

グラフ理論適用による剛性行列のバンド幅に因する考察

京都大学工学部

小西一郎

京都大学工学部

白石成人

京都大学工学部

○谷口健男

§1. 緒論

近年、電子計算機の発達には、まったく目まぐるしいものがあり、その容量、計算所要時間は飛躍的に増加、短縮されつつある。

一般に、構造物を解析するのには大型計算機を用いた場合、容量上十分な余裕がみられ、中小型機を用いた場合、向うかの手法を用いねば、一度に解析は不可能というケースは常に生じる。この場合、インプットするデータ量を減少させるなり、分割するなりして、計算機固有の容量内に収める必要がある。

対象構造物を骨組系にかけ、考えてみると、その剛性行列は一般に零要素が多く疎であるが、節点番号を適当に付けねば、非零要素は剛性行列の対角部に集まり、いわゆる帯行列となる。この帯行列の帯幅 (band width) の大、小は、電子計算機へのインプット・データ量の大小も決定し、よって効果的に計算機を用いるためには、対象骨組系の最適節点番号付けという問題を解析しなけねばならない。通常の高層ビルディング等の骨組系においては、同じパターンを繰り返しが多く、経験的にかなり帯幅のせまい剛性行列を組み立てることが可能であるが、構造形式によっては、たとえ節点数・部材数が少くとも最適節点番号付けが非常に困難となる場合がある。

最適節点番号下における帯幅は、対象構造物の物理的特性、例えば部材剛性、座標位置、荷重等に向う関係なく、ただ適切な番号列も付加された節点間の接合の有無のみに関係し、まったく同じ系においても番号順序を変えれば、帯幅も変化する。

以上のことより、この問題は、対象を骨組としてではなく、単なる点と線の集合体、あるいは一つのグラフと考える方が十分である。骨組系をグラフで置き換えることにより、従来の物理的諸概念は全て消去され、ただ点と線の接合関係のみ残されることになる。

本研究においては、骨組系は点と線よりなるグラフであるとの認識の上に立ち、グラフ理論の諸概念を導入して、骨組の剛性行列の帯幅の問題に検討を加えてみた。

§2. 骨組とグラフ

グラフ G とは点と線のみで画かれた図形のことであり、骨組系の節点・部材は G の点・線にあたる。グラフにおいては各部分に分離しているグラフも許されるが、構造系ではそれらは互に独立な系として取り扱われるから一つの骨組系は一つの連結グラフと考える。

今回の問題は帯幅についてであり、右図-1 に示す骨組系において、 a 、 b 両部材は、その剛性の影響を受ける点はいずれも A 、 B 両点のみであり、他の点には影響は生じない。このように datum node (接地点) に接続する部材は帯幅を考える場合に除去され、図-1 の系は図-2 のグラフに置き換えられる。

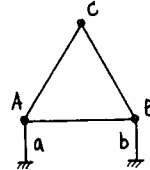


図-1. 骨組系

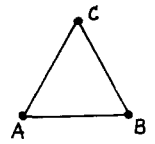


図-2. 置換グラフ

グラフ $G(n, m)$ とは n 個の点, m 本の線よりなるグラフである。よって 2 元の骨組系 (system) とは, $\text{System}(n, m+m_d) \rightarrow G(n, m)$ の置換が行われたことになる。ここで m_d は datum mode に接続している部材数である。

以下、後に用いられるいくつかのグラフ理論の概念について説明を与える。

• 距離 (distance) ; 略字 $\equiv d$

距離とは 互にある個数の線を介して連結されている 2 点間に存在する介在線の本数 q としてあり、右図-3 の例で言えば、

$$(a, b \text{ 間の距離}) = 4$$



図-3. G

• 次数 (degree) もしくは 度数 ; 略字 $\equiv \text{deg.}$

1 つの点に直接出入している線の数も言い、図-2 の各点の次数は、すべて 2 である。1 本の線は必ず 2 点に出入する。言い換えると、1 本の線はその両端を必ず 2 点に接続するから、 $G(n, m) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n (\text{deg. of a point "i"}) = 2m \quad (2-1)$$

