

骨組構造の相似則の構造設計への応用

熊本大学工学部土木工学教室 ○ 三池 亮 次

卓吉秋上同

大成建設(元熊大大院生) 松本 弘一

1. まえがき

安全な構造物を設計するのに、過去の実績との比較設計を試みることは、構造工学の発達した現代においても予備設計の段階で盛に用いられるし、規模の小さい単純な構造物であれば、過去の設計例とか経験を参照にして、たんに比較設計にとどめ、構造計算を行なわない事例も多いようである。たとえば、古来、西欧における石造寺院、アーチ橋やわが国における木造神社、仏閣など、複雑で壮大な構造物が、力学の助けを借りないで直観的に、おそらくは実績との比較設計の手法を用いて建造された事實に、われわれは注目すべきであろう。

構造設計とは、地形、地質などの地盤の条件と、自重、活荷重、風、水圧荷重などの外荷重その他の外的諸条件に適合した構造物の材質と形状を選定することであり、過去に構築した外的諸条件の類
似の構造物を基準にして、材質、形状を定め、あるいは、これを予備設計としてさらに厳密計算を行
ない、より経済的で力学的にも最適であり、大型の構造物の構築を可能とする。このことは、言わば
実物による模型実験を積み重ねていくことであり、また、この過程に相似の概念が使用されているこ
とになる。したがって、構造設計に相似則を応用すれば、より的確な設計が可能となるであろうし、
より少ない、独立パラメーターを用いて、構造物の性状を把握することができるであろう。近年、大
容量の電子計算機が出現して、かなり複雑な構造計算であっても、機械的、かつ迅速に解を得るこ
とが可能となったので、構造工学にとって現在重要なことは、むしろ質的問題であろうと考える。

相似則および無次元数を誘導するのに、次元解析による方法、微分方程式による方法、物理法則の
確認による方法などが用いられているが、構造解析におけるように数式による現象表示が比較的容易
の場合には、剛性基礎方程式そのものの無次元化によって、形状無次元数を含むより適正な無次元
数を見出すことが可能である。ここでは、まず動および静力学的骨組性状を支配するいくつかの無次
元数の誘導を行ない、相似則と相似則を主にトラス構造およびアーチダムの比較設計に応用する問題
について、若干の検討を試みたので報告する。

2. 骨組構造解析の無次元振動方程式の誘導

減衰強制振動の場合、変位を d とし、速度 $\dot{d}$ に比例する減衰力が存在し、強制外力が

$$f(t) = pe^{int} \quad (1)$$

で与えられる多自由度質点バネ系の振動方程式が、次式

$$M \frac{d^2 d}{dt^2} + C \frac{dd}{dt} + Kd = p e^{i\omega t} \quad (2)$$

で与えられるものとて、無次元振動方程式を誘導する。ここに、式(1)の p は外力の振巾、 Ω ,

t は、円振動数、時間であり、式(2)の M, C, K は、おのおの質量、減衰係数および剛性マトリックスである。任意の節点の変位 d 、外力 f の中に、回転変位とモーメントを含む場合には、ベクトル内での次元を合わせるために、任意の節点における

$$L_0 = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} \frac{1}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_0} \end{smallmatrix} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & L' \end{array} \right]$$

を定義し、 L_0 を対角小行列とするマトリックス $L = \text{diag}\{L_0\}$ を用い

$$d = L L' d', \quad p' = L p, \quad M' = L M L, \quad C' = L C L, \quad K' = L K L \quad (3)$$

の変換を行なえば、振動方程式は

$$M' \frac{d^2 d'}{dt^2} + C' \frac{d d'}{dt} + K' d' = p' e^{i \Omega t}$$

$$\therefore \frac{E_0 A_0}{P_0} \left\{ \frac{\Omega_0^2 M'}{E_0 A_0} \frac{d^2 d'}{d(\Omega_0 t)^2} + \frac{\Omega_0 C'}{E_0 A_0} \frac{d d'}{d(\Omega_0 t)} + \frac{K'}{E_0 A_0} d' \right\} = \frac{P'}{P_0} e^{i \frac{\Omega}{\Omega_0} \Omega_0 t} \quad (4)$$

