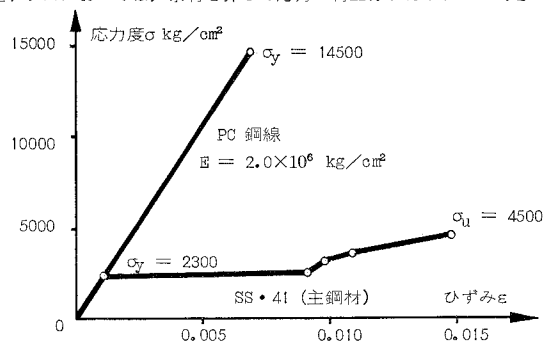


{ 要 旨 } 静定トラスにピアノ線を配置した場合、ピアノ線の作用により、系は静定トラスと不静定トラスの中間的な性質を有する構造物（準静定トラス構造物）となることを示し、主構材の降伏点以上の抵抗力を考慮した場合の漸増荷重に対するトラスの解析法を述べ、数値計算例によってその力学挙動を説明する。

1. ま え が き

一般に、静定トラス構造物はその系として外力に抵抗するために必要な最低限の部材で構成されておるため、部材が1本でも破壊応力に達するとそれが系全体の崩壊につながる。一方、不静定トラスにおいては、余材を介して応力の再配分が行なわれる場合が多く、系全体の耐荷能力は高い。

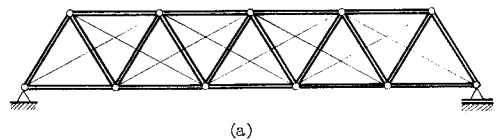
鋼材の応力・ひずみ特性を図・1のように折線要素群であらわし、降伏点以上の抵抗力を考慮して数値解析を行なうと、静定トラスでは部材力が降伏点に達するたびに急激な節点変位を生じ系全体が大変形があらわれる。不静定系では数本の部材が降伏するまでこのような現象があらわれない。不静定系のほうが変形に対する安定度が高いと言えるが、部材数が多いため、経済的には静定トラスのほうが有利である。本文ではこの両者の特長をピアノ線を利用してつくり出すことを考える。



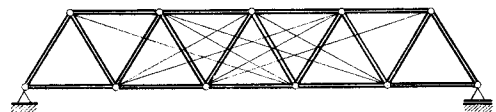
図・1 応力・ひずみ特性

トラスの主構材は、図・1のSS・41のような応力・ひずみ特性を有し、降伏点以上の領域でも外力に対して抵抗するものとする。また、圧縮材の座屈までは考えず、引張側と同一の特性を有するものと仮定して解析を進める。トラス系の補強に用いるピアノ線は同図のPC鋼線で示されるような特性を有し、降伏点以上の抵抗力は期待しない。

図・2にワーレントラスを補強する場合のピアノ線の配置方式の例を示す。綱トラスにプレストレスを導入する研究はすでに各種の文献¹⁾²⁾に見られるが、その場合にはピアノ線を下弦材の中に組みこむかまたは下弦材に平行に配置したものが多い。本文では、プレストレスの導入は考えず、ピアノ線の作用により系の崩壊に



(a)



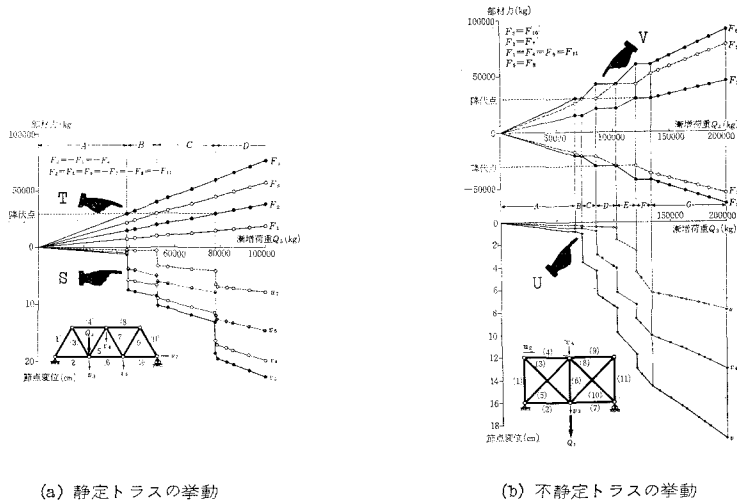
(b)

