

# 差分法による周辺弾性支持扇形平板の解析

九州大学大学院 ○大塚久哲

工学部 安藤 司

## 1. まえがき

扇形平板とそれを弾性的に支持するはりとかうなる複合構造物は、例えば曲線高架橋の工部エヤ円形ビルディングの床板とはり等に見受けられるが、この種複合構造物においては、板とはりとの間に力およびモーメントが相互に作用しあり、その力学的挙動は複雑な様相を呈するものと考えられる。したがってそれぞれの構造要素間の影響を無視して別々に解析を行なうことは不合理であり、平板と弾性支持はりとの相互作用を考慮して解析することが、この種構造物の力学的特性を把握するうえには是非必要であるといえる。

周辺が弾性ばりにて支持される矩形板の解析は古くから行なわれている。まず板と弾性支持はりとの間に垂直力のみが伝達される複合構造物の挙動については、級数を使って Fuchs<sup>(1)</sup>により、差分法を使って Wood<sup>(2)</sup>により論じられている。さらに、板とはりとは偏に結合されている場合、両者の間には垂直力のみならず水平剪断力も伝達されることになるが、この水平剪断力をも解析にあたって考慮したものとすは Allen & Seier<sup>(3)</sup> (級数解)、および Kran & Kemp<sup>(4)</sup> (差分解) 等の研究があげられる。

しかしながら扇形平板とそれを弾性的に支持する曲りばりおよび直線ばりとかう構成される複合構造物に関する研究はあまりあてなわれていないようである。扇形平板は板自体としても矩形板とは異なった特性を有しており、それが周辺を曲りばりおよび直線ばりで支持されるとき、その力学的挙動には興味をもたれる。したがって本論文は、板の隅角部4点が支持され、その2対辺が直線ばり、他の2対辺が曲りばりでそれぞれ弾性支持される扇形平板の解析法を提示し、この種複合構造およびそれらを基本構とする構造などの力学的特性を把握することと目的としている。

解析手法としては、代表的近似解法の一つである差分法を採用している。

解析に使われた仮定および電算による数値計算結果の妥当性を吟味する為、プラスチック模型による実験をおこなったので、その結果もあわせて報告する。

## 2. 解 法

### (1) 基礎微分方程式および断面力の差分化

図-1に示すように扇形平板が、隅角部4点で支持され、2直線辺で直線ばり、2円弧辺で曲りばりにて弾性支持されているものとする。いま扇形平板の中心Oを原点とする円筒座標 $(r, \theta, z)$ を導入し、微小変形薄板理論に従えば、 $z$ 軸方向のたわみ $w$ を求めるための基礎微分方程式は、板が等方性のとき次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = \frac{p(r, \theta)}{D} \dots (1)$$

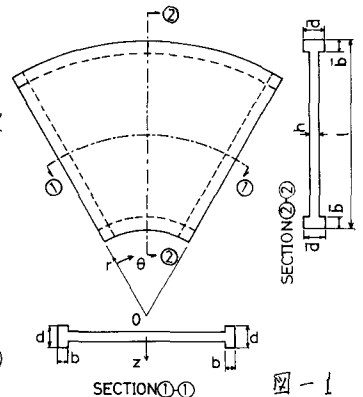


図-1

ここに  $P(r, \theta)$ : 垂直荷重,  $D = E_p h^3 / 12(1 - \nu^2)$ : 板剛度,  $E_p$ : ヤング率,  $h$ : 板厚,  $\nu$ : ポアソン比, また半径方向および接線方向の板の曲げモーメント  $M_r, M_\theta$  と、半径方向および接線方向の板反力  $V_r, V_\theta$  も同様に次式で与えられる。

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad \dots (2)$$

$$M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right] \quad \dots (3)$$

$$V_r = -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 W}{\partial r^2} - \frac{3-\nu}{r^3} \frac{\partial W}{\partial \theta^2} + \frac{2-\nu}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} \right] \quad \dots (4)$$

$$V_\theta = -D \left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} + \frac{2}{r^3} (1-\nu) \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{2-\nu}{r} \frac{\partial^3 W}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2\nu-1}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} \right] \quad \dots (5)$$

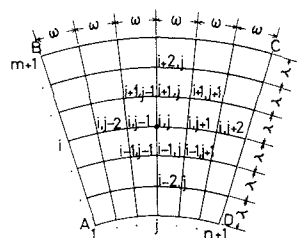


図 - 2

図-2に示すように扇形平板を放射状格子に分割し、図のような格点番号を付すとき、格点  $(i, j)$  において式(1)~(5)を差分式に変換すれば次に示す(6)~(10)式を得る。

$$a_1 W_{i+2,j} + a_2 (W_{i+1,j-1} + W_{i+1,j+1}) + a_3 W_{i+1,j} + a_4 (W_{i,j-2} + W_{i,j+2}) + a_5 (W_{i,j-1} + W_{i,j+1}) + a_6 W_{i,j} + a_7 (W_{i-1,j-1} + W_{i-1,j+1}) + a_8 W_{i-1,j} + a_9 W_{i-2,j} = P \lambda^4 / D \quad \dots (6)$$