ここに、 l_0, A_0, E_0 および P_0 は部材の長さ、断面積、弾性係数および外力の代表値である。したがって無次元数

$$\left. \begin{aligned} M^* &= \frac{\Omega_0^2 M'}{E_0 A_0}, \quad C^* = \frac{\Omega_0 C'}{E_0 A_0}, \quad K^* = \frac{K'}{E_0 A_0}, \quad d^* = \frac{E_0 A_0}{P_0} d' \\ \Omega^* &= \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad t^* = \Omega_0 t, \quad p^* = \frac{P'}{P_0} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を定義すれば、次式

$$M^* \frac{d^2 d^*}{dt^{*2}} + C^* \frac{d d^*}{dt^*} + K^* d^* = p^* e^{i \Omega^* t^*} \quad (6)$$

で表わされる無次元振動方程式を得る。

3. 静力学的無次元基礎式

無次元振動方程式(6)において、慣性項、減衰項を零とおき、右辺の外力項の円振動数 $\Omega = 0$ とすれば、静力学的基礎式となる。すなわち、

$$K^* d^* = p^* \quad (7)$$

一般に、中間荷重の作用する場合には、部材座標系に対して、 (i, j) 部材の i 端における固定端断面力を $\bar{C}_{ji}$ 、部材剛性マトリックスを $\bar{K}_{ji}$ 、 $\bar{K}_{jj}$ 、変位を $\bar{d}_{ji}$ 、 $\bar{d}_{jj}$ とすれば、 (i, j) 部材の i 端における断面力 $\bar{P}_{ji}$ およびその無次元断面力 $\bar{P}_{ji}^*$ は、次式

$$\bar{P}_{ji} = \bar{K}_{ji} \bar{d}_{ji} + \bar{K}_{jj} \bar{d}_{jj} + \bar{C}_{ji} \quad (8)$$

$$\bar{P}_{ji}^* = \bar{K}_{ji}^* \bar{d}_{ji}^* + \bar{K}_{jj}^* \bar{d}_{jj}^* + \bar{C}_{ji}^* \quad (9)$$

と表わすことができる。ここに、上付添字*は、変位、剛性マトリックスの無次元数を意味し、部材の長さ、断面積、弾性係数 l, A, E の代表値 l_0, A_0, E_0 に対する相似比を k_l, k_A, k_E 、部材軸方向

を主軸とする直線部材の、各軸のまわりの細長比を $\lambda_3, \lambda_\eta, \lambda_5$ ポアソン比を ν 、係数を k として、 $\bar{K}^*$ は、次式

$$\bar{K}_{iji}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_e} & -\frac{12}{k_e \lambda_3^2} & 0 & -6\frac{1}{\lambda_3^2} \\ & -\frac{12}{k_e \lambda_3^2} & -\frac{12}{k_e \lambda_\eta^2} & 6\frac{1}{\lambda_\eta^2} \\ & -\frac{12}{k_e \lambda_\eta^2} & -\frac{12}{k_e \lambda_5^2} & 0 \\ & 6\frac{1}{\lambda_\eta^2} & 0 & -k_e \frac{k}{2(1+\nu)\lambda_3^2} \\ \text{sym.} & & & -k_e \frac{4}{\lambda_\eta^2} & -k_e \frac{4}{\lambda_5^2} \end{bmatrix}_{iji} \quad (10)$$

である。また、無次元断面力 $\bar{P}^*$ の要素である断面の力 $\bar{P}$ 、モーメント $\bar{M}$ の無次元数は、 $\bar{P}/P_0, \bar{M}/P_0 l_0$ 、無次元変位 $\bar{d}^*$ の要素である変位 $\bar{u}$ 、回転変位 $\bar{\phi}$ の無次元数は、 $(E_0 A_0 / P_0)(\bar{u} / l_0), (E_0 A_0 / P_0) \bar{\phi}$ である。式(7)の K^* は式(10)の $\bar{K}^*$ より、 P^* は、 $\bar{C}_{iji}$ と外力より変換マトリックス T を用いて求めることができる。