図・2 ワーレントラスの補強

-
- 1) E.I.Belenja: Vorgespannte Metallkonstruktionen, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1966, S. 211-247.
 - 2) P.Ferjenčík: Czechoslovak Contribution in the Field of Prestressed Steel Structures, I.C.E., Vol.II, No.11, 1971/72, pp.481-491.

対する安全性を増大させることを目的としている。したがって、ピアノ線が引張材として有効に働らきだすのは、系の中の主構材が降伏状態に入ってからのことである。ピアノ線の断面積が大き過ぎれば系は最初から不静定トラスの特性を示すため、材量的に不経済である。また、断面積が小さ過ぎると主構材に対して何の効果もなく、静定トラスの特性を改善することができない。漸増荷重に対する系の挙動を検討しながら、主構材断面積に対するピアノ線断面積の適当な割合を見出すことが本研究の課題である。

ここで、材料の降伏点以上の抵抗力を考慮した場合の、漸増荷重に対する静定トラスと不静定トラスの力学挙動の特性³⁾について簡単に述べる。図・3(a)は静定、(b)は不静定トラスである。グラフの横軸に漸増荷重をとり縦軸にはそれぞれ節点変位と部材力をとっている。



図・3 漸増荷重に対するトラスの挙動

節点変位については、(a),(b)ともに階段状の変化を示しているが、これは系の中のある部材が降伏点に達すると、部材の伸縮に対する抵抗力がなくなり、ひずみ硬化領域に至って再び抵抗力を回復することに起因している。静定系では各部材が降伏点に達するたびに必ず系の大変形があらわれるが(図(a)指印S),不静定系では数本の部材が降伏点に達しなければこのような大変形はあらわれない(図(b)指印U)。そして節点変位の大きさも静定系よりも小である。この傾向は不静定次数の大なるトラス系ほど強くあらわれる。

部材力については両者に明確な差が見られる。すなわち、静定系は直線而不静定系は階段状となる。これは、静定トラスでは降伏部材がただちにひずみ硬化領域に入って抵抗しなければ、系としての安定を保ち得ないのに対して、不静定トラスでは、降伏部材が漸増荷重の増分を負担しなくても他の部材によって外力に対する抵抗メカニズムが構成されるためである。(指印U, V)。

不静定系では、1部材の降伏の影響で他の部材にもその時点から荷重の増分を負担しなくなるものがあらわれるが、これは全部材を外力に対して有効に働らせる点から見ると不経済である。一方、静定トラスでは全部材が最後まで外力に抵抗するけれども、部材の降伏時における変形のあらわれ方が急激で危険性がある。ピアノ線的作用により、急激な節点変位の発生を緩和し、降伏部材をスムーズにひずみ硬化領域に到達せしめることが本研究の目的である。

.....

3) 吉沢： トラスの非線型問題の数値解析 土木学会論文報告集第180号 1970年8月 pp. 11~25

2. 解析式

2・1 トラス系の形状変化

系の形状変化の影響を数値解析でとり扱う場合、反復計算により解を収束させなければならないが、ここでは、つぎのような考え方で進める。図・4はトラスの節点 $[i]$ が荷重を受けて $[i']$ に変位した状態を示す。節点変位 $(dx, dy, dz)_i$ および部材力 P_{ij} P_{ik} P_{im} は系の微小変形の仮定のもとに得られたものとする。この変位を用いて系の形状を修正し、修正後の各部材の方向余弦を用いて上に得られた部材力と外力 P_{ix} P_{iy} P_{iz} との間で力のつり合い条件を調べる。条件が完全に満足されれば上で求めた節点変位と部材力を系の形状変化を考慮した場合の解に等しいと見なす。これは通常満足されない。これを満足させるためには図に示すように各部材に補正力 f_{ij} f_{ik} f_{im} が付加されなければならない。この補正力は、形状修正後の系がさらに微小な変形をすることにより誘起されるものと考えて計算をくりかえし