ここに  $a_1 = 1 + \lambda^2 / r_i^2$ ,  $a_2 = 2K^2(1 - \lambda/2r_i) / r_i^2$ ,  $a_3 = -4(1 + \lambda/2r_i) - (1 - \lambda/2r_i)(\lambda^2 + 4K^2) / r_i^2$ ,  $a_4 = K^4 / r_i^4$ ,  $a_5 = -4K^2 \{ 1 - (\lambda^2 - K^2) / r_i^2 \} / r_i^2$ ,  $a_6 = 2 \{ 3 + (\lambda^2 + 4K^2) / r_i^2 - K^2(4\lambda^2 - 3K^2) / r_i^4 \}$ ,  $a_7 = 2K^2(1 + \lambda/2r_i) / r_i^2$ ,  $a_8 = -4(1 - \lambda/2r_i) - (1 + \lambda/2r_i)(\lambda^2 + 4K^2) / r_i^2$ ,  $a_9 = 1 - \lambda^2 / r_i^2$ ,  $\lambda = \ell / m$ ,  $\omega = \theta_0 / n$ ,  $K = \lambda / \omega$ ,  $\ell$ : 直線辺長,  $m$ : 半径方向分割数,  $\theta_0$ : 中心角,  $n$ : 接線方向分割数,  $r_i$ : 中心 O より格点  $(i, j)$  までの距離。

$$M_r(i, j) = b_1 W_{i+1,j} + b_2 (W_{i,j-1} + W_{i,j+1}) + b_3 W_{i,j} + b_4 W_{i-1,j} \quad \dots (7)$$

ここに  $b_1 = -D(1 + \nu\lambda/2r_i) / \lambda^2$ ,  $b_2 = -D\nu K^2 / \lambda^2 r_i^2$ ,  $b_3 = 2D(1 + \nu K^2 / r_i^2) / \lambda^2$ ,  $b_4 = -D(1 - \nu\lambda/2r_i) / \lambda^2$ 。

$$M_\theta(i, j) = \bar{b}_1 W_{i+1,j} + \bar{b}_2 (W_{i,j-1} + W_{i,j+1}) + \bar{b}_3 W_{i,j} + \bar{b}_4 W_{i-1,j} \quad \dots (8)$$

ここに  $\bar{b}_1 = -D(\nu + \lambda/2r_i) / \lambda^2$ ,  $\bar{b}_2 = -DK^2 / \lambda^2 r_i^2$ ,  $\bar{b}_3 = 2D(\nu + K^2 / r_i^2) / \lambda^2$ ,  $\bar{b}_4 = -D(\nu - \lambda/2r_i) / \lambda^2$ 。

$$V_r(i, j) = c_1 W_{i+2,j} + c_2 (W_{i+1,j-1} + W_{i+1,j+1}) + c_3 W_{i+1,j} + c_4 (W_{i,j-1} + W_{i,j+1}) + c_5 W_{i,j} + c_6 W_{i-1,j} - c_7 W_{i-2,j} - c_8 (W_{i-1,j-1} + W_{i-1,j+1}) \quad \dots (9)$$

ここに  $c_1 = -D/2\lambda^3$ ,  $c_2 = -DK^2(2-\nu)/2\lambda^3 r_i^2$ ,  $c_3 = D \{ 1 - \lambda/r_i + \lambda^2/2r_i^2 + (2-\nu)K^2/r_i^2 \} / \lambda^3$ ,  $c_4 = (3-\nu)DK^2/\lambda^2 r_i^3$ ,  $c_5 = 2D \{ 1 - (3-\nu)K^2/r_i^2 \} / \lambda^2 r_i$ ,  $c_6 = -D \{ 1 + \lambda/r_i + \lambda^2/2r_i^2 + (2-\nu)K^2/r_i^2 \} / \lambda^3$ 。

$$V_\theta(i, j) = \bar{c}_1 (W_{i+1,j-1} - W_{i+1,j+1}) + \bar{c}_2 (W_{i,j-2} - W_{i,j+2}) + \bar{c}_3 (W_{i,j-1} - W_{i,j+1}) + \bar{c}_4 (W_{i-1,j-1} - W_{i-1,j+1}) \quad \dots (10)$$

ここに  $\bar{c}_1 = DK \{ (2\nu-1)\lambda/2r_i + 2-\nu \} / 2\lambda^3 r_i$ ,  $\bar{c}_2 = D/2r_i^3 \omega^3$ ,  $\bar{c}_3 = -DK \{ K^2/r_i^2 + (\nu-1)\lambda^2/r_i^2 + 2-\nu \} / \lambda^3 r_i$ ,  $\bar{c}_4 = -DK \{ (2\nu-1)\lambda/2r_i + \nu-2 \} / 2\lambda^3 r_i$ 。

(2) 境界条件式

図-2に示すように $(m+1) \times (n+1)$ の放射状格子に分割された扇形平板の各格点におけるたわみ $w$ を求める差に、支持されている4隅角部の格点を除くすべての格点において式(6)をたてなければならぬが、板端近傍および板端上の格点において(6)式は、板外の仮想格点のため $w$ も未知量として含むことになる。したがってこれを消去するために仮想板外格点の数だけ境界条件式が必要となるが、板とはりの結合部および隅角部において力およびモーメントの釣合と隅角部における拘束条件をそれぞれ考えれば、次に示すように境界条件式が求められる。なお本論文における境界条件式は、図-3、図-4に示すように板とはりの中立軸が一致するように結合された構造を考えた誘導している。