• 直径 (diameter) ; 略字 $\equiv d_0$

半径 (radius) ; 略字 $\equiv r_0$

$G(n, m)$ において、任意点 (i 点) より他の全ての点への最短距離 d_i を求める。そのうちの最長のもを d_i とする。これを全ての点について 2 行なり、とに求まったものを $(d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n)$ とする、この $d_1 \sim d_n$ のうち最長のもを G の直径 d_0 、また最小のもを半径 r_0 とする。図-4 の例において、

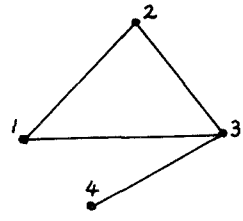


図-4. グラフ G

$$d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = 2 \quad \text{よって} \quad d_0 = 2, r_0 = 1$$

＝これより 点-3 が $G(3, 4)$ の中心であることがわかる。一般に、点の数 (n)、直径 (d_0)、半径 (r_0) の間には次式が成立する。

$$n > 2r_0 \geq d_0 \geq r_0 \quad (2-2)$$

• 完全グラフ ; 略字 $\equiv G_c$

完全グラフとは、 G に含まれる全ての点と点の間の距離が 1 である。言い換えれば、全ての点間が 1 本の線が結合されている。よって $d_0 = r_0 = 1$ のグラフを言う。 G_c においては

$$m = n(n-1)/2 \quad (2-3)$$

三角形は一番簡単な完全グラフの一つであり、 $G_c(3, 3)$ が示される。完全グラフが平面グラフとして画けるのは 4 点完全グラフまでであり、5 点グラフ以上の多点完全グラフは非平面グラフとなり、もし交差を避けて画こうとすれば、多穴トーラスを用いなければならぬことは自明である。

• 補グラフ ; 略字 $\equiv \bar{G}(n, \bar{m})$

ある一つのグラフ $G(n, m)$ の補グラフ $\bar{G}(n, \bar{m})$ とは、 G と全く同じ点数を持ち、 G のうち距離 1 である 2 点間のみを結合し、表示するグラフのことであり、 $\bar{G}$ は、 G と G の完全グラフ G_c によって次式が求められる。

$$\bar{G}(n, \bar{m}) = G_c(n, n(n-1)/2) - G(n, m) \quad (2-4)$$

る。帯幅に影響を与える諸要因

この節において、任意グラフの帯幅に影響を与える諸要因を簡単なグラフよりさぐってみる。
 m 点、 m 線よりなるグラフ $G(m, m)$ を考える。この m 個の点に適当に $1 \sim m$ の番号を付し、節点間の接続の有無を示す節点接続行列 $A (m \times m)$ を作る。この行列 A の列ベクトルに注目すると、

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m] \quad (3-1)$$

この行列 A を用いると、グラフ G の隣接行列とも言うべき行列 K は、下式で表わされる。

$$K = A^t A = \begin{bmatrix} A_1^t A_1 & A_1^t A_2 & \dots & A_1^t A_i & \dots & A_1^t A_m \\ A_2^t A_1 & A_2^t A_2 & \dots & A_2^t A_i & \dots & A_2^t A_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_i^t A_1 & A_i^t A_2 & \dots & A_i^t A_i & \dots & A_i^t A_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^t A_1 & A_m^t A_2 & \dots & A_m^t A_i & \dots & A_m^t A_m \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

ここで、もし i, j 個の距離 > 1 ならば $A_i^t A_j = 0$

もし i, j 個の距離 ≤ 1 ならば $A_i^t A_j \neq 0$

すなわち、従来用いられた Branch Node Incidence Matrix A を用いた場合 (3-2) 式の対角要素 $A_i^t A_i$ には正整数が加わるが、これは i 点に出入する線の数、すなわち次数を示し、 i, j 個が $d=1$ の関係にあるならば、 $A_i^t A_j = -1$ 、もし i, j 個に接続がなければ、 $A_i^t A_j = 0$ となる。また、次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^m A_i^t A_j = 0 \quad (3-3)$$

すなわち、各行においてその対角要素に示した数に等しい (-) 要素がその行内に存在する。

1つの完全グラフ G_c を考える。この各点の次数は全 $2(m-1)$ である。すなわち、全 2 の点間の距離は $d=1$ であり、グラフの直径 $= 1$ 。よって G_c の K を作れば、全要素は非零となり、

Half Band Width (H.B.W.) $= m$ となる。この場合、節点番号は全く任意であり、完全グラフより任意に1本線を除去すると、この除去された線の両端点間には直接の接続がなくなることになり、その距離は $d=2$ となる。他の全 2 の点間の距離は変化せず $d=1$ であり、 $d_0=2, v_0=1$ 。