軸力 $\bar{P}_3$ と曲げモーメント $\bar{M}_\eta$ を受ける部材断面の繰応力 $\sigma_{3\eta}$ は、 η 軸よりの繰距離を z_η とすれば、

$$\sigma_{3\eta} = \frac{\bar{P}_3}{A} \pm \frac{\bar{M}_\eta}{I_\eta} z_\eta \quad (11)$$

であるから、上式の両辺に A_0 / P_0 を乗じて応力の無次元数 $\sigma_{3\eta}^*$ を誘導すれば、

$$\sigma_{3\eta}^* = \frac{1}{k_A} \bar{P}_3^* \pm \sigma_{\eta\eta}^* \quad (12)$$

ここに、 $\bar{P}_3^*$ は断面力 $\bar{P}_3$ の無次元数 $\bar{P}_3 / P_0$ であり、 $\sigma_{\eta\eta}^*$ は、二次応力 $\sigma_{\eta\eta}$ の無次元数で、

$$\sigma_{\eta\eta}^* = \frac{A_0}{P_0} \sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{k_A} \frac{1}{k_e} \lambda_\eta^2 \frac{\bar{M}_\eta^* z_\eta}{l} \quad (13)$$

である。上式の z_η / l は、 z と回転半径 r の比 z / r を二次応力に関する断面係数 C_F と定義すれば、

$$\frac{z_\eta}{l} = \frac{1}{\lambda_\eta} C_F l \quad (14)$$

により求めることができる。表-1に、矩形および箱形断面の形状と断面係数 C_F の一例を示す。 C_F が小さい程、部材二次応力は小さくなる。なお、任意部材の細長比 λ_η は、剛比 $\kappa = (I / l) / (I_0 / l_0)$ として、次式

$$\lambda_\eta^2 = k_A \cdot k_e \cdot \lambda_0^2 / \kappa_\eta \quad (15)$$

によって与えられる。ここに、 I_0, λ_0 は断面二次モーメントおよび細長比の代表値であり、 $\lambda_0 = A_0 l_0^2 / I_0$ である。

以上に誘導された無次元数を、つぎのように取りまとめることができる。

(a) 形状に関する無次元数

k_A, k_e 部材断面積 A と部材長 l の相似比 $C_F = z / r$ 二次応力の断面係数
 κ 剛比 λ_0 細長比の代表値

(b) 材料に関する無次元数

k_E 部材弾性係数 E の相似比 ν ポアソン比

断面形状	断面係数
矩形断面 	$C_F = 1.73$
H形断面 	$C_F = 1.22 \sqrt{2 + (A/A_0)}$ ($A = bt, A_0 = ht$)
箱形断面 	$C_F = 1.73 \sqrt{\frac{1 + (A/A_0)}{3 + (A_0/A)}}$ ($A = bt, A_0 = h't'$)

表-1 断面形状と断面係数 C_F

(c) 外力の無次元数

$$P^* = P/P_0 \quad \text{集中外力の相似比}$$

$$M^* = M/P_0 l \quad \text{モーメントの無次元数}$$

(d) 変形に関する無次元数

$$u^* = (E_0 A_0 / P_0) (u / l_0) \quad \text{変位の無次元数}$$

$$\sigma^* = \sigma A_0 / P_0 \quad \text{応力の無次元数}$$

$$\phi^* = (E_0 A_0 / P_0) \phi$$

$$\text{回転変位の無次元数}$$

$$e^* = e E_0 A_0 / P_0 \quad \text{ひずみ } e \text{ の無次元数}$$

$$\bar{P}_3^* = \bar{P}_3 / P_0$$

$$\text{軸力の無次元数}$$

$$\bar{M}^* = \bar{M} / P_0 l \quad \text{断面力 } \bar{M} \text{ の無次元数}$$

不静定構造部材に平均温度と温度こう配の変動のある場合には、荷重として外力の作用する場合と同様にして、つぎに示す無次元数を誘導することができる。

(a) 材料に関する無次元数

$$k_c = c / c_0 \quad \text{部材の温度膨脹係数 } c \text{ の相似比, } k_E, \nu$$

(b) 荷重の無次元数

$$\Delta \theta^* = \Delta \theta / \Delta \theta_0 \quad \text{平均温度上昇量 } \Delta \theta \text{ の相似比} \quad \alpha^* = \alpha / \alpha_0 \quad \text{温度こう配変化量 } \alpha \text{ の相似比}$$