#### α) 直線辺における境界条件式

扇形平板と直線はりの結合部の微小要素に作用する力およびモーメントを図示すれば図-3のように表わせる。いま直線はりの幅 $b$ は無視できる程小さいものと考えて、この微小要素において $z$ 軸方向の力の釣合式、および $r$ 軸まわりのモーメントの釣合式を立てれば次の2式を境界条件式として得る。

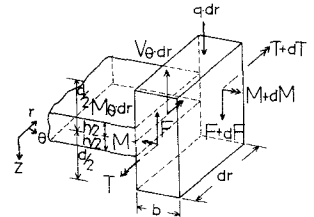


図-3

$$V_\theta - \bar{q} - dF/dr = 0 \quad \dots (11)$$

$$M_\theta + dT/dr = 0 \quad \dots (12)$$

ここに、 $V_\theta, M_\theta$  :  $\theta$ 方向板反力および曲げモーメント(単位長さあたり)、 $\bar{q}$  : はりに作用する単位長さあたり垂直荷重、 $F, T$  : はりのせん断力およびねじりモーメント。

上記の2式を格点 $(i, j)$ において差分式に変換すれば次の(13)および(14)式を得る。

$$d_1(W_{i+2,j} + W_{i-2,j}) + d_2(W_{i+1,j-1} - W_{i+1,j+1}) + d_3 W_{i+1,j} + d_4(W_{i,j-2} - W_{i,j+2}) + d_5(W_{i,j-1} - W_{i,j+1}) + d_6 W_{i,j} + d_7(W_{i-1,j-1} - W_{i-1,j+1}) + d_8 W_{i-1,j} = \bar{q} \lambda^3 / D \quad \dots (13)$$

ここに  $d_1 = Hr/m$ ,  $Hr = E_0 I_0 / Dm\lambda$ ,  $E_0 I_0$  : 直線はりの曲げ剛性,  $d_2 = K\{1 - \nu/2 + (2\nu - 1)\lambda/4r_1\}/r_1$ ,  $d_3 = -4d_1$ ,  $d_4 = K^3/2r_1^3$ ,  $d_6 = 6d_1$ ,  $d_5 = -K\{K^2/r_1^2 + 2 - \nu + (\nu - 1)\lambda^2/r_1^2\}/r_1$ ,  $d_7 = K\{1 - \nu/2 + (1 - 2\nu)\lambda/4r_1\}/r_1$ .

$$e_1(W_{i+1,j-1} - W_{i+1,j+1} + W_{i-1,j-1} - W_{i-1,j+1}) + e_2 W_{i+1,j} + e_3 W_{i,j-1} + e_4 W_{i,j} + e_5 W_{i,j+1} + e_6 W_{i-1,j} = 0 \quad \dots (14)$$

ここに  $e_1 = -J_r m$ ,  $J_r = G_0 C_0 / Dm\lambda$ ,  $G_0 C_0$  : 直線はりのねじり剛性,  $e_2 = -r_1(\lambda/r_1 + 2\nu)/K$ ,

$e_3 = 2(J_r m - K/r_1)$ ,  $e_4 = 4r_1(K^2/r_1^2 + \nu)/K$ ,  $e_5 = -2(J_r m + K/r_1)$ ,  $e_6 = r_1(\lambda/r_1 - 2\nu)/K$ .

他の直線辺においても同様に境界条件式が誘導される。その結果は(13)、(14)式において、係数を格点 $j$ に同じく左右入れ替えたものに等しい。

#### β) 円弧辺における境界条件式

扇形平板と内側曲りはりの結合部の微小要素に作用する力およびモーメントは図-4のように表わせる。いま前項α)と同様に曲りはりの幅 $b$ も無視できるほど小さいものとしてこの微小要素に作用する力およびモーメントの釣合を考えれば以下に示す3箇の釣合式を得る。

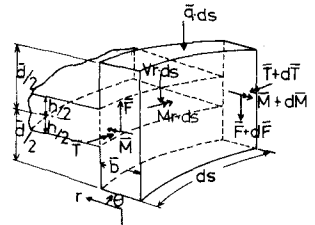


図-4

$$z \text{ 軸方向の力の釣合より, } V_r + \bar{q} + dF/ds = 0 \quad \dots (15)$$

$$\theta \text{ 軸まわりのねじりモーメントの釣合より, } dT/ds + M/R - Mr = 0 \quad \dots (16)$$

$$\text{曲りはりの中立軸における曲げモーメントの釣合より, } dM/ds - T/R - F = 0 \quad \dots (17)$$

$$(15) \text{ および } (17) \text{ 式から } F \text{ を消去すると, } V_r + \bar{q} + d^2 M/ds^2 - 1/R \cdot dT/ds = 0 \quad \dots (18)$$