補正力の値または節点変位の値が許容できる微量に収束すれば反復計算を打ち切る。与えられた荷重に対する節点変位は、反復計算の各段階で得られる節点変位の代数和であらわされる。これは S.A. Saafan の提唱した方法⁴⁾ に類似したもので、本文では「平衡法」⁵⁾ と呼ぶ。

以下に平衡法による解析の手順を述べる。ここで考えるトラス系は n 本の部材で構成され、起こり得る節点変位の総数は m とする。外力の作用によりこの系に微小変位 $\mathbf{D}$ が生じたものとすれば、これによって発生する部材力はつぎのようにあらわされる：

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{D} \dots\dots\dots (1)$$

ここに $\mathbf{F}$ = 部材力マトリクス (n 行 1 列) $\mathbf{S}$ = バネ定数マトリクス (n 行 n 列) $\mathbf{P}$ = 方向余弦マトリクス (n 行 m 列) $\mathbf{D}$ = 変位マトリクス (m 行 1 列) である。ここで、節点荷重の各方向成分を要素とする荷重マトリクス $\mathbf{L}$ (m 行 1 列) を定義すれば、外力と部材力とのつり合い条件はつぎようになる：

$$-\mathbf{P}^T \mathbf{F} + \mathbf{L} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$\mathbf{P}^T$ は $\mathbf{P}$ の転置をあらわす。式(1)を式(2)に代入して節点変位を求めると

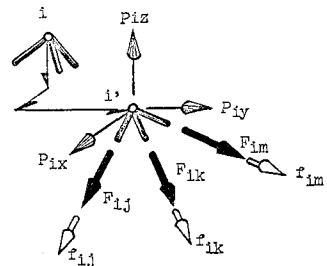
$$\mathbf{D} = [\mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{L} \dots\dots\dots (3)$$

上式の節点変位の値を有限変位理論で得られたものに等しいと仮定すれば、荷重 $\mathbf{L}$ の作用による系の変形後の形状は、上式で与えられる節点変位の値を各節点に与えて形状を修正することによって得られる。これにより系の方向余弦マトリクスは $\mathbf{P}_r$ になる。修正後の系の形状について、荷重 $\mathbf{L}$ とすでに得られている部材力 $\mathbf{F}$ との間でつり合い条件を検討する。このとき条件式：

$$-\mathbf{P}_r^T \mathbf{F} + \mathbf{L} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

が満足されれば、式(3)で得られた変位 $\mathbf{D}$ を有限変位理論による解とみなすことができる。これは荷重が極端に小さい場合以外は成り立たない。よってつぎのような反復の手法を用いる。反復計算の回数を (r) であらわし、反復 r 回目における補正力マトリクスを $\mathbf{f}_r$ そのときの部材力および方向余弦マトリクスを $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{P}_r$ とすれば力のつり合い条件はつぎのようにあらわされる：

$$-\mathbf{P}_r^T [\mathbf{F}_r + \mathbf{f}_r] + \mathbf{L} = 0 \dots\dots\dots (5)$$



図・4 平衡法

4) S.A.Saafan: Theoretical Analysis of Suspension Roofs, Proc., ASCE, ST2, Feb., 1970, pp.395-405

5) N.Yoshizawa: Nonlinear Effects on the Analysis of Pin-Jointed Trusses, J.of Shinshu Univ., 1971, pp.1-15