このグラフの K を考えると、この直径を構成する2点の一方に番号1を、他方に m を、そして他の $(m-2)$ 個の点には任意に $2, 3, \dots, m-1$ の番号を付ければ、 K の $(1, m), (m, 1)$ 両要素 $= 0$ となり、

H.B.W. は G_c の K のちよより1つ減少し、 $(m-1)$ となる。一般に、グラフの諸点において次数の少ない点ほど、直径の両端点となる率が高く、節点番号の1、または m を付ける一つの目標となる。以上の完全グラフに関する考察より、次数および直径が帯幅決定の主要因であることがわかる。

次に典型的ないくつかのグラフに考察を加えてみる。図-5に示すのは一点集中 Tree Graph である。特徴は、1点のみが完全であり、他の全点の次数 $= 1$ であり、 $d_0=2, v_0=1$ 。その最適番号順序は図に示したとおりであり、最多次数点に番号の中心となる4を付している。H.B.W. $= 4$ であり、図-6の K よりも、それが理解できる。集中点が存在する場合、集中点より $d=1$ の全点を、ちょうど二分割するように集中点に番号を付けなければよいことがこのよりわかる。また、 K -図より認められる特性として、直径の距離数に等しい数で、点1より点 m までの m 点をできるかぎり等分割するように点番号を付すことが望ましく、このように番号を付すことができた場合に、

帯幅は最小となることがわかる。

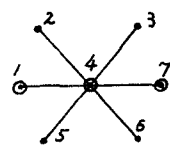


図-5. 1点集中グラフ

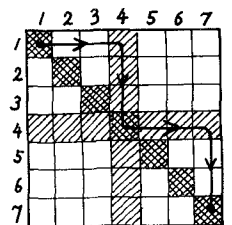
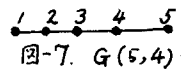
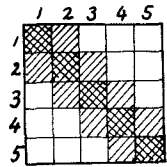


図-6. K

次に連結グラフとして最も単純なグラフを挙げる。例は図-7に示されたような点列が直列に連結されたものである。このグラフは $G(n, n-1)$ の n 点連結グラフで最小本数の線しか含まれていない。その K は図-8に示され、 $H.B.W. = 2$ となり、全連結グラフにおける $H.B.W.$ の最小値が2であることを示す。 $H.B.W. = 1$ となるのは、グラフが非連結となる。



$G(n, n-1)$ においては、 $d_0 = n-1$ であり、与えられたグラフ自体が直径を示す。この G において、 $\deg_i = 1$ は両端点、他の全ての点の次数 $= 2$ 。また2前述のように、次数の小さい2点に番号1, n を付け、他の $(n-2)$ 点には、2 ~ $(n-1)$ の番号をその直径方向に順次付けなければならない。



以上のいくつかの簡単なグラフに関する考察より、帯幅決定の重要要因として、図-8、 K

1. グラフの直径

2. 点の次数

が挙げられる。また以下の節においては、特にこの2つの要因に注目した帯幅の決め方を考える。

§4. Tree System の最小帯幅の決定

3節で挙げた重要要因に従って、骨組構造物のうち最も単純と考えられる Tree System について、帯幅の決め方を考える。Tree System は、その名も示しており closed path の存在しない系のことであり、いわゆる静定構造物である。以下、簡単なグラフから順次複雑な形へと、その最小帯幅を決定する手法を統一させた図式解法を見出しながら論を進める。

4-1. 一点集中 Tree System の場合 ($d_0 = 2, r_0 = 1$)

図-5に、この一例が挙げられている。いま n 点グラフと考えると、集中点の次数 $= n-1$ である。この場合、集中点の節点番号は1 ~ n のうち中央に当る番号を付したとせ、 $H.B.W.$ は最小になることを前節で示した。すなわち

$$H.B.W. = n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \quad (4-1)$$

として表す。ここで、 $\lceil \cdot \rceil$ はガウス記号である。この $H.B.W.$ を図式的に求める方法を考える。集中点より若い節点番号をもつ点の個数と、それ以上の番号を持つ点の個数とをなるべく等しくせよというのであるから、次のような図式を行えばよい。まず集中点以外の任意2点を