ここに、 $V_r, M_r$ :  $r$  方向板反力および曲げモーメント(単位長さあたり)、 $\bar{r}$ : 曲りばりに作用する単位長さあたり垂直荷重、 $R$ : 曲りばりの半径、 $F, \bar{F}, \bar{T}$ : 曲りばりのせん断力、曲げモーメントおよびねじりモーメント。

さらに曲りばりの断面力  $\bar{F}, \bar{T}$  と変形量との関係を考慮すれば、式(16)および式(18)は次式のように書き表わされる。

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{\bar{E}_b \bar{I}_b}{D} + \frac{\bar{G}_b \bar{C}_b}{D} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\bar{E}_b \bar{I}_b}{D} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R} \frac{\bar{G}_b \bar{C}_b}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} - R \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0 \quad \cdots (19)$$

$$\frac{1}{R^4} \frac{\bar{E}_b \bar{I}_b}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{1}{R^3} \left( \frac{\bar{E}_b \bar{I}_b}{D} + \frac{\bar{G}_b \bar{C}_b}{D} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{R^4} \frac{\bar{G}_b \bar{C}_b}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{3-\nu}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2-\nu}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] = \frac{\bar{r}}{D} \quad \cdots (20)$$

ここに、 $\bar{E}_b \bar{I}_b, \bar{G}_b \bar{C}_b$ : 曲りばりの曲げ剛性およびねじり剛性。

上式(19)および式(20)を差分化すれば、内側円弧边上の境界条件式として次の2式を得る。

$$f_1(w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1}) + f_2 w_{i+1,j} + f_3 (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + f_4 w_{i,j} + f_5 w_{i-1,j} = 0 \quad \cdots (21)$$

ここに、 $f_1 = -m J_0 / 2 \omega^2$ ,  $J_0 = \bar{G}_b \bar{C}_b / D m \lambda$ ,  $f_2 = m H_0 / 2 + m J_0 / \omega^2 - R^2 / \lambda^2 - \nu R / 2 \lambda$ ,  $H_0 = \bar{E}_b \bar{I}_b / D m \lambda$ ,  $f_3 = m \lambda (H_0 + J_0) / R \omega^2 - \nu / \omega^2$ ,  $f_4 = -2 m \lambda (H_0 + J_0) / R \omega^2 + 2 R^2 / \lambda^2 + 2 \nu / \omega^2$ ,  $f_5 = -m H_0 / 2 - m J_0 / \omega^2 + \nu R / 2 \lambda - R^2 / \lambda^2$ 。

$$g_1(w_{i+2,j} - w_{i-2,j}) + g_2(w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1}) + g_3 w_{i+1,j} + g_4 (w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) + g_5 (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + g_6 w_{i,j} + g_7 w_{i-1,j} = \bar{r} \lambda^3 / D \quad \cdots (22)$$

ここに  $g_1 = 1/2$ ,  $g_2 = m k^2 (H_0 + J_0) \lambda / 2 R^3 + k^2 (2-\nu) / 2 R^2$ ,  $g_3 = -m (H_0 + J_0) k^2 \lambda / R^3 - 1 + \lambda / R - \lambda^2 / 2 R^2$ ,  $g_4 = (2-\nu) k^2 / R^2$ ,  $g_5 = m H_0 k^4 / R^4$ ,  $g_6 = k^2 (\nu - 3) \lambda / R^3 - m k^2 (4 H_0 k^2 + J_0 \lambda^2) / R^4$ ,  $g_7 = 2 m k^2 (3 H_0 k^2 + J_0 \lambda^2) / R^4 - 2 \lambda \{ R^2 - (3-\nu) k^2 \} / R^3$ ,  $g_8 = m (H_0 + J_0) k^2 \lambda / R^3 + 1 + \lambda / R + \lambda^2 / 2 R^2 + (2-\nu) k^2 / R^2$ 。

他の円弧边上においても同様に境界条件式を誘導することができる。その結果については文献(5)に詳しく述べてある。

c) 隅角部における境界条件式

i) 固定の場合 扇形平板の隅角部4点が剛な柱に剛結される場合、板のたわみ角は半径・接線面方向ともに零となる。従って隅角部の格点  $(i, j)$  において  $(\partial w / \partial r)_{i,j} = (\partial^2 w / \partial \theta^2)_{i,j} = 0$  が成立せねばならぬから、これらを差分化して隅角部の境界条件式として次の2式を得る。

$$w_{i+1,j} - w_{i-1,j} = 0 \quad \cdots (23) \quad , \quad w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = 0 \quad \cdots (24)$$

ii) 点支持の場合 隅角部4点が点支持されて、直角方向に交わる弾性梁のねじり剛性の影響を無視すれば隅角部の格点  $(i, j)$  において  $M_{\theta(i,j)} = M_r(i,j) = 0$  が成立せねばならぬから、これらを差分化して隅角部の境界条件式として次の2式を得る。

$$w_{i+1,j} + w_{i-1,j} = 0 \quad \cdots (25) \quad , \quad w_{i,j+1} + w_{i,j-1} + R \omega / k \cdot w_{i,j} = 0 \quad \cdots (26)$$