この補正力 $\mathbf{f}_r$ は系が $\mathbf{P}_r$ で示される形状からさらに微小変位 $\mathbf{d}_r$ を生ずることにより誘起されるものとする。すなわち

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{S}_r \mathbf{P}_r \mathbf{d}_r \quad \dots\dots\dots (6)$$

これを式(5)に代入して $\mathbf{d}_r$ を求めれば

$$\mathbf{d}_r = [\mathbf{P}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{P}_r]^{-1} [\mathbf{L} - \mathbf{P}_r^T \mathbf{F}_r] \quad \dots\dots\dots (7)$$

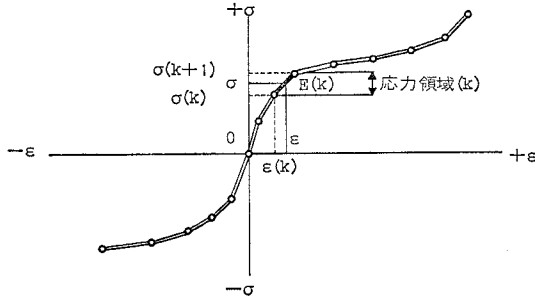
この手順を $\mathbf{d}_r$ が 0 または十分な微量に収束するまでくりかえす。荷重 $\mathbf{L}$ に対する節点変位は

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{D}_{r-1} + \mathbf{d}_r \quad \dots\dots\dots (8)$$

で求められる。なお、部材力マトリクス $\mathbf{F}_r$ は式(8)の $\mathbf{D}_r$ を用いて修正された系の節点座標値から部材長 L_r を求め、これと変形前の長さとの差から伸びを求めて計算する。

2・2 構造材料の非線形特性

構造材料の応力・ひずみ曲線が複雑な曲線で与えられる場合、図・5に示されるように曲線の微小区間を直線要素におきかえた折線図形であらわす。図において部材の応力度が $\sigma(k) \leq \sigma < \sigma(k+1)$ の範囲にあるときこの部材の応力領域を (k) と定義し、部材力を $F(k)$ で表わす。



図・5 非線形応力・ひずみ曲線と応力領域

$$\pm F(k) = E(k) \frac{A}{L} dL \pm \{ \sigma(k) - E(k) \varepsilon(k) \} A \quad \dots\dots\dots (9)$$

$E(k)$ は領域 (k) における折線のこう配、 A は部材の断面積

L は部材長、 dL は部材の伸びを示す。式中 $(\pm)$ 記号は部材の伸びが正のとき $(+)$ 、負のとき $(-)$ をとる。式(9)の右辺第1項の部材の剛度 $E(k)A/L$ はこの場合、ひずみ ε の値に対応して変化する。第2項は部材の剛度の変化に対する補正項であり、各部材の補正項を部材力マトリクスの要素の配列順にならって n 行1列のマトリクスにならべたものを領域補正マトリクスと呼び $\mathbf{C}$ であらわす。微小変形の仮定のもとに部材力マトリクスは次式であらわされる：

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}' \mathbf{P} \mathbf{D} + \mathbf{C} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$\mathbf{S}'$ はバネ定数マトリクスが節点変位 $\mathbf{D}$ の関数として与えられることを示す。系に荷重 $\mathbf{L}$ が作用したときのつり合い条件より

$$\mathbf{D} = [\mathbf{P}^T \mathbf{S}' \mathbf{P}]^{-1} [\mathbf{L} - \mathbf{P}^T \mathbf{C}] \quad \dots\dots\dots (11)$$

計算は、最初全部の部材の応力状態が領域(1)にあるものとし、 $\mathbf{C} = 0$ と置いて上式を計算する。得られた節点変位により部材の応力度を求め、応力領域に変化があれば $\mathbf{S}'$ と $\mathbf{C}$ の値を修正して再度計算を行ない解が収束するまでこの手順をくりかえす。

