 外力に対しては

$$[S_F] = [\Psi]^T [\{F\}\{F\}^T] [\Psi] \quad (4.19)$$

$$J_{ij} = \frac{4\pi(\check{\zeta}_i \omega_i + \check{\zeta}_j \omega_j) S_0}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4(\check{\zeta}_i \omega_i + \check{\zeta}_j \omega_j)(\check{\zeta}_i \omega_j + \check{\zeta}_j \omega_i) \omega_i \omega_j} \quad (4.20)$$

また、共分散マトリックス $\{g\}\{g\}^T$, $E[\{\hat{g}\}\{\hat{g}\}^T]$ の計算には (4.20) 式に代わって

$$\ddot{J}_{ij} = \frac{2\pi(\omega_i^2 - \omega_j^2)S_0}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4(\xi_i\omega_i + \xi_j\omega_j)(\xi_i\omega_j + \xi_j\omega_i)\omega_i\omega_j} \quad (4.21)$$

$$\text{あるいは } \ddot{J}_{ij} = \frac{4\pi(\xi_i\omega_j + \xi_j\omega_i)\omega_i\omega_j S_0}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4(\xi_i\omega_i + \xi_j\omega_j)(\xi_i\omega_j + \xi_j\omega_i)\omega_i\omega_j} \quad (4.22)$$

を用いればよい。(4.15)式の計算に当って、注意しなければならぬことは、上の減衰定数 ξ_j を各モードの完全な独立性を前提として求めているので、モード間の位相効果を無視せねばならないということである。これは、応答解析に、いわゆる応答スペクトル図が、いかなる場合も使用可能を意味する。以前の著者らの研究結果では、(4.18)式の結果は、二つのモードが接近した場合、厳密解(付録の(A・6)式より計算)に対して、単に(4.5)式の方角要素を無視したR.M.S.応答値より良い、しかも安全側の近似となっている。モードが良く分離していると、当然のことながら(4.13.a)式は(4.13.b)の形となり、モード間連成は考慮しなくて良いことになる。なお、実地震記録を入力した場合にも、上の減衰定数は使用し得ることを認めている。

5. 結論

本論文は、長大つり橋のタワー・ピアー系を例にとりて、地盤の非線形復元力特性の上部構造に与える影響、及び下部構造と上部構造の減衰の違いを考慮した全体系の応答解析法、並びに実耐震設計における近似応答解析法について述べたものである。前者については、地盤の非線形性が直接上部構造に現われ、双一次復元系を仮定すると、双一次復元系と同様な最小応答の靱性率が存在する。また後者については、(4.13.a)、(4.13.b)式で得る減衰定数をモード解析に用いてR.M.S.応答値を得れば、十分な近似度の実耐震設計が可能である。こうした解析結果は耐震設計上重要な意義を有すると思われる。

以上の結論は、参考文献に掲げる著者らの最近の研究成果から総合したものである。ここでは、減衰マトリックスの作成が本論に提案するものと異なっているため、計算結果については、忠実性を期するため、改めてやり直しをしている。発表当日スライドで用意する予定である。

参考文献

- 1) 山田・竹宮: "不規則外力による多自由度系の応答解析とその長大つり橋タワー・ピアー系の耐震解析への応用," 土木学会論文報告集 第163号, 1969年3月, pp. 17-27
- 2) 小西・山田・高岡・国広: "長大スパンつり橋タワーの耐震計算法に関する研究," 土木学会論文集 第104号, 昭39.4月, pp. 9-17
- 3) Pajuhesh, J., and Hadjian, A.H.: "Determination of Composite Damping Matrices", 5 WCEE, June, 1973, Rome, Italy
- 4) 山田・竹宮・エ谷: "長大つり橋タワー・ピアー系の減衰機構について," 第25回年次学術講演会講演集, I-185, pp. 543-544
- 5) Lutes, L.D., and Takemiya, H.: "Random Vibration of a Yielding Oscillator", ASCE, EM Division 投稿中