以上において求めた境界条件式に対応する格点において  $T$  と、それらの式と、隅角部を除くすべての格点において  $T$  と式(6)とを連立させて解けば所要のたわみ  $w_{i,j}$  が求まり、得られた結果を断面力の差分式に代入することにより、断面力も容易に求めることができる。

(3) 剛比

図-1 に示すように扇形平板の直線辺長を  $\ell (=m\lambda)$ , 弾性支持ばりの幅を  $b(\bar{b})$ , 高さを  $d(\bar{d})$  とするとき,  $\alpha = \ell/h$ ,  $\beta = d/b$ ,  $\bar{\beta} = \bar{d}/\bar{b}$ ,  $\gamma = b/h$ ,  $\bar{\gamma} = \bar{b}/h$  なる変数と導入すれば, 直線ばり, 曲りばりの曲げ剛性およびねじり剛性と板剛性との比, すなわち,  $H_r, H_\theta, J_r$  および  $\alpha, \beta, \bar{\beta}$  のように書きあらわせる。

$$H_r = \frac{E_b I_b}{D m \lambda} = (1-\nu^2) \frac{E_b \beta^3}{E_p \alpha} \gamma^4 \dots (27), \quad H_\theta = \frac{E_b \bar{I}_b}{D m \lambda} = (1-\nu^2) \frac{E_b \bar{\beta}^3}{E_p \alpha} \bar{\gamma}^4 \dots (28)$$

$$J_r = \frac{G_b C_b}{D m \lambda} = \frac{3(1-\nu) E_b}{8 \alpha E_p} \gamma^4 \beta \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{12 \beta^4} \right) \right] \quad (\beta \geq 1) \dots (29)$$

$$J_\theta = \frac{G_b \bar{C}_b}{D m \lambda} = \frac{3(1-\nu) E_b}{8 \alpha E_p} \bar{\gamma}^4 \bar{\beta} \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \frac{1}{\bar{\beta}} \left( 1 - \frac{1}{12 \bar{\beta}^4} \right) \right] \quad (\bar{\beta} \geq 1) \dots (30)$$

ここに  $G_b, \bar{C}_b$  は R. J. Roark の近似式<sup>(6)</sup> による。

したがって  $\alpha, \beta(\bar{\beta}), \gamma(\bar{\gamma})$  を決定すればそのときの剛比は上式によって一義的に定められることになり, これらの変数を種々変化させて数値計算を行なえば, 扇形平板と弾性支持ばりとの力学的相互作用が解明できることになる。

### 3. 数値計算例

差分法による解は分割数を増やすことにより厳密解に近づくことは周知の通りであるが, 文献(7) に示されているように 8 分割程度で工学上十分な精度の解が得られることから, 以下にのべる数値計算例はすべて接線・半径両方向ともに 8 分割で計算をおこなうことにする。

いま図-1 に示すような扇形平板において中心角  $\theta_0 = \pi/3$ , 辺長比 (中央円弧長と直線辺長との比)  $\xi = 1.0$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$  で等分布荷重が満載されているものとする。このとき  $\alpha = 4.0$ ,  $\beta = \bar{\beta} = 2.0$ , 隅角部 4 点が点支持されている場合 (Ex. 1) および固定の場合 (Ex. 2) について,  $\gamma (= \bar{\gamma})$  の種々の値に対する板中央点の  $w, M_r$  および  $M_\theta$  を計算すれば, 図-5, 6 に示すとおりである。 $\gamma$  の値が増加するにつれて, 板中央点のたわみ・曲げモーメントは減少しており, 両ケースともこれらの値は  $0.5 \leq \gamma \leq 3.0$  の区間で急変し, それを越える範囲の  $\gamma$  に対しては, ほぼ一定値に収束することから,  $\gamma > 3$  では全周固定とみなしてさしつかえないと言えよう。さらに隅角部の支持条件の相違がたわみ・曲げモーメントに及ぼす影響を明確にする為, Ex. 1 および Ex. 2 の諸量を対比するとともに, Ex. 1 の諸量を 1 とした場合の Ex. 2 の諸量を Table 1 に示した。これによれば隅角部の支持条件の及ぼす影響は  $w$  において最も顕著であり,  $M_r$  において一番小さいこと, および  $\gamma$  の変化に伴って  $w$  は  $\gamma = 1.5$ ,  $M_\theta$  は  $\gamma = 1$  付近でその比率が最小となるが  $M_r$  は  $\gamma = 0$  でその比率が最小であることがわかる。

次に隅角部 4 点固定の板 (= Ex. 2) について, 図-6 に示した諸量をそれぞれ 1 とし, 弾性支持

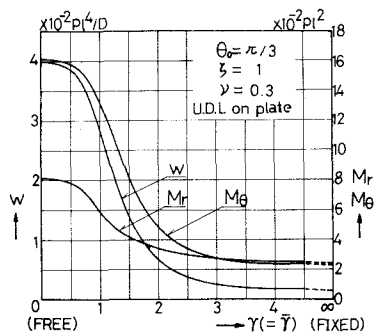


図-5 (Ex. 1)

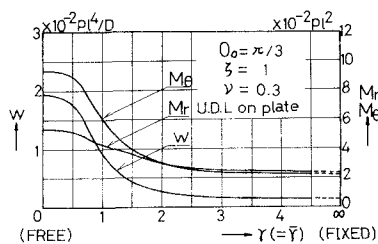


図-6 (Ex. 2)