2・3 形状変化と材料非線形とを考慮した解析式^{b)}

構造材料の応力度が降伏点をこえると材料のひずみが極度に増大するので、弾性領域では変形が小さいような構造物についても形状変化の影響を考慮した解析が必要となる。この場合には、式(10)を式(7)に代入して、節点変位の修正とともに、材料の応力度をチェックしながらその弾性係数を修正し、解が収束するまで反復計算を行なう。各部材の変形量は反復計算で修正されたトラス節点の座標値から求めるものとし、それを列ベクトル $(n$ 行1列)に並べたものを $[\mathbf{dL}]_r$ であらわすことにすれば、平衡法による場合の反復 r 回目の変位補正量はつぎのように与えられる。ここに荷重 $\mathbf{L}$ は N 個の微小荷重に分割した上で漸増荷重として系に作用させ各荷重段階ごとに解を収束させるものとする。

$$\mathbf{d}_r = [\mathbf{P}_r^T \mathbf{S}_r' \mathbf{P}_r]^{-1} \left[\sum_{j=1}^N dL_j - \mathbf{P}_r^T (\mathbf{S}_r' dL_{r-1} + \mathbf{C}_r) \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

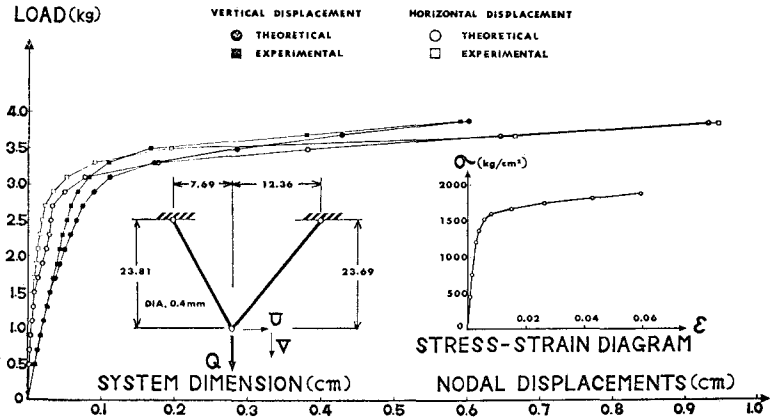
3. 実験値との比較

式(12)の解を実験により

確認する目的で、簡単なモデル実験を行なった結果を図・6に示す。実験方法は部材を固定した天井からつり下げたものを1個所に集めてピン結合し、結合点に鉛直方向に荷重をかけて水平・鉛直方向の変位を測定した。図に示したものは2本部材トラスである。

材料としては、非線形性がよくあらわれるものとして

直径0.4mmの銅線を用いた。30本の材料試験で得た応力・ひずみ特性の平均値が上図の右側に示してある。図の左側には実験に用いたトラスの構造寸法を示した。

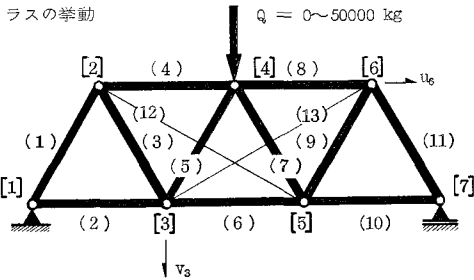


図・6 2本部材鋼トラスの挙動に関する実験値と解析値の比較⁹⁾

図では□印が実験値を、○印が実験と全く同じ条件でステップ荷重を与えた場合に計算から得られた値を示す。両者の差は節点荷重が2.5kgから3.5kgに至る範囲で大きくあられ誤差が50%にも達するものがある。これは、応力・ひずみ曲線にも見られるように材料の抵抗特性が硬い領域から柔らかい領域に漸変する部分に相当し、材料試験においてもバラツキが多く、数値解析ではその結果を折線で近似していることによるものと考えられる。この領域を過ぎると、材料特性も安定してくるために、最終荷重3.9kgにおいては誤差は鉛直変位で2%、水平変位で1.3%となっている。