- 6) Caughey, T.K.: "Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis", J. of Appl. Mech., ASME, Vol.27, 1960, pp.649-652
- 7) Foss, K.A.: "Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Systems", J. of Appl. Mech., ASME, 1958, pp.361-364
- 8) Yamada, Y., Goto, Y., and Takemiya, H.: "Studies on the Earthquake-Resistant Design of Suspension Bridge Tower and Pier System", 5WCEE, June, 1973, Rome, Italy
- 9) Yamada, Y., and Takemiya, H.: "Random Response Analyses of Multi-degree-of-freedom Systems with Non-proportional Damping and Its Application to the Tower-and-pier System of Long-span Suspension Bridges", 関東地震 50 周年記念地震工学シンポジウム論文集, 1973年8月, pp.373-380

付録. 応答共分散マトリックスの計算法2

ここでは、(4.1)式の複素固有値解析より全体系の応答共分散マトリックスを算出する方法について述べる。応答 $\{u\}$ の共分散マトリックスは、もとの座標 $\{\dot{y}\}$, $\{\dot{z}\}$ のそれと

$$E[\{u\}\{u\}^T] = \begin{bmatrix} E[\{\dot{y}\}\{\dot{y}\}^T] & E[\{\dot{y}\}\{\dot{z}\}^T] \\ (E[\{\dot{y}\}\{\dot{y}\}^T])^T & E[\{\dot{z}\}\{\dot{z}\}^T] \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

$$\text{で与られ、(4.2)式より } E[\{u\}\{u\}^T] = [\Phi] E[\{r\}\{r\}^T] [\Phi]^T \quad (A.2)$$

ところで、複素モード $\{r\}$ の周波数応答関数は(4.3)式より

$$H_{r_i}(\omega) = \frac{1}{\lambda_i + i\omega} \quad (A.3)$$

であるので、(A.2)式のフーリエ変換対をなすパワー・スペクトル密度マトリックスは

$$[S_u] = [\Phi] [H_r] [H_r]^* [\Phi]^T [S_r] [\Phi] [H_r]^* [\Phi]^T \quad (A.4)$$

となる。ここに $[S_r] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [S_F] \end{bmatrix}$ 但し、 $[S_F] = \{\{F\}\{F\}^T\} S_{\ddot{z}_0}(\omega)$

(A.2) 式は、モード・マトリックス $[\Phi]$ が変位 $\{\dot{y}\}$ と速度 $\{\dot{z}\}$ のものに分けられることを考慮すると、すなわち

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [\Phi_d] & [\lambda] \\ & [\Phi_d] \end{bmatrix}$$

ここに $[\Phi_d]$ は $\{\dot{y}\}$ のみに関する複素モード・マトリックスである。これを(A.4)式に用いると

$$\begin{bmatrix} [S_{\dot{y}}] & [S_{\dot{y}\dot{z}}] \\ [S_{\dot{y}\dot{z}}]^T & [S_{\dot{z}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_d][\lambda][H_r][\Phi_d]^T[S_F][\Phi_d][H_r]^*[\Phi_d]^T & [\Phi_d][\lambda][H_r][\Phi_d]^T[S_F][\Phi_d][H_r]^*[\Phi_d]^T \\ [\Phi_d][H_r][\Phi_d]^T[S_F][\Phi_d][H_r]^*[\lambda][\Phi_d]^T & [\Phi_d][H_r][\Phi_d]^T[S_F][\Phi_d][H_r]^*[\Phi_d]^T \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

上式の $[S_{\dot{y}}]$ が(3.6)式のパワー・スペクトル密度マトリックスと同一であることはいうまでもない。

Wiener-Kintchine の関係(3.5)式より(A.1)式の応答共分散マトリックスは求まる。いま、外力に white noise を仮定すると、それは留数積分を使って容易に求まり

$$E[\{\dot{y}\}\{\dot{y}\}^T] = 2 \sum_{i=1}^{2N-1} \sum_{j=1}^{2N} \mathcal{O}_e(I_{ij} \{\Phi_d^{(i)}\} \{\Phi_d^{(j)}\}^T [S_F] \{\Phi_d^{(i)}\} \{\Phi_d^{(j)}\}^T) \quad (A.6)$$

ここで $I_{ij} = \frac{S_0}{\lambda_i + \lambda_j}$ 但し、 S_0 は $\ddot{z}_0$ の white noise レベルである。

また、著者らは、この結果が別な方法で得られることも発表している。⁹⁾