はりのねじり剛性を無視した場合( $J_x=J_y=0$ )の解析結果の比率を計算すれば図-7のようになる。図からはりのねじり剛性を無視すれば、それを考慮したときより明らかに大きなたわみ、曲げモーメントが生じその比率の最大値はたわみで約1.65にも達していることがわかる。したがってはりの曲げ剛性のみを考慮、するわち垂直力のみが伝達されるものとして解析することは不合理であり、この複合構造の力学的相互作用を把握するには、前章2の解法を示したようにはりのねじり剛性を考慮に入れた解析が必要であることがわかる。

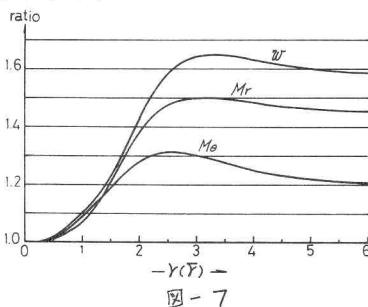
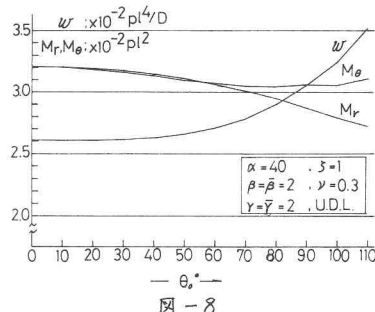


Table 1 Deflections and Bending Moments at the Center of the Plate  
( $H_x=H_y=H, J_x=J_y=J$ )

| Ex. | $\gamma=\bar{\gamma}=0$<br>( $H=J=0$ ) | $\gamma=\bar{\gamma}=1$<br>( $H=0.1820$<br>$J=0.0481$ ) | $\gamma=\bar{\gamma}=1.5$<br>( $H=0.9214$<br>$J=0.2433$ ) | $\gamma=\bar{\gamma}=2$<br>( $H=2.912$<br>$J=0.769$ ) | $\gamma=\bar{\gamma}=3$<br>( $H=14.74$<br>$J=3.893$ ) | $\gamma=\bar{\gamma}=\infty$<br>( $H=J=\infty$ ) |
|-----|----------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| w   | 1 3.975 1                              | 2 2.826 1                                               | 3 1.389 1                                                 | 4 0.6508 1                                            | 5 0.2488 1                                            | 6 0.1356 1                                       |
| Mr  | 1 1.932 0.486                          | 2 0.938 0.332                                           | 3 0.4475 0.322                                            | 4 0.2704 0.415                                        | 5 0.1686 0.678                                        | 6 0.1356 1.000                                   |
| Mo  | 1 8.033 1                              | 2 5.823 1                                               | 3 4.099 1                                                 | 4 3.408 1                                             | 5 2.690 1                                             | 6 2.346 1                                        |
| Mr  | 2 5.362 0.667                          | 3 4.337 0.745                                           | 4 3.637 0.887                                             | 5 3.061 0.898                                         | 6 2.545 0.946                                         | 7 2.346 1.000                                    |
| Mo  | 1 16.05 1                              | 2 13.16 1                                               | 3 8.180 1                                                 | 4 4.786 1                                             | 5 2.769 1                                             | 6 2.211 1                                        |
| Mo  | 2 9.362 0.583                          | 3 6.106 0.464                                           | 4 4.011 0.490                                             | 5 3.067 0.641                                         | 6 2.437 0.880                                         | 7 2.211 1.000                                    |

$$\left( \begin{array}{l} w: \times 10^{-2} \text{ pl}^4/D \\ M_x, M_y: \times 10^{-2} \text{ pl}^2 \end{array} \right)$$



また、中央円弧長を一定に

して中心角を变化させたときの板中央点のたわみ・断面力の変化を示せば図-8のとおりである。この図は、中心角の増加にしたがってたわみは増大し、曲げモーメントは中心角100°あたりまでは、単調に減少すること、およびMrの減少率がMoよりも大きいことなどを示している。

#### 4. 模型実験

本実験で採用した模型の断面寸法は、表-2に示すとおりであり、この模型の隅角部4点を固定し集中荷重を載荷して静的な曲げ実験を行った。(写真1参照) 載荷点には図-9に示す①と②と③と④と⑤の5点を選り、r方向及びtheta方向のひずみ測定した。模型の材料としては製作が比較的容易であり、ひずみ及びたわみが小さな荷重で十分生じるプラスチックを採用したが、プラスチック板では載荷時間が長くなるとクリープが生じる為、載荷時間の短縮に努めねばならず、そのため各測点についてそれぞれ載荷と測定とを繰り返してクリープの影響がはらめよう留意した。