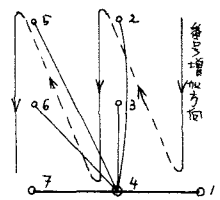


図-9. 節点番号順序

を pick up し、これらの点で直径を構成させ、図-9に示すように横一列に並べる。集中点の上方に2点、左上方に2点とり、集中点と $d=1$ が連結されていることも示すため、さらに4点と集中点を線で結ぶ。こうすれば、元のグラフの結合関係をくずすことなく、外見上は前とは違った新しいグラフを得る。ここで図の矢印に示されるように、右上方より下方に、そして直径を構成する点に

到達すれば、次の列を上方から下方に、というように繰り返し、最終的には最左列下端の点まで順次1 ~ n の番号を付ける。こうすれば、集中点の番号は自動的に1 ~ n の中央の番号に一致することになる。この図式法を用いれば、最適番号が付加されたときの $H.B.W.$ は、最大行数を保持位置での水平方向の連結。この場合では直径を構成する点の個数において見出し得る。さらに、 $H.B.W.$ は次式が最も簡単に表わすことができる。

$$H.B.W. = (\text{直径の } H.B.W.) + (\text{最大行数}) \quad (4-2)$$

直径の H.B.W. は常に 2 であり、図-9 の場合、最大行数は 2 であり、この例では $H.B.W. = 2 + 2 = 4$ となり事実と一致する。図-10 に図-9 の一般図を示す。直径を含めて m 行存在し、よって集中点の次数 $= 2m$ の場合を示しているが、一点集中系の場合、H.B.W. を 1 つ増やさずには、次数が 2 増えなければならないこと加、この図よりわかる、この図示法では、最大節点数差は水平線において現われ、から、連結線の許容方向は、水平、鉛直、右下りおよび左上りの 4 方向である。

4-2. 任意の一点集中 Tree System の場合、

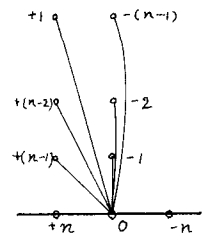


図-10. 集中点 $d=1$ 点

集中点の次数が m である場合を考える。このグラフの直径 d_0 を求めるには、 m 本の点列のうち、最多点列（集中点より端点までの距離 $= d_1$ ）および、次に長い点列（距離 $= d_2$ ）の 2 本を選べばよく、これら 2 本の点列と集中点を含めたものが、直径を構成する。よって、

$$d_0 = d_1 + d_2 \quad (4-3)$$

他の $(m-2)$ 本の点列は決して d_2 を越えることはなく、4-1 で提案した図式解法はこの場合にも適用される、図-11 のように画けることわかる。あるいは、任意の 1 点列は決して 2 行にわたることはなく、1 行内に納まる。よって、任意の一点集中系も、集中点から距離 1 の点の個数、換言すれば、次数により、この $H.B.W.$ が確定する。これは、4-1 の場合と全く同じことである。図-11 の例題では、集中点の次数 $= 7$ であり、 $H.B.W.$ は 4 であり、これが図-11 より認められ、これは事実と一致する。

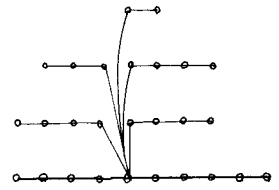


図-11. 図式解法
(1 点集中グラフ)

4-3. 2 点集中 Tree System の場合、

Tree System の中に 2 個の集中点が存在する場合を考える。2 個の集中点に、11 まで仮に 2, 3 の節点数を付ける。2, 3 両集中点を結ぶ点列は、系が Tree であることより唯一本しか存在せず、この点列、すなわち 2, 3 両集中点間の距離 d_2 とする、この点列を含めて、2, 3 両集中点の次数をそれぞれ m_2, m_3 とする。点 2 の m_2 本の点列より、上記 d_2 の点列を除く (m_2-1) 本の点列のうち最長の距離をもつものを選出し、その端点を 1 とする。同じ操作を点 3 の m_3 本の点列について実行し、 d_2 を除いて最長の点列を 1 本選出し、その端点を 4 とする。1 ~ 2 ~ 3 ~ 4 はグラフの直径 d_0 を構成する。そこで 1 ~ 2 間、および 3 ~ 4 間の距離をそれぞれ d_1, d_3 とすれば、

$$d_0 = d_1 + d_2 + d_3 \quad (4-4)$$

以上をまとめると、図-12 のようになる。右図において、

$$\left. \begin{aligned} d_1 &\geq d_1^i \geq d_1^{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, m_2-3) \\ d_3 &\geq d_3^j \geq d_3^{j+1} \quad (j=1, 2, \dots, m_3-3) \end{aligned} \right\} (4-5)$$