4. ピアノ線で補強したワーレントラスの挙動

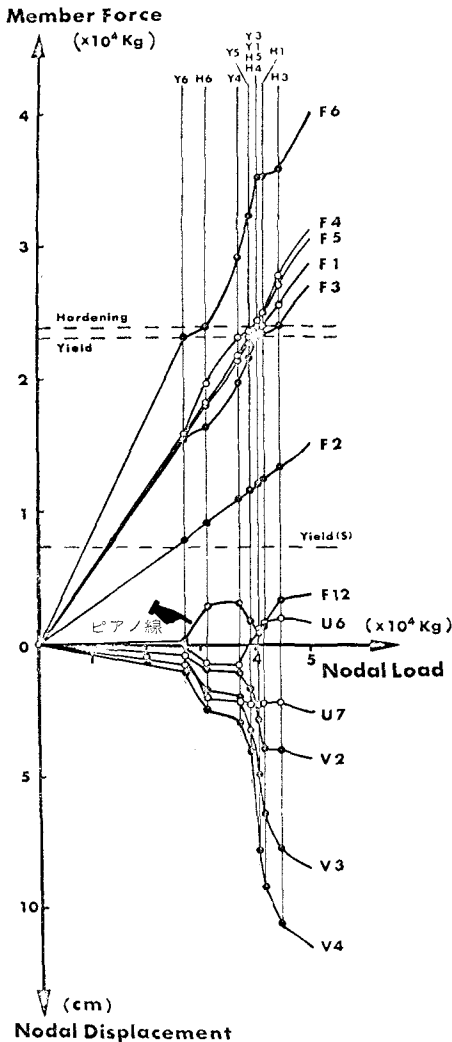
図・7のようにピアノ線でトラスを補強した場合の漸増荷重に対する挙動を式(12)を用いて解析する。この場合、主構材およびピアノ線の性質は図・1で与えられるものとする。図・8には漸増荷重にともなう部材力および節点変位の変化の状況を示し、図・9にはそれぞれの部材の応力が降伏点に達するときにあらわれる系の抵抗メカニズムを示した。ただし、変形の状況を明確にするために、節点変位は部材寸法の10倍に描いてある。また、部材はその応力領域により各種の抵抗状態を生ずるので、これを破線、点線、平行線等で記号的に表示した。



主構材：長さ $L = 200\text{cm}$ 断面積 $A = 10\text{cm}^2$
ピアノ線：長さ $L = 346\text{cm}$ 断面積 $A = 0.5\text{cm}^2$

図・7 ピアノ線によるワーレントラスの補強

6) 吉沢：トラス構造物の非線形型挙動に関する実験的研究，土木学会第27回年次学術講演会講演概要集第1部，1972，pp.155～156



図・8 漸増荷重に対するワーレントラスの挙動 7)

図・8 の上半分は漸増荷重・部材力関係をあらわす。Yield 線は主構材の、Yield(s)線はピアノ線の降伏荷重を示す。また、Hardening 線は主構材がこの点からひずみ硬化領域に入って抵抗すること示す。なお、記号Y6は部材(6)が降伏点に入ったことを、H6はそれがひずみ硬化領域に入ったことを示す。図の下半分は漸増荷重・節点変位関係を示したものである。図・7のような荷重条件では最初からF6が最も大きい部材力となる。これが降伏点に達するまでは、荷重・部材力関係も荷重・変位関係も直線形の特徴を示す。部材が降伏領域に達するとその材料特性の急変のために大きな節点変位があらわれる。そして降伏部材とそれの影響を受けて、他の部材にも荷重の分担率に変化があらわれる。この図と図・3(a)のグラフをを対比してみると、両者の挙動