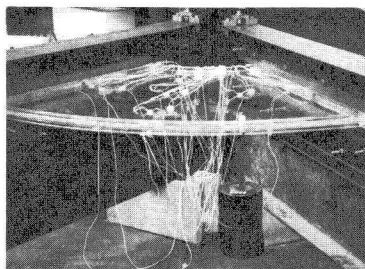


写真 1

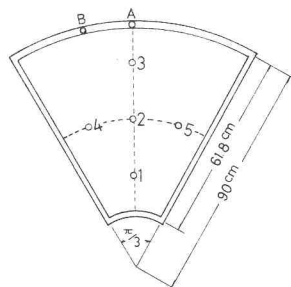


図-9

表-2

|      | 中心角 $\theta_0$ | 板厚 h   | 半径方向スパン l | 中央円弧長   | はり幅 b=b | はり高 d=d | 板材の $E_p$                          | はり材の $E_b$                         | 板材のポアソン比 |
|------|----------------|--------|-----------|---------|---------|---------|------------------------------------|------------------------------------|----------|
| モデル1 | $\pi/3$        | 0.8 cm | 61.8 cm   | 61.8 cm | 1.0 cm  | 2.0 cm  | $3.07 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ | $3.07 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ | 0.35     |
| モデル2 | $\pi/3$        | 0.8 cm | 61.8 cm   | 61.8 cm | 2.0 cm  | 2.0 cm  | $3.07 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ | $3.07 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ | 0.35     |

またプラスチックは温度の影響が大きいので、実験時に試験片によりそのヤング率を測定した(表2)。実験に使用した二方向ひずみゲージの性能は表-3に示すとおりである。

いまモデル1, 2の載荷点に集中荷重10.2 kgを載荷したときの板の各測点のr方向およびθ方向ひずみを測定した結果を図示すれば図10~17を得る。

表-3

|             |                 |
|-------------|-----------------|
| GAGE LENGTH | 5 (mm)          |
| RESISTANCE  | 119.9 ± 0.4 (Ω) |
| GAGE FACTOR | 2.12            |

図中実線は差分法による計算値、○印は実験値を示す。図にみられるごとく両者の値はほぼ一致しており、前述の理論および電算結果の妥当性が示されたといえる。

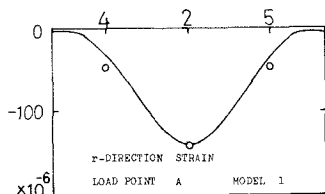
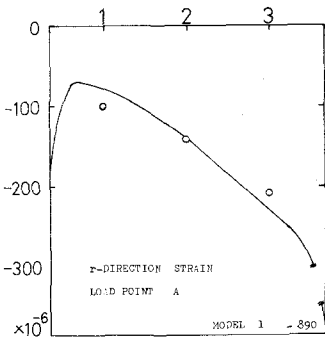


図-10

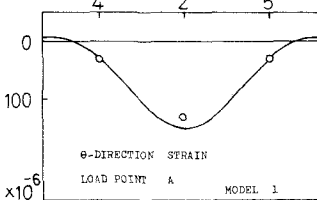
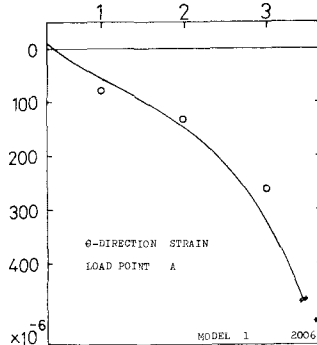


図-11

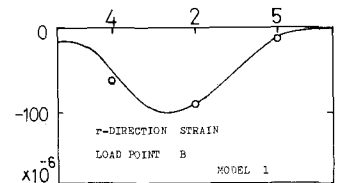
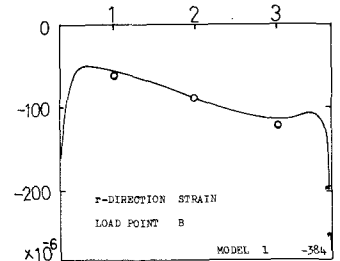


図-12

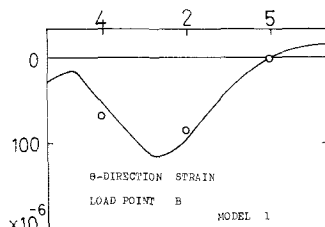
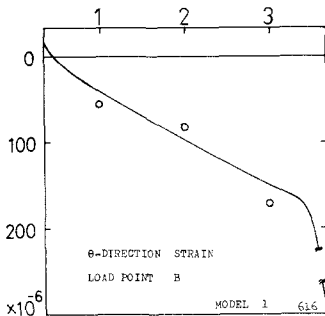


図-13

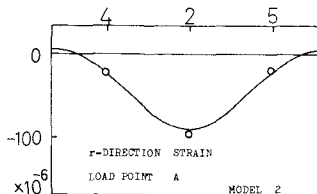
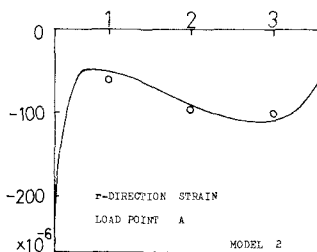