(c) 変形に関する無次元数

	変位 u^*	回転変位 ϕ^*	軸力 $\bar{P}^*$	モーメント $\bar{M}^*$	応力 σ^*
平均温度	$\frac{1}{c_0 \Delta \theta_0} \frac{u^0}{l_0}$	$\frac{1}{c_0 \Delta \theta_0} \phi^0$	$\frac{1}{c_0 \Delta \theta_0} \frac{\bar{P}_3^0}{E_0 A_0}$	$\frac{1}{c_0 \Delta \theta_0} \frac{\bar{M}_2^0}{E_0 A_0 l_0}$	$\frac{1}{c_0 \Delta \theta_0} \frac{\sigma^0}{E_0}$
温度こう配	$\frac{1}{c_0 \alpha_0 l_0} \frac{u^*}{l_0}$	$\frac{1}{c_0 \alpha_0 l_0} \phi^*$	$\frac{1}{c_0 \alpha_0 l_0} \frac{\bar{P}_3^*}{E_0 A_0}$	$\frac{1}{c_0 \alpha_0 l_0} \frac{\bar{M}_2^*}{E_0 A_0 l_0}$	$\frac{1}{c_0 \alpha_0 l_0} \frac{\sigma^*}{E_0}$

4. 骨組構造における相似則とその応用 (静力学的構造に対して)

静力学的骨組構造システム I, II に、外力が作用する場合、形状、材料および荷重に関する既述の無次元数が等しいなら、変形の無次元数も等しくなる。すなわち、つぎに示す変形の相似則を得る。

(a) 変位の相似則

$$\left(\frac{E_0 A_0 u}{P_0 l_0} \right)_I = \left(\frac{E_0 A_0 u}{P_0 l_0} \right)_{II}, \quad \left(\frac{E_0 A_0 \phi}{P_0 l_0} \right)_I = \left(\frac{E_0 A_0 \phi}{P_0 l_0} \right)_{II} \quad (16)$$

(b) 断面力の相似則

$$\left(\frac{\bar{P}}{P_0} \right)_I = \left(\frac{\bar{P}}{P_0} \right)_{II}, \quad \left(\frac{\bar{M}}{P_0 l_0} \right)_I = \left(\frac{\bar{M}}{P_0 l_0} \right)_{II} \quad (17)$$

(c) 応力、ひずみの相似則

$$\left(\frac{\sigma A_0}{P_0} \right)_I = \left(\frac{\sigma A_0}{P_0} \right)_{II}, \quad \left(\frac{e E_0 A_0}{P_0} \right)_I = \left(\frac{e E_0 A_0}{P_0} \right)_{II} \quad (18)$$

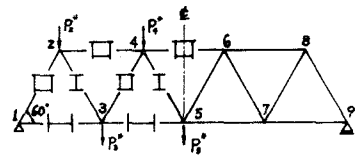


図1 トラス橋モデル

温度荷重の作用する場合にも、同様の変形の相似則を得る。

(1) 骨組構造の一般的性状

変形の相似則を用いることによって、構造設計に有効な骨組構造の一般的性状のいくつかを指摘することができるが、ここでは、死活荷重が骨組部材に与える影響と、トラス部材の曲げモーメントによる二次応力 (以下たんに二次応力) と細長比の関係と、相似則に基づいて考察する。

(a) 骨組構造の部材応力に及ぼす死活荷重の影響

死荷重を P_0 、活荷重を P_L とし、外力を死荷重の代表値 $P_0 = w_0 A_0 l_0$ (w_0 は部材の単位重量) で除く

た無次元数を

$$P^* = \frac{1}{P_0} (P_0 + P_L) = P_0^* + \frac{P_L}{w_0 A_0 l_0} \quad (19)$$

とすれば、荷重と応力の間に線形の関係が成立し、形状、材料および載荷の形式を相似に保つ場合、式(18)、(19)より

$$\frac{\sigma}{w_0 l_0} \propto P_0^* + \frac{P_L}{w_0 A_0 l_0} = P_0^* + \frac{P_0}{w_0 A_0 l_0} \frac{P_L}{P_0} \quad (20)$$