が成立することは、 d_1, d_3 が d_0 の一部として選ばれたことより自明である。

図-12 に与えられた Tree Graph が最適な節点

番号付けが行なわれたとき、4-1, 4-2 で述べた図式解法により、直径列を除き m 行にわたる点列が納められたとある。そこで、 $m \geq m_2 - \left\lfloor \frac{m_2}{2} \right\rfloor - 1$, かつ $m \geq m_3 - \left\lfloor \frac{m_3}{2} \right\rfloor - 1$ であることを

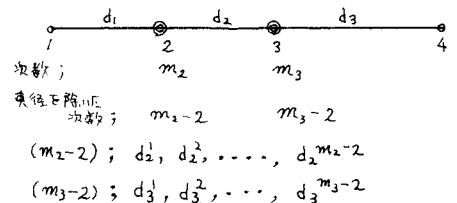


図-12

なり。このとき、1~2, 2~3, 3~4の各節点間に収納可能な点の個数、いま容量(以下 Cap と略記)と呼ぶとする。

$$\text{Cap.1} = m d_1 \quad ; \quad 1 \sim 2 \text{ 間の点容量}$$

$$\text{Cap.2} = m d_2 \quad ; \quad 2 \sim 3 \text{ 間の点容量}$$

$$\text{Cap.3} = m d_3 \quad ; \quad 3 \sim 4 \text{ 間の点容量}$$

1~2間, および3~4間においては, d_1, d_3 が他は全 2 の点列より長いことより, $(m_2-2), (m_3-2)$ 本の点列中, 最長のものから m 本づつ pick up し, これらを 1~2, 3~4間に配置すれば, これらは必ず $\text{Cap.1}, \text{Cap.3}$ 内に十分納まることは自明である。万が一 1 本の点列が 2 行にわたることは決して生ぜず, 必ず 1 行内におさまる。よって,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m d_2^i &\leq \text{Cap.1} = m d_1 \\ \sum_{j=1}^m d_3^j &\leq \text{Cap.3} = m d_3 \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

万が一, 1~2, 3~4間においては, その行数 m は, 集中点 2, 3 より $d=1$ の点の数, 万が一は次数のみにより確定されるということになる。

次に 2~3 間については, 残りの $(m_2-2-n) + (m_3-2-m)$ 本の点列が配置されることになる。よって, 少くとも

$$\left(\sum_{i=n+1}^{m_2-2} d_2^i + \sum_{j=n+1}^{m_3-2} d_3^j \right) = S_2 \quad (4-7)$$

個の点が必要になる。この d_2^i, d_3^j のうちには, d_2 より十分長い点列が存在する可能性もあり, よって 2~3 間においては 1~2, 3~4間のように簡単に次数のみにより行数を確定することはできない。もし, $d_2^i (i=n+1 \sim m_2-2)$ および $d_3^j (j=n+1 \sim m_3-2)$ の点列を 2~3 間において 1 行から上方へ完全に密に配置すると可能ならば, d_2^i, d_3^j が d_2 より大きい可能性がみえても, 2~3 間に配置された点列の次数に何ら関係なく, 結局その区間に配置された点列の点の個数のみによって行数 n が確定することになる。よって, もしもこの仮定が正しいならば, 式 (4-7)

$$\text{Cap.2} - d_2 - S_2 \leq d_2^n + d_3^n \quad (4-8)$$

が成立すれば, 行数 n の内に全点列が納まることを示し, 最適な点配列が行なわれたことを示す, 万が一 (4-8) 式によれば, 図-13 に示すように, 1~2, 3~4 間より n 行を 1 行減少させても, $(d_2^n + d_3^n)$ の方が $(\text{Cap.2} - d_2 - S_2)$ より大きいため, 2~3 間の行数は逆に n となり向ら H.B.W. の減少に役立たないことを示している。以上のことから, 前述の仮定が成立し, かつ (4-8) 式が成立した場合においては, この Tree Graph の H.B.W. は

$$\text{H.B.W.} = 2 + n \quad (4-9)$$

と表せる。

次に, 前述の仮定が正しいことを示す。図-14 は図-13 の 2~3 間の n を示す。今, 2, 3 両点の d を除いた次数を m_2, m_3 とお。

$$\left\{ \begin{aligned} m_2 &; (d_2^1, d_2^2, \dots, d_2^{m_2}) \quad , \quad d_2^i \geq d_2^{i+1} \\ m_3 &; (d_3^1, d_3^2, \dots, d_3^{m_3}) \quad , \quad d_3^j \geq d_3^{j+1} \end{aligned} \right.$$