図-14

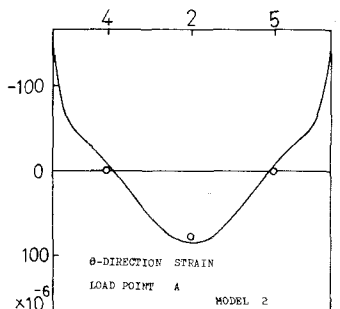
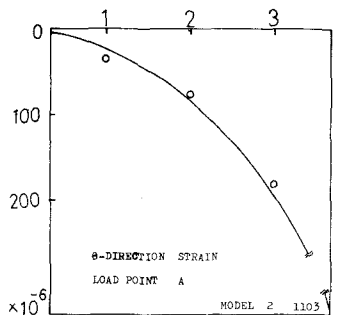


図-15

## 5. むすび

本論文は周辺が曲りばりおよび直線ばりで弾性支持される扇形平板の差分法による解析法を提示し、その理論に基づいておこなった数値計算により、この複合構造物の力学的特性を把握し、設計に資せんとするものであるが、本論で示した計算例により次の諸点が明らかとなった。

### 1) 隅角部の支持条件の相違が

板のたわみ・曲げモーメントにおよぼす影響は顕著である。(表-1)

本計算例では隅角部の支持条件として固定、点支持の両極端を想

定して数値計算をおこなっているが、実際の構造物では隅角部において柱と剛結されることも考えられ、その柱の剛性が比較的小さい場合には、柱の剛性をもパラメーターに入れた立体解析をおこなう事も有用であると思われる。(8)

2) 弾性支持ばりの剛性・変化が板におよぼす影響も顕著である。図-5, 6 から、剛比の比較的小さい範囲でたわみ・曲げモーメントの値が急変し、剛比がある値以上になればその境界を固定とみなしてさしつかえなリことがわかる。

3) 弾性支持ばりの曲げ剛性だけを考慮して解析しても十分に板とはりとの力学的相互作用を把握することはできない。(図-7) したがって、本論においてのべたごとく、この複合構造物の解析にあたっては、弾性支持ばりの曲げおよびねじり剛性ととも考慮することが必要であるといる。

4) 板の中心角の変化は、たわみ・半径方向曲げモーメントには顕著な影響を及ぼすが、接線方向モーメントにはそれほど影響をおよぼさない。(図-8)

なお、本論文では、隅角部4点を支持された扇形平板についてのみ論じたが、本解法は、これを基本構として支持ばりが連続ばりとなる場合およびばりが板の中間にある連続扇形平板の場合にも容易に適用でき、それらについては著者の一人が別に発表している。(7), (9)

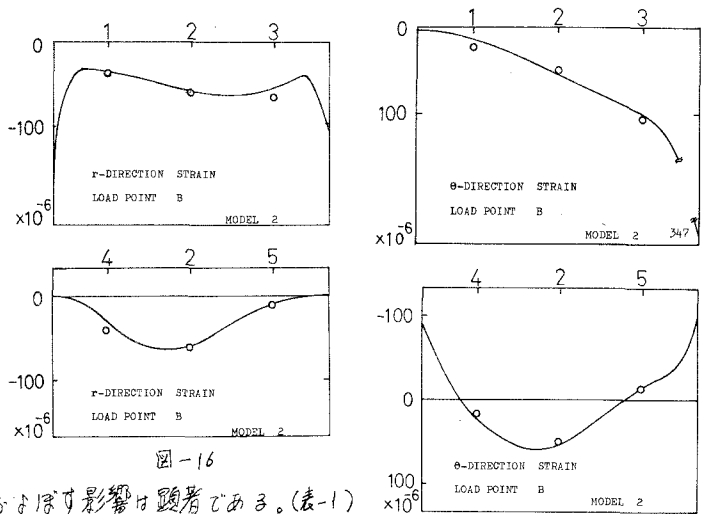


図-16

図-17

## 参考文献

- (1) Fuchs, S.J.; Plates with Boundary Conditions of Elastic Support, Trans. ASCE, Vol. 119, 1954.
- (2) Wood, R.H.; Studies in Composite Action, Part II, National Building Studies, Research Paper No. 22, HMSO, 1955.
- (3) Allen, D.N. de G. and Severn, R.T.; Composite Action of Beams and Slabs under Transverse Loading - Part IV, The Structural Engineer, Vol. 42, No. 12, December 1964.
- (4) Khan, M.A. and Kemp, K.O.; Elastic full composite action in a slab and beam system, The Structural Engineer, Vol. 48, No. 9, Sep., 1970.
- (5) 大場久哲; 全周弾性支持扇形平板の解析に就ける研究, 九州大学修士論文, 昭和48年3月.
- (6) Roark, R.J.; Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill Book Co., 1954.
- (7) 金子忠男, 大場久哲; 直線ばり弾性支持される扇形平板の解法, 九工大学集報, 第45巻第1号, 昭和47年1月.
- (8) Khan, M.A.; Elastic full composite action in a slab and frame system, The Structural Engineer, Vol. 49, No. 6, June 1971.
- (9) 大場久哲, 金子忠男; 一方連続扇形平板の解法, 土木学会第27回年次学術講演会講演概要集, 昭和47年10月.
- (10) 大場久哲, 金子忠男; 全周弾性支持される扇形平板の解法, 九工大学集報, 第45巻第6号, 昭和47年12月.