の関係をj得る。ここに P_0 は活荷重の代表値である。

P_0^* の要素すなわち死荷重の相似比 $P_0^* = P_0 / P_0$ は、 k_A 、 k_E および $k_w = w / w_0$ の積として与えられるから、死荷重が支配的の場合は、スパンを L として $\sigma \propto w_0 L$ の関係が成立する。すなわち応力 σ はスパン L に比例する。式(20)の右辺の第2項は、活荷重の無次元数 P_L^* であり、活荷重の相似比 P_L / P_0 の要素 $k_{PL} = P_L / P_0$ を定数とし、形状が相似で $A_0 \propto L^2$ とすれば、活荷重が支配的の場合は、式(20)より応力 σ は L^2 に逆比例することがわかる。

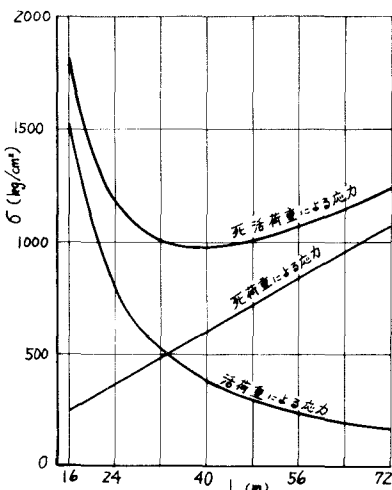


図2 スパン L と応力 σ (4.6部材) の関係

一般に死活荷重が同時に作用する場合は、上記の関係を重畳した関係が得られる。図-2は図-1に示すトラス橋モデルについて、の応力とスパンの関係の一例を示したものである。ただし、幅員は一定とし、その外の形状、材料、載荷の形式を相似に保ち、床版、床組などによる荷重を省略し、活荷重として、線荷重と等分布荷重を考える。活荷重が線荷重 P_L の場合は、幅員が一定であるからスパンの如何にかかわらず定数であり、線荷重による応力は L^2 に逆比例するが、等分布荷重の場合は、その無次元数 $P_L^* = P_L / w_0 A_0 l_0$ は、 P_L が l_0 に比例して大きくなるから、スパンの2乗に逆比例し、等分布荷重 P_L による応力は、スパン L に逆比例することになる。

図-2より、ある構造形式に対して応力を最小にするスパンが存在すること、スパンがそれ以上になれば死荷重による応力が卓越し、スパンがそれ以下になれば活荷重による応力が支配的であることがわかる。このようなスパンは最適スパンと言ふべきであろう。

(b) トラス部材の細長比と二次応力

剛節トラスの曲げモーメントおよびせん断力に基づく二次応力が、部材高さ h と部材長さ l の比 h/l に比例する問題を、さきに誘導された無次元基礎方程式に基づいて検討する。

外力による無次元二次応力 $\sigma_{m\eta}^*$ を与える式(13)を、式(14)、(15)を用いて変形すれば、

$$\sigma_{m\eta}^* = \frac{C_{F\eta}}{\sqrt{k_A \cdot k_E \cdot K_\eta}} \lambda_0 \cdot \bar{M}_\eta^* \quad (21)$$

となる。同様にして、部材平均温度と温度こう配を生ずる場合の無次元二次応力は、次式

$$\sigma_{m\eta}^{\theta*} = \frac{C_{F\eta}}{\sqrt{k_A \cdot k_E \cdot K_\eta}} \lambda_0 \cdot \bar{M}_\eta^{\theta*} \quad \sigma_{m\eta}^{\alpha*} = \frac{C_{F\eta}}{\sqrt{k_A \cdot k_E \cdot K_\eta}} \lambda_0 \cdot \bar{M}_\eta^{\alpha*} \quad (22)$$

で表わされる。図1に示す対稱トラスに、 $P_2^* = 0.5$ 、 $P_3^* = 3.16$ 、 $P_4^* = 1.0$ 、 $P_5^* = 4.83$ の荷重比を載荷し、その部材長さ比、断面積比、剛比を一定として、代表細長比 λ_0 (この場合1.2部材) を変えた場合、無次