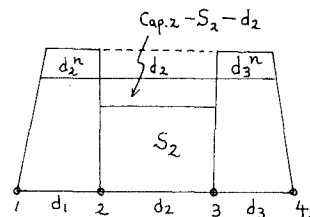


図-13

ここで d_1, d_2 は点列の長さとする。いま、この全点列の点の総数を

$Cap.2 = m d_2$ と等しくなるとする。おなわち

$$\sum_{i=1}^{m_1} d_i + \sum_{j=1}^{m_3} d_j = \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = m d_2 \quad (4-10)$$

ここで $\bar{S}_2$ は点 2 からの点列の点の総数

$\bar{S}_3$ は点 3 からの点列の点の総数。

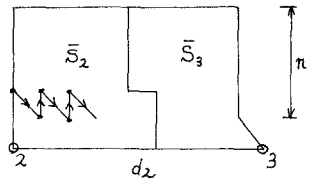


図-14

つぎに、 $Cap.2$ を図-14に示すように $\bar{S}_2, \bar{S}_3$ の2部分に分割する。その方法は、この空間の左端より $[\bar{S}_2/m]$ 列目に分割し、さらにその次の列下より $(\bar{S}_2 - [\bar{S}_2/m] \times m)$ 個の点を付加することにより、 $\bar{S}_2$ を $Cap.2$ の中に区切る。よって残りの点の個数は明らかに $\bar{S}_3$ である。この操作の後、 $\bar{S}_2, \bar{S}_3$ を各々 d_2^1, d_3^1 で埋めることにする。これは次のようにして行う。まず $\bar{S}_2$ 部分について、最初 d_2^1 をこの部分に埋める。 $\bar{S}_2, \bar{S}_3$ の境界線が折り返す必要のないうち十分な行数をとり、図-14に例示したようにジグザグに d_2^1 個の点を連結する。この操作を他の (m_2-1) 本の点列についても同じように行くと 4-2 で述べた許容連結方法のみによって $\bar{S}_2$ 内の全点が $d_2^1 \sim d_2^{m_2}$ で埋められることになる。次に $\bar{S}_3$ の部分については逆に最も短い $d_3^{m_3}$ より同じような操作に従って、下方より順次上へに順次行う。これにより、 $\bar{S}_3$ の部分も $d_3^j (j=1 \sim m_3)$ で完全に密に埋められることになる。以下、例題により、2点集中の H.B.W. の求め方を示すことにする。

[例題] (記号等は図-12参照。)

$d_0=19, d_1=8, d_2=5, d_3=6$ であり、集点 2, 3 の次数を各々 m_2, m_3 とすると

$m_2=13, m_3=11$ であり、その点列の長さは

$m_2: (8, 8, 8, 7, 7, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$

$m_3: (6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4)$

2, 3 両点のうち次数の下まわりの $M_{max.}$ をおとす

1.2 両の配置される次数 M_1 は

$$M_1 = M_{max.} - \left[\frac{M_{max.}}{2} \right] = 7.$$

m_2, m_3 のうち長い方より 7 本づつ取り出し、1~2, 3~4

両に配置、残りの 2~3 両に配置される点列の点数は

$$S_2 = 40.$$

すなわち $Cap.2 = m_1 d_2 = 35$.

よって、2~3 両にあり、5 点以下 $Cap.2$ を超えることはない。

なり、結果として 1 2 行の数 $n = M_1 + 1 = 8$, H.B.W. = 10.

[例題].