部材の抵抗状態の表示

- 弾性抵抗
- - - 降伏状態
- == 塑性抵抗
- 弾性定力
- === 塑性定力

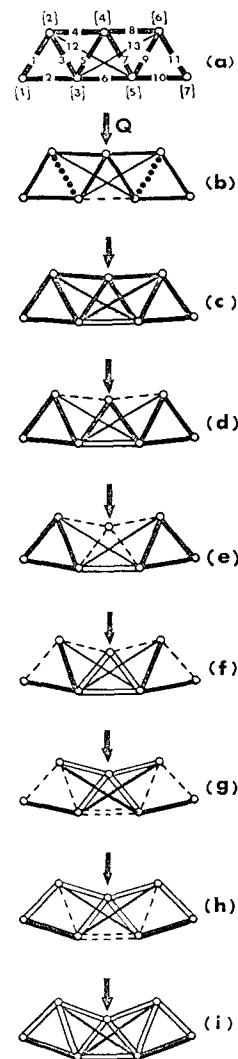
弾性抵抗：部材の応力度が降伏点以下の弾性領域内にあって外力に抵抗する状態。

降伏状態：部材の応力度が降伏点に達すると、そこからは一定の応力状態で、ひずみ硬化領域に達するまで変形が進んでいく状態。

塑性抵抗：部材の応力度がひずみ硬化領域に入ってから外力に対して抵抗する状態。

弾性定力：弾性抵抗の状態にあった部材が、他の部材が降伏状態に入ることにより、その時点からは漸増荷重の増分に関係なく一定の応力度を保つ状態。

塑性定力：塑性抵抗の状態にあった部材が、他の部材が降伏状態に入ることにより、その時点からは荷重の増分を負担せずに、ひずみ硬化領域内にあって一定の応力度を保っている状態。



図・9 抵抗メカニズム 7)

7) 吉沢：補剛ワーレントラスの非線形挙動，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，1973年2月，pp. 21～22

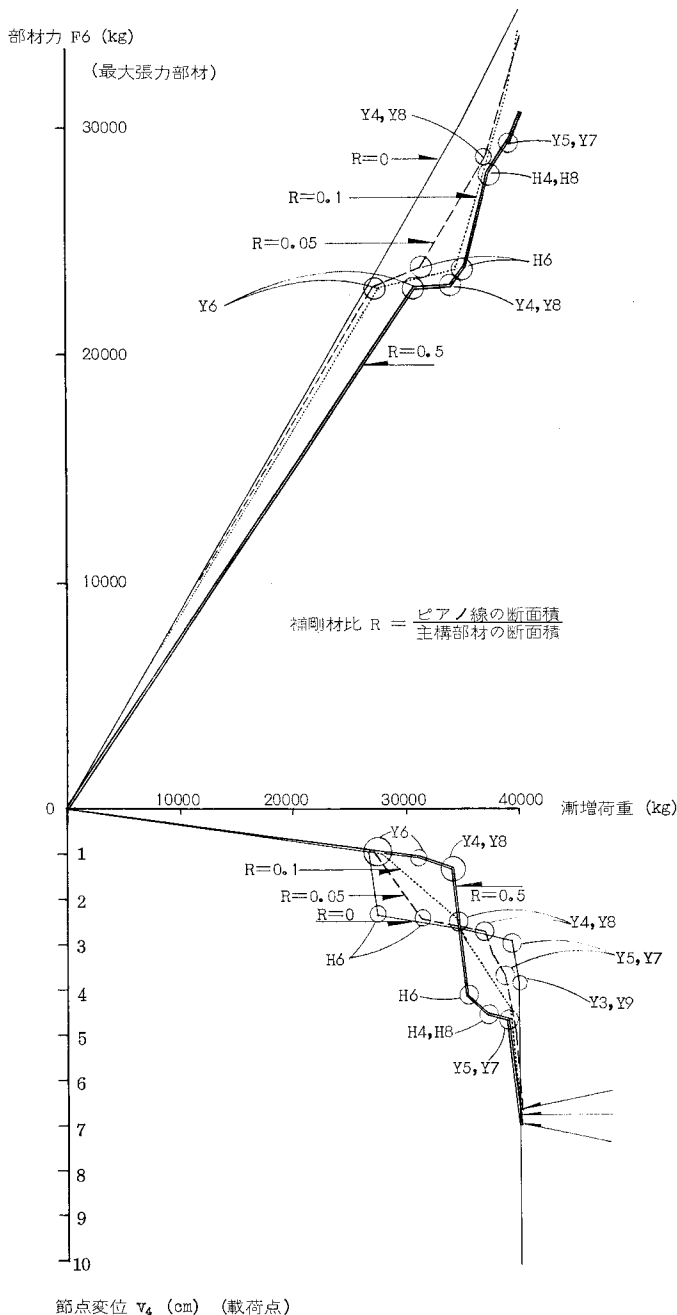
の差異が観察できる。すなわち、静定トラスにピアノ線を配置することにより、節点変位の生じ方が緩和され、部材の荷重分担にも多少の余裕がでてくる。ピアノ線の部材力の変化は非常に複雑であり、それぞれの主構材が降伏点に達するたびに大きく増減をくりかえす。図・9に主構材が降伏領域またはひずみ硬化領域に達するたびに变化する系の抵抗メカニズムを順を追って示した。