元軸力 $\bar{P}_s^*$, 軸力による無次元応力 σ_s^* および無次元変位 d^* はほぼ定値をとり、無次元曲げモーメント M_l^* は式(10)より推察されるように λ^2 に逆比例するから、式(21)から

$$\sigma_{mq}^* \propto \frac{C_F \rho}{\lambda_0} \quad (23)$$

すなわち、無次元二次応力は図-3に示すように細長比 λ_0 に逆比例する。式(23)の右辺 $C_F \rho / \lambda_0 = h / 2l$ であるから、 $\sigma_{mq}^* \propto h / l$ であり、 σ_s^* は定値をとるから、 β を係数として

$$\frac{\sigma_{mq}}{\sigma_s + \sigma_{mq}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_s^*}{\sigma_{mq}^*}} = \frac{1}{1 + \beta \frac{l}{h}} \quad (24)$$

すなわち、二次応力の全応力に対する比は、近似的に l/h に逆比例することがわかる。

(2) アーチダムの比較設計への応用

アーチダムの応力解析に用いる荷重分割計算法は、アーチ要素と片持ち梁要素に分割して行なう一種の骨組構造解析であり、形状および材料が相似の二組のシステム I, II に対して、次の変形の相似則を式(16), (18)より誘導し得る。すなわち、深さ H_0 における水圧荷重は wH_0 (w は水の単位重量) で、コンクリートの弾性係数を E_c として、水圧荷重を受ける場合の変位 u と応力 σ の相似則は、

$$\left(\frac{E_c}{wH_0} \frac{u}{H_0} \right)_I = \left(\frac{E_c}{wH_0} \frac{u}{H_0} \right)_{II} = f_u, \quad \left(\frac{\sigma}{wH_0} \right)_I = \left(\frac{\sigma}{wH_0} \right)_{II} = f_\sigma \quad (25)$$

堤体平均温度上昇 $\Delta\theta$ の生ずる場合、 $\Delta\theta$ がダム厚に逆比例する関係を用いれば、変位、応力の年間変化量の相似則は、

$$\left(\frac{u^0}{100 C_0} \right)_I = \left(\frac{u^0}{100 C_0} \right)_{II} = f_{u,u}, \quad \left(\frac{\sigma^0}{100 C_0 \frac{E_c}{H_0}} \right)_I = \left(\frac{\sigma^0}{100 C_0 \frac{E_c}{H_0}} \right)_{II} = f_{\sigma,\sigma} \quad (26)$$

温度こう配 α を生ずる場合、 $\Delta\theta$ がダム厚に逆比例する関係を用い、

$$\left(\frac{u^\alpha}{16 C_0 H_0} \right)_I = \left(\frac{u^\alpha}{16 C_0 H_0} \right)_{II} = f_{u,\alpha}, \quad \left(\frac{\sigma^\alpha}{16 C_0 \frac{E_c}{H_0}} \right)_I = \left(\frac{\sigma^\alpha}{16 C_0 \frac{E_c}{H_0}} \right)_{II} = f_{\sigma,\alpha} \quad (27)$$

である。したがって、式(25)において $w = 1 \text{ ton/m}^3$, $E_c = 200,000 \sim 300,000 \text{ kg/cm}^2$ との関係を与えれば、満水状態における変位と応力の近似推定式として、

$$u = f_u' \cdot H_0^2 = (0.0003 \sim 0.0005) f_u' H_0^2 \text{ (mm)}, \quad \sigma = f_\sigma' \cdot H_0 = 0.1 f_\sigma' H_0 \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (28)$$

を得る。ここに、 H_0 の単位は m である。図4, 5は、重力式アーチダムの鴉子ダムと薄肉アーチダムの綾北ダムなど7ダムの u_{max} と σ_{max} の H_0 との関係プロットしたもので、 f_u' の値は $0.002 \sim 0.006$, f_σ' の値は $0.4 \sim 0.8$ の範囲に分布していることがわかる。同様、温度荷重による変位、応力の年間変化による応力と変位の高さ H_0 に対する関係は、式(26), (27)より、