$d_0=17, d_1=8, d_2=3, d_3=6, m_2, m_3$ および点列長は上の例題と同じである。すなわち、

$M_1=7$. 7 行をとると、 $Cap.2 = d_2 \cdot M_1 = 21$ であり、ここに配置される点の数は 40. よって、 $M_1=7$

にさらに 2 点列増加する。これにより、2~3 両の点列を 1~2, 3~4 両に振り分けると、(4-8)式を満足

することになり、よって、 $n = M_1 + 2 = 9$, おなわち、H.B.W. = $9 + 2 = 11$.

この 2 つの例題の結果は、図-15, 16 に示される。

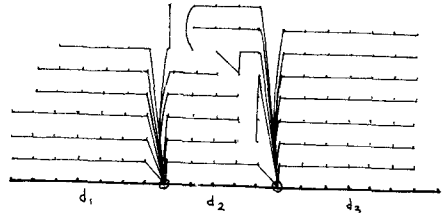


図-15 図式解法 (I)

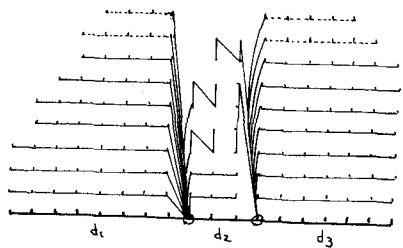


図-16 図式解法 (II)

55. Mesh を含むグラフの帯幅に因ちる考察

第4節で述べたのは Tree Graph についてであり、任意の一点を取りあげて考えてみると、その点よりさらに集中点に距離1だけ近い1個の点の拘束を受けずに済まず、また言い換えると、点の自由度が非常に大きく、方々に用いた2つの要因、つまり直径と次数のみで、その帯幅を定める手法を導くことができた。

Mesh がグラフに含まれる場合を考えると、Mesh を構成する点は少くとも2個以上の点よりの拘束を受けることになり、Tree Graph で行い得たように単純に統一的最適節点番号付けの方法は見つからないと考える。上記の2つの要因以外の要因を導入するなり、あるいは、他の帯幅決定手法を見いだす必要がある。以下、ある特殊なグラフの場合に有効な帯幅の決定手法を示す。

これは、与えられたグラフで直接用いるのではなく、その補グラフを用いる方法である。

例として図-17に示される2つのグラフ⁶をあげ、説明する、この2つのグラフは、点の数、線の数、各点の次数、直径、半径が互に等しい。しかしながら、その H.B.W. は明らかに異なる。 (a) のそれは4であり、(b) のそれは5である。この相違は、今までの2つの要因を用いても決して説明されないものである。そこで両グラフの異を

あげれば、(a) は平面グラフであるのに (b) は非平面グラフであるということである。この例の場合、それらの補グラフを比較すると、その相違が非常に

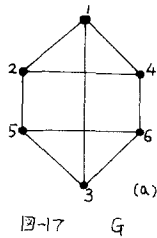
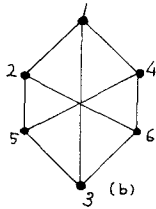


図-17 (a)



(b)

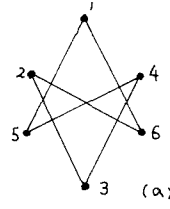
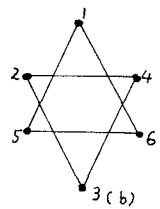


図-18 (a)



(b)

に明確となる。図-17の補グラフは図-18に示される。補グラフにおいて、元のグラフのKの要素のみが、明示されることになり、今回の例題に示されるように H.B.W. を最小にする節点番号付けが容易となる。しかしながら、この手法が用いられるのは、線の数が非常に多い場合のみに限られるという欠点を有する。

56. 結論

骨組構造物を対象に、最適節点番号を付けられた場合の帯幅を推測する方法として、グラフ理論で定義される諸概念のうち、特に重要と思われる2つの要因（直径および次数）を用い、構造形式のうち最も単純な Tree System についての帯幅を定める図式解法を提案し、簡単な例題にその手法を適用した。

ここに提案した図式解法を用いると、帯幅のみならず、同時に最適節点番号付けも定まることになり、非常に有効である。

さらに一般的な mesh を含む骨組の帯幅決定法については、特殊な系に適用可能な補グラフを用いる手法を提案したが、この手法の適用範囲は限られており、さらに一般的、かつ統一した帯幅決定手法を見いだすには、上記の2つの要因以外の他の要因を見いだす必要があると思われる。

[参考文献] フラート、ハリー著、池田貞雄訳「グラフ理論」、共立出版株式会社。