5. ピアノ線の効果

ピアノ線の使用により、静定トラスの挙動特性に変化があらわれることは、前節の例題により明らかとなったが、設計上問題となるのは、それをどの程度に使用するかという点である。これを検討するためには、起こりうる各種の荷重条件とともに、系に対するピアノ線の配置方式を組み合わせ、最適の条件を見出さなければならないが、本研究はそこまでは至っていない。ここでは図・7のような補強方式に対して、主構材に対するピアノ線の断面積を変化させた場合における系の挙動特性について述べる。

主構材の断面積に対するピアノ線の断面積の割合を補剛材比 R と定義し、 R の値を 0(静定トラス)、0.05、0.1 および 0.5 とした場合について計算した結果を図・10にグラフで示す。 $R=0.5$ の場合は明らかに不静定トラスの特性があらわれる。 $R=0.1$ 、0.05 の場合がここで目的としている「準静定トラス」的な特性があらわれている。

図の中で、記号Yはある部材が降伏点に達したことを、記号Hはひずみ硬化領域に達したことをあらわしている。漸増荷重・節点変位関係のグラフにおいてはY点からは線の傾斜が急になり、H点からは傾斜がゆるくなるのが見られる。



図・10 補剛材比 R による挙動の変化

すなわち、主構材の降伏により節点に大きな変位があらわれるが、その発生の様子は静定トラスでも不静定トラスでも急激である。不静定系($R=0.5$)の場合には、部材(6)の降伏時(Y6点)には大きな変形はあらわれないが、部材(4)、(8)の降伏時には非常に大きな変形を急激に生ずるため危険である。これに対して、 $R=0.1$ および $R=0.05$ の場合には部材が降伏した場合でも、系の変形の進み方がゆるやかであり安定性が高いと考えられる。計算は、鉛直荷重 $Q=40000\text{kg}$ で静定トラスの解が収束しなくなったため、他の場合についてもそこまでにとどめたが、この時点での変位は、 $R=0.05$ のものが最も少く、つづいて $R=0.1$ 、 0.5 (不静定系)の順になっている。

6. あ と が き

実在のトラス構造物にピアノ線を配置してその安定性と耐荷能力を増大させることができれば、防災上有意義であると考え、これに対する適正な配置方式を探し出すにはさらに多くの数値解析が必要である。また、ここに示したような配置方式では、引張部材の応力を軽減する分だけ圧縮部材の応力度を増大させる結果となり、かえって不安定なものになってしまうおそれもある。部材の座屈を考慮してトラスの耐荷力を求める計算は簡単な系について行なったのみであるが、これは今後の課題である。

なお、本研究の一部は文部省科学研究費(昭和47年度)によるものであり、計算は名古屋大学大型電算機を用いた。