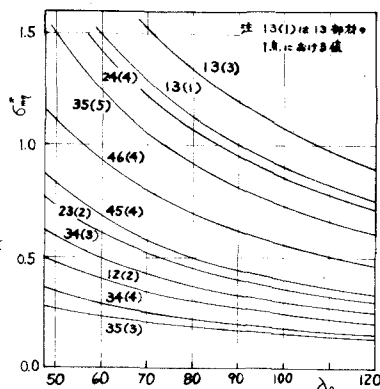


図-3 代表細長比 λ_0 と無次元二次応力 σ_{mq}^* の関係

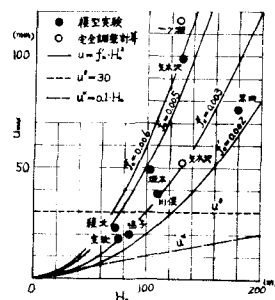


図-4 アーチダムの高さ H_0 とクラック最大変位(半径方向) u_{max} との関係

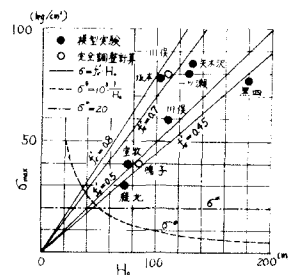


図-5 アーチダムの高さ H_0 とクラック外3/4面水平方向最大圧縮応力 σ_{max} との関係

$$u^0 = f_{\sigma, u} \quad (\text{mm}) \qquad u^{\sigma} = f'_{\sigma, u} H_0 = 0.16 f_{\sigma, u} H_0 \quad (\text{mm}) \quad (29)$$

$$\sigma^0 = f'_{\sigma, \sigma} \frac{1}{H_0} = (200 \sim 300) f_{\sigma, \sigma} \frac{1}{H_0} \quad (\text{kg/cm}^2) \qquad \sigma^{\sigma} = f'_{\sigma, \sigma} = (32 \sim 48) f_{\sigma, \sigma} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (30)$$

腹板型等厚円弧アーチダムに対して、クラウン片持はり法によりフレキシビリティ係数 f を近似推定し、式(29)、(30)の関係を図4、5にプロットした。これより、堤体温度変化に伴う変位はダム高 H_0 の大小に関係しないが、水圧荷重と温度こう配による変位は H_0 に比例して大きくなること、大型アーチダムでは水圧荷重による変位が顕著であるが、小型になれば、温度荷重の影響が大きいこと、水圧荷重による応力は H_0 に比例するが、堤体平均温度による応力は H_0 に逆比例すること、したがって小型アーチダムの応力は温度荷重の影響が顕著であり、大型では、水圧荷重と温度こう配とくに水圧荷重による応力が支配的であることが考察される。

ダム高と許容応力を与えて、最適アーチダムの形状が既設アーチダムの何れの形式に属すべきかの判断に、図-5は有効に利用されるであろう。

5. 動力学の相似解析

無次元振動方程式(6)において、剛性マトリックス K^* と荷重項 P^* の構成については、静力学的問題を通してかなり詳細に検討した。この形状、材料に関する無次元数は、そのまま動力学の問題に適用することができる。振動の相似解析に現われる無次元数を検討する。

(1) 無次元質量マトリックス M^*

質量マトリックス M のうち、任意部材端における質量マトリックスを $\bar{M}$ 、 $\bar{M} = \rho A l \bar{M}'$ (ρ は部材密度、 A は部材断面積、 l は部材長)とすれば、式(5)の第1式より

$$\bar{M}^* = \frac{\Omega_0^2}{E_0 A_0} l_0 L'_0 \rho A l \bar{M}' L'_0 = \Omega_0^2 \left(\frac{\rho_0 l_0^2}{E_0} \right) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{l}{l_0} \frac{A}{A_0} (L'_0 \bar{M}' L'_0)$$

上式において

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0 l_0^2}} = \frac{V_0}{l_0}, \quad V_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} \quad (31)$$

であるような円振動数 Ω_0 を用いれば、 M^* を規定する無次元数は、 k_0 、 ρ_0 、部材密度 ρ の相似比 k_ρ 、コンシステントマトリックス法を用いるとき、細長比 λ などである。

(2) 無次元円振動数 Ω^* 、時間の無次元数 t^*

式(5)の第5式に式(31)を代入すれば、

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\Omega l_0}{V_0} \quad (32)$$

である。上式は一種のストローハル数を与える。時間の無次元数は、式(5)の第6式に式(31)を代入すれば、

$$t^* = \frac{V_0 t}{l_0} = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0 l_0^2}} t \quad (33)$$

(3) 無次元変位 u^* 、外力の振中 P^* の無次元数は、静力学的骨組構造の場合と同じである。

(4) 無次元減衰係数 C^*

減衰が、構造、粘性、履歴減衰の何れの形式に従うかの如何にかかわらず、式(5)の第2式と式(31)より

$$C^* = \frac{\Omega_0 l_0}{E_0 A_0} LCL = \frac{1}{\rho_0 A_0 V_0} LCL = \frac{1}{m_0 \Omega_0} LCL \quad (34)$$

の形をとる。ここに、 $m_0 = \rho_0 A_0 l_0$ は代表部材の質量である。

一例として減衰が空気または部材の粘性に帰因する場合を考える。その粘性係数の代表値を μ_0 とし、 $C = \mu_0 \sqrt{A_0} C'$ であるとき、 C' は無次元マトリックスとなり C^* は次式

$$C^* = \frac{\mu_0 \sqrt{A_0}}{\rho_0 A_0 V_0} C' = \frac{C'}{\frac{V_0 \sqrt{A_0}}{V_0}} = \frac{C'}{R_{eo}} \quad (35)$$

で表わされる。上式で $\nu_0 = \mu_0 / \rho_0$ は動粘性係数であり、 $R_{eo} = V_0 \sqrt{A_0} / \nu_0$ は、一種のレイノルズ数である。 C' は、既述の形状に関する無次元数と、粘性係数 μ の相似比 k_μ などによって構成されるものと推察される。

(5) 骨組構造における動力学の相似解析

強制、減衰振動の場合、システム I と II に対して、同一の M^*, C^*, K^*, p^* と、初期条件および境界条件に関する無次元数を定め

$$\left(\frac{V_0 t}{l_0} \right)_I = \left(\frac{V_0 t}{l_0} \right)_{II} \quad (36)$$

によって定義される時間をとれば、 $\Omega_I^* = \Omega_{II}^*$ であり、無次元振動方程式 (6) より、同値の d^* を得る筈である。したがって、振動による変位 u および速度 $\dot{u}$ 、加速度 $\ddot{u}$ の相似則

$$\left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{u}{l_0} \right)_I = \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{u}{l_0} \right)_{II}, \quad \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{\dot{u}}{V_0} \right)_I = \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{\dot{u}}{V_0} \right)_{II}, \quad \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{l_0 \ddot{u}}{V_0^2} \right)_I = \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{l_0 \ddot{u}}{V_0^2} \right)_{II} \quad (37)$$

を得る。また、 $t_I^* = t_{II}^*$ のとき $d_I^* = d_{II}^*$ であれば、無次元周期 $T^* = \Omega_0 T$ として $T_I^* = T_{II}^*$ であり、無次元内振動数は $\omega^* = 2\pi / T^* = \omega / \Omega_0 = \omega l_0 / V_0$ となり、応答としての円振動数の相似則は $\omega_I^* = \omega_{II}^*$ である。

6. ちよひ

最初に、骨組構造における静力学の相似則と、これを構造設計に应用する問題を、2, 3 の例をあげて概説した。この静力学問題における、形状、材料、変位、応力に関する無次元数は、そのまま、動力学的問題の相似解析に適用できる。

減衰、強制振動の場合の、ここに誘導された時間および円振動数の無次元数は、すでに岡本等²⁾がアーチゲムの模型実験に用いているものと同じである。

また、式 (35), (36), (37) などを用いて、骨組構造の振動に関する一般的性状を、静力学的構造解析の場合と同様の手法を適用することが可能である。今回はたんに相似則の検討に止めた。

参考文献

- 1) 三池亮次: "骨組構造における相似則の構造計画への応用" エ木学会論文報告集 (投稿中)
- 2) 岡本舜三, 加藤勝行, 伯野元彦: "生研式アーチダム模型振動試験方法について" エ木学会論文集 第75号, 昭和36年7月, p.47~56.
- 3) 江寺一郎, シューリング D.J.: "模型実験の理論と応用" 技報堂 昭和48年
- 4